Абелевы пучки на паракомпактных пространствах.

Терминология и обозначения. Для пучка абелевых групп F на топологическом пространстве X обозначим через $s(x)$ класс сечения $s \in F(U)$ в слое F_x над точкой $x \in U$. *Носителем* пучка F (соотв. сечения $s \in F(U)$) называется множество $\operatorname{supp}(F) = \{x \in X \mid F_x \neq 0\}$ (соотв. $\operatorname{supp}(s) = \{x \in U \mid s(x) \neq 0\}$). Пучок F *допускает разложение единицы*, если для любого сечения $s \in F(U)$ над произвольным открытым $U \subset X$ и любого открытого покрытия $U = \bigcup W_\alpha$ найдутся такие сечения $s_\alpha \in F(U)$ с $\operatorname{supp}(s_\alpha) \subset W_\alpha$, что для каждой точки $x \in U$ лишь конечное число $s_\alpha(x) \neq 0$ и $\sum_\alpha s_\alpha(x) = s(x)$ в F_x. Пучок F на X называется *вялым*, если ограничение $F(X) \to F(U)$ сюрьективно для любого открытого $U \subset X$, *мягким* — если слой F_Z над каждым замкнутым $Z \subset X$ состоит из ростков глобальных сечений, *тонким* — если для любых двух замкнутых подмножеств $Z_1, Z_2 \subset X$ существует эндоморфизм $F \to F$, тождественный на некотором открытом $U_1 \supset Z_1$ и нулевой на некотором открытом $U_2 \supset Z_2$.

ПГА5⋄1. Покажите, что **а)** для точной тройки пучков $0 \to F \to G \to H \to 0$ с вялым F последовательность $0 \to F(U) \to G(U) \to H(U) \to 0$ точна над любым открытым $U \subset X$ и вялость G влечёт вялость H **б)** прямой образ вялого пучка вял **в)** вялый пучок мягок.

ПГА5⋄2. Для пучка F его *вялая оболочка Годемана* G_F имеет $G_F(U) \overset{\text{def}}{=} \prod_{x \in U} F_x$. Покажите, что сопоставление $F \mapsto G_F$ задаёт точный функтор из пучков в вялые пучки.

ПГА5⋄3. Для замкнутого вложения $\iota : Z \hookrightarrow X$ и пучка F на Z покажите, что **а)** слой $\iota_* F_x$ равен F_x при $x \in Z$ и нулю при $x \notin Z$ **б)** функтор ι_* точен и $\iota^* \iota_* \simeq \mathrm{Id}$ **в)** $H^n(X, \iota_* F) \simeq \simeq H^n(Z, F)$. **г)** Пусть $\varphi : E \to G$ — морфизм пучков на X, причём $\operatorname{supp}(G) \subset Z$. Покажите, что φ единственным образом пропускается через канонический морфизм $F \to \iota_* \iota^* F$.

ПГА5⋄4. Для открытого вложения $j : U \hookrightarrow X$ покажите, что функтор j^* точен и $j^* j_* = \mathrm{Id}$.

ПГА5⋄5. Для открытых $U_1, U_2 \subset X$ и пучка F на X постройте точную последовательность групп $\cdots \to H^p(U_1 \cup U_2, j^*_{1\cup 2} F) \to H^p(U_1, j_1^* F) \oplus H^p(U_2, j_2^* F) \to H^p(U_1 \cap U_2, j^*_{1\cap 2} F) \to H^{p+1}(U_1 \cup \cup U_2, j^*_{1\cup 2} F) \to \cdots$, где через $j_{\dots}$ обозначены соответствующие открытые вложения.

ПГА5⋄6. Для локально компактного[1] X, замкнутых компактных $Z_1, Z_2 \subset X$ и пучка F на X постройте точную последовательность $\cdots \to H^p(Z_1 \cup Z_2, \iota^*_{1\cup 2} F) \to H^p(Z_1, \iota_1^* F) \oplus H^p(Z_2, \iota_2^* F) \to \to H^p(Z_1 \cap Z_2, \iota^*_{1\cap 2} F) \to H^{p+1}(Z_1 \cup Z_2, \iota^*_{1\cup 2} F) \to \cdots$, где $\iota_{\dots}$ — замкнутые вложения.

ПГА5⋄7. Пусть X локально компактно и паракомпакно[2]. Покажите, что **а)** мягкость пучка равносильна тому, что для любого компакта $Z \subset X$, открытого $U \supset Z$ и сечения $s \in F(U)$ найдётся такое глобальное сечение $t \in F(X)$, что $s(x) = t(x)$ для всех x из некоторого открытого $W \subset X$ с $Z \subset W \subset U$ **б)** пучок модулей над мягким пучком колец мягок **в)** пучок непрерывных функций со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ мягок **г)** мягкий пучок допускает разложение единицы **д)** мягкость (соотв. тонкость) F равносильна тому, что у каждой точки есть такая открытая окрестность $j : U \hookrightarrow X$, что $j^* F$ мягок (соотв. тонок) на U **е)** тонкость F равносильна вялости пучка колец[3] $\mathcal{H}om(F, F)$ с $\mathcal{H}om(F, F)(U) \overset{\text{def}}{=} \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}(j^* F, j^* F)$, где $j : U \hookrightarrow X$ — открытое вложение **ж)** пучок гладких функций на гладком вещественном многообразии тонок **з)** тонкий пучок мягок **и)** в точной тройке $0 \to F \to G \to H \to 0$ с мягким F мягкость G влечёт мягкость H и последовательность слоёв $0 \to F_Z \to G_Z \to H_Z \to 0$ точна над любым замкнутым $Z \subset X$.

ПГА5⋄8. Пусть F обладает разложением единицы. Покажите, что любое открытое покрытие X является F-ацикличным и выведите отсюда, что F ацикличен.

ПГА5⋄9. Пусть X — гладкое вещественное n-мерное многообразие. Покажите, что: **а)** пучки дифференциальных p-форм Ω^p ацикличны при всех p **б)** комплекс пучков $0 \to \Omega^0 \xrightarrow{d} \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n \to 0$ является ацикличной резольвентой постоянного пучка $\mathbb{R}^\sim$.

---

[1] Локальная компактность означает хаусдорфовость и наличие у каждой точки открытой окрестности с компактным замыканием.

[2] Т. е. любое открытое покрытие X содержит локально конечное подпокрытие.

[3] Проверьте, кстати, что это пучок.

Персональный табель ____ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 5 (1.03.2018)

№	дата	кто принял	подпись
1а			
б			
в			
2			
3а			
б			
в			
г			
4			
5			
6			
7а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
з			
и			
8			
9а			
б			