§3. Предпучки и пучки

3.1. Предпучки на малой категории. С каждым предпучком множеств F на малой категории $\mathcal{U}$ функториально связана малая категория $\mathcal{N}_F$ с множеством объектов

$$\operatorname{Ob}\mathcal{N}_F \overset{\text{def}}{=} \bigsqcup_{U\in\operatorname{Ob}\mathcal{U}} F(U)\,.$$

Будем обозначать объект $s \in F(U)$ категории $\mathcal{N}_F$ символом sU, и для каждой стрелки $\varphi : U \to W$ в категории $\mathcal{U}$ условимся записывать действие контравариантного по φ морфизма $F(\varphi) : F(W) \to F(U)$ на сечение $t \in F(U)$ в виде $t \mapsto t\varphi$, т. е. как правое умножения на φ. Множества морфизмов категории $\mathcal{N}_F$ определяются как

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{N}_F}(sU, tW) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi : U \to W \mid t\varphi = s\}\,.$$

Таким образом, стрелки категории $\mathcal{N}_F$, ведущие в объект tW, находятся в биекции со стрелками категории $\mathcal{U}$, ведущими в объект W, и имеют вид $(t\varphi)U \to tW$, где $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{U}}(U, W)$. В частности, для категории $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$ открытых множеств топологического пространства X множество $\operatorname{Hom}_{\mathcal{N}_F}(sU, tW)$ непусто , если и только если $U \subset W$ и $s = t|_W$, и в этом случае $\operatorname{Hom}_{\mathcal{N}_F}(t|_U U, tW)$ состоит из единственного элемента — вложения $U \hookrightarrow W$.

В самой категории $\mathcal{U}$ и в категории $pSh(\mathcal{U})$ предпучков множеств на $\mathcal{U}$ имеются канонические диаграммы формы $\mathcal{N}_F$, переводящиеся друг в друга вложением Ионеды:

$$\begin{tikzcd} & pSh(\mathcal{U}) \\ \mathcal{N}_F \arrow[ur, "H_F"] \arrow[dr, "D_F"'] & \\ & \mathcal{U}\,, \arrow[uu, hook, "h_*", "\text{вложение Ионеды}"'] \end{tikzcd} \tag{3-1}$$

где $h_* : \mathcal{U} \to pSh(\mathcal{U})$, $U \mapsto h_U$.

Диаграмма $H_F : \mathcal{N}_F \to pSh(\mathcal{U})$ сопоставляет объекту tW категории $\mathcal{N}_F$ представимый предпучок h_W, который мы будем обозначать th_W, чтобы помнить, какому сечению $t \in F(W)$ он соответствует. Элементы $\psi \in th_W(U) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{U}}(U, W)$ мы также будем обозначать $t\psi$. Стрелке $t\varphi U \to tW$, происходящей из морфизма $\varphi : U \to W$, на диаграмме H_F отвечает естественное преобразование $\varphi_* : t\varphi h_U \to th_W$ левого умножения на φ, действие которого над объектом $V \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$ задаётся правилом

$${\varphi_V}_* : (t\varphi)\operatorname{Hom}_{\mathcal{U}}(V, U) \to (t)\operatorname{Hom}_{\mathcal{U}}(V, W)\,, \quad (t\varphi)\psi \mapsto t(\varphi\psi)\,.$$

Диаграмма $D_F : \mathcal{N}_F \to \mathcal{U}$ сопоставляет объекту tW категории $\mathcal{N}_F$ подлежащий ему объект U категории $\mathcal{U}$, который мы будем по-прежнему обозначать sU. Стрелке $t\varphi U \to tW$ категории $\mathcal{N}_F$ на диаграмме H_F отвечает тот самый морфизм $\varphi : U \to W$ категории $\mathcal{U}$, которым эта стрелка задаётся.

Лемма 3.1
Каждый предпучок множеств F на малой категории $\mathcal{U}$ является копределом

$$F = \operatorname{colim} H_F$$

функториально зависящей от F диаграммы H_F представимых предпучков.

