Сопряжённые функторы, точные функторы и копределы.

ПГА2◇1. Предпучки $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{C}$ называются *левосопряжёнными* (соотв. *правосопряжёнными*), если имеется функториальная по $C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и $D \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ биекция

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(G(D), C\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(C), D\big) \qquad (\text{соотв. } \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(C, G(D)\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(D, F(C)\big))\,.$$

Сформулируйте и решите для них аналог зад. ПГА1◇8.

ПГА2◇2. Покажите, что функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, если и только если есть естественные преобразования $t : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ и $s : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$, для которых композиции естественных преобразований[1] $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$ и $G \xrightarrow{s \circ G} GFG \xrightarrow{G \circ t} G$ равны тождественным эндоморфизмам функторов F и G.

ПГА2◇3. Покажите, что для козамкнутости категории $\mathcal{C}$ достаточно существования в $\mathcal{C}$ начального объекта, прямых копроизведений любых множеств объектов и коуравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом.

ПГА2◇4. Пусть подмножество S в кольце[2] R с единицей таково, что $1 \in S$, $s, t \in S \Rightarrow st \in S$ и выполнены *условия Оре*: (O_1) $\forall\, \varrho \in R\ \forall\, s \in S\ \exists\, \lambda \in R\ \exists t \in S$: $\lambda s = t\varrho$ (O_2) $\forall\, \varphi, \psi \in R$ из $\exists\, s \in S$: $\phi s = \psi s$ следует, что $\exists\, t \in S$: $t\phi = t\psi$. Рассмотрим S как категорию, в которой $\operatorname{Hom}_S(s,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\lambda \in R \mid \lambda s = t\}$, и определим функтор $S \to \mathcal{M}od\text{-}R$, отправляя объект $s \in S$ в свободный правый R-модуль ранга один, базисный вектор в котором обозначим символом $[s^{-1}]$, а стрелку $\lambda \in \operatorname{Hom}_S(s_1, s_2)$ — в гомоморфизм $[s_1^{-1}] \mapsto [s_2^{-1}] \cdot \lambda$. Покажите, что копредел этого функтора это *модуль левых дробей* $S^{-1}R$ образованный классами пар $s^{-1}\varrho$ по отношению эквивалентности $s_1^{-1}\varrho_1 \sim s_2^{-1}\varrho_2$, означающему существование таких $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, что $\lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$ и $\lambda_1\varrho_1 = \lambda_2\varrho_2$. Проверьте, что это и впрямь отношение эквивалентности и задайте на $S^{-1}R$ структуру ассоциативного кольца с единицей.

ПГА2◇5 (точные функторы). Функтор $F : \mathcal{A}b \to \mathcal{A}b$ (соотв. $\mathcal{A}b^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{A}b$) называется *точным слева*, если он переводит ядра (соотв. коядра) в ядра. Двойственным образом, F называется *точным справа*, если он переводит коядра (соотв. ядра) в коядра. Функтор называется *точным*, если он точен и справа и слева. Покажите, что: **а)** для фиксированной группы $N \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}b$ функтор $X \mapsto X \otimes_{\mathbb{Z}} N$ точен справа, и предъявите группу N, для которой он не точен слева **б)** для фиксированной фильтрующейся категории $\mathcal{N}$ функтор $\operatorname{colim} : \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{A}b) \to \mathcal{A}b$ точен[3].

ПГА2◇6. Покажите, что последовательность $0 \to F \to G \to H \to 0$ пучков абелевых групп на топологическом пространстве X точна, если и только если для каждой точки $x \in X$ последовательность слоёв $0 \to F_x \to G_x \to H_x \to 0$ точна в категории абелевых групп, и приведите пример, показывающий, что для предпучков это не так.

ПГА2◇7. Покажите что тавтологическое вложение категории пучков абелевых групп в категорию предпучков абелевых групп на топологическом пространстве является точным слева функтором, но, вообще говоря, не точно справа.

ПГА2◇8. Покажите, что функтор $\Gamma : \mathcal{T}op(X) \to p\mathcal{S}h(X)$, переводящий непрерывное отображение $E \to X$ в пучок его локальных сечений, сопряжён справа функтору $\mathcal{E} : p\mathcal{S}h(X) \to \mathcal{T}op(X)$, переводящему предпучок множеств F на X в его этальное пространство $\mathcal{E}_F = \coprod_{x \in X} F_x$ со слабейшей топологией, в которой все сечения $s : U \to \mathcal{E}_F$, $x \mapsto$ (класс s в F_x), непрерывны для всех $s \in F(U)$ и всех открытых $U \subset X$.

[1] Здесь $(F \circ s)_X \stackrel{\mathrm{def}}{=} F\left(s_X\right)$, $(t \circ F)_X \stackrel{\mathrm{def}}{=} t_{F(X)}$ и т. д.

[2] Ассоциативном, но не обязательно коммутативном.

[3] Ядро и коядро естественного преобразования диаграмм $f : X \to Y$ образованы, соответственно, ядрами и коядрами стрелок $f_\nu : X_\nu \to Y_\nu$, $\nu \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Проверьте, что стрелки $X(\mu \to \nu)$ и $Y(\mu \to \nu)$ корректно задают гомоморфизмы этих групп, и эти гомоморфизмы образуют диаграммы $\ker f : \mathcal{N} \to \mathcal{A}b$ и $\operatorname{coker} f : \mathcal{N} \to \mathcal{A}b$.

Персональный табель ______________________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 2 (25.01.2018)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5а			
б			
6			
7			
8			