

Точные категории¹

ПГА 2¹/₂◊1. Пусть категория \mathcal{E} имеет нулевой объект 0 , а также ядра и коядра всех морфизмов². Для произвольной стрелки $\varphi : X \rightarrow Y$ положим $\text{im } \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \ker (Y \rightarrow \text{coker } \varphi)$ и $\text{coim } \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \text{coker} (\ker \varphi \rightarrow X)$. Покажите, что φ функториально раскладывается в композицию $X \rightarrow \text{coim } \varphi \rightarrow \text{im } \varphi \rightarrow Y$.

Точные категории. Будем называть категорию \mathcal{E} *точной*, если она удовлетворяет условиям **зад. ПГА 2¹/₂◊1** и канонический морфизм $\text{coim } \varphi \rightarrow \text{im } \varphi$ является изоморфизмом для всех $\varphi \in \text{Mor } \mathcal{E}$. Композиция $\varphi\psi$ называется *точной*, если $\ker \varphi = \text{im } \psi$. Всё дальнейшее относится к *произвольной* точной категории.

ПГА 2¹/₂◊2. Покажите, что в коммутативной диаграмме с точными строками

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & Y_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Z_1 \\ \downarrow \xi & & \downarrow \eta & & \downarrow \zeta \\ X_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & Y_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Z_2 \end{array}$$

а) при $\ker \alpha_1 = 0 = \ker \alpha_2$ последовательность $0 \rightarrow \ker \xi \rightarrow \ker \eta \rightarrow \ker \zeta$ точна, а при $\text{coker } \xi = \text{coker } \beta_1 = \text{coker } \beta_2 = 0$ **б)** $\text{coker } \eta \simeq \text{coker } \zeta$ **в)** последовательность $X_2 \rightarrow \text{im } \eta \rightarrow \text{im } \zeta$ точна **г)** $\text{im } \zeta = \text{coker} (\ker \eta \rightarrow Z_1)$ **д)** $\text{coker} (\ker \eta \rightarrow \ker \zeta) = 0$.

ПГА 2¹/₂◊3. Для коммутативной диаграммы с точными строками постройте

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & D_1 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta \\ A_2 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & D_2 \end{array}$$

при $\text{coker } \alpha = 0$ точную последовательность $\ker \beta \rightarrow \ker \gamma \rightarrow \ker \delta$, а при $\ker \delta = 0$ точную последовательность $\text{coker } \alpha \rightarrow \text{coker } \beta \rightarrow \text{coker } \gamma$.

ПГА 2¹/₂◊4. Свяжите с любой композицией $\varphi\psi$ точную последовательность $0 \rightarrow \ker \psi \rightarrow \ker \varphi\psi \rightarrow \ker \varphi \rightarrow \text{coker } \psi \rightarrow \text{coker } \varphi\psi \rightarrow \text{coker } \varphi \rightarrow 0$.

ПГА 2¹/₂◊5. В коммутативной диаграмме с точными строками и $\text{coker } \alpha = 0 = \ker \varepsilon$

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & D_1 & \longrightarrow & E_1 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon \\ A_2 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & D_2 & \longrightarrow & E_2 \end{array} \tag{1}$$

положим $K \stackrel{\text{def}}{=} \ker (C_1 \rightarrow D_2)$ и $\bar{K} \stackrel{\text{def}}{=} \text{coker} (B_1 \rightarrow C_2)$. Постройте естественные **а)** эпиморфизм $K \twoheadrightarrow \ker \delta$ и мономорфизм $\text{coker } \beta \hookrightarrow \bar{K}$ **б)** такую единственную стрелку $\partial : \ker \delta \rightarrow \text{coker } \beta$, что композиции $K \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \bar{K}$ и $K \rightarrow \ker \delta \xrightarrow{\partial} \text{coker } \beta \rightarrow \bar{K}$ совпадают **в)** длинную точную последовательность $\ker \beta \rightarrow \ker \gamma \rightarrow \ker \delta \rightarrow \text{coker } \beta \rightarrow \text{coker } \gamma \rightarrow \text{coker } \delta$.

ПГА 2¹/₂◊6. Покажите, что в диаграмме (1) с обратимыми $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ обратима и γ .

ПГА 2¹/₂◊7. Для комплекса³ $C : \dots \xrightarrow{d^{i-1}} C^i \xrightarrow{d^i} C^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \dots$ положим $Z^i \stackrel{\text{def}}{=} \ker d^i$, $\bar{Z}^i \stackrel{\text{def}}{=} \text{coker } d^{i-1}$, $H^i \stackrel{\text{def}}{=} Z^i / \text{im } d^{i-1}$. Убедитесь, что d^n задаёт стрелку $\bar{Z}^n \rightarrow Z^{n+1}$, и для точной последовательности комплексов $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ постройте функториальную точную последовательность $H^n(A) \xrightarrow{H^n(\alpha)} H^n(B) \xrightarrow{H^n(\beta)} H^n(C) \xrightarrow{H^n(\delta^n)} H^{n+1}(A) \xrightarrow{H^{n+1}(\alpha)} H^{n+1}(B) \xrightarrow{H^{n+1}(\beta)} H^{n+1}(C)$.

¹Подсказки ко всем задачам из этого листка можно найти в первой главе книги: *B. Iversen. «Cohomology of sheaves»*.

²Т. е. (ко)уравнители стрелок $X \rightarrow Y$ и нулевой стрелки $X \rightarrow 0 \rightarrow Y$.

³Это значит, что $d^i d^{i-1} = 0$ при всех i .

№	дата	кто принял	подпись
1			
2а			
б			
в			
г			
д			
3			
4			
5а			
б			
в			
6			
7			