Доказательство. Из каждого объекта $sh_U = h_U$ диаграммы H_F ведёт каноническая стрелка $s : h_U \to F$ — естественное преобразование, отвечающее по Ионеде[1] элементу $s \in F(U)$. Его действие над объектом $V \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$ переводит лежащую в $h_U(V)$ стрелку $\psi : V \to U$ в элемент $s\psi \in F(V)$.

Упражнение 3.1. Убедитесь, что стрелки $s : sh_U \to F$ перестановочны со всеми стрелками диаграммы H_F.

Пусть в некоторый предпучок $G : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ тоже ведут перестановочные со стрелками диаграммы H_F естественные преобразования $\gamma_U(s) : sh_U \to G$. По лемме Ионеды эти преобразования однозначно задаются такими элементами $g_U(s) \in G(U)$, что для любой стрелки $\varphi : U \to W$ и любого элемента $t \in F(W)$ выполняется равенство[2] $g_W(t)\varphi = g_U(t\varphi)$. Поэтому правило $g_U : F(U) \to G(U)$, $s \mapsto g_U(s)$, корректно задаёт морфизм предпучков $g : F \to G$, перестановочный со всеми ведущими в них из диаграммы H_F стрелками, причём это единственный способ задать такой морфизм предпучков. □

Упражнение 3.2. Выведите лем. 3.1 из сл. 2.2 на стр. 31.

Теорема 3.1 (о продолжении по непрерывности)
Для любого ковариантного функтора $G : \mathcal{U} \to \mathcal{C}$ из малой категории $\mathcal{U}$ в произвольную козамкнутую категорию $\mathcal{C}$ существует единственный с точностью до естественного изоморфизма перестановочный с копределами функтор $G^{\frown} : p\mathcal{S}h(\mathcal{U}) \to \mathcal{C}$, такой что $G^{\frown} \circ h_* \simeq G$, где $h_* : \mathcal{U} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$ — вложение Ионеды. Этот функтор сопряжён слева функтору $h_*^G : \mathcal{C} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$, который переводит объект $C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в предпучок

$$h_C^G : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et\,, \quad U \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(G(U), C\big)\,.$$

Упражнение 3.3. Проверьте, что правило $C \mapsto h_C^G$ и впрямь задаёт ковариантный функтор $\mathcal{C} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$.

Доказательство. Поскольку каждый предпучок F на $\mathcal{U}$ является копределом диаграммы $H_F = h_* \circ D_F$ из форм. (3-1) на стр. 34, равенство $G^{\frown} \circ h_* \simeq G$ и перестановочность функтора $G^{\frown}$ с копределами не оставляют иной возможности, как положить

$$G^{\frown}(F) = G^{\frown} \operatorname{colim} H_F = G^{\frown} \operatorname{colim} h_* D_F = \operatorname{colim} G^{\frown} h_* D_F = \operatorname{colim} G D_F\,, \tag{3-2}$$

где $GD_F : \mathcal{N}_F \to \mathcal{C}$ это диаграмма в категории $\mathcal{C}$, полученная применением функтора G к диаграмме D_F из (3-1). Диаграмма GD_F состоит из объектов $sG(U) = G(U) \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, по одному для каждой пары (s, U), $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$, $s \in F(U)$, и стрелок

$$G(\varphi) : (t\varphi)G(U) \to tG(W)\,,$$

[1] См. лем. 1.2 на стр. 14.

[2] Напомню, что правое умножение сечения $g \in G(W)$ предпучка $G : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на морфизм $\varphi : U \to W$ из категории $\mathcal{U}$ по определению означает результат применения к g морфизма ограничения $F(\varphi) : F(W) \to F(U)$, т. е. $g\varphi \stackrel{\text{def}}{=} G(\varphi)g$.

по одной для каждой пары (t, φ), $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(U, W)$, $t \in F(W)$. Естественное преобразование диаграммы GD_F в постоянную диаграмму $\overline{C}$, ассоциированную с объектом $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, это такой набор стрелок $\gamma_{sU} : sG(U) \to C$, что $\gamma_{tW} \circ G(\varphi) = \gamma_{t\varphi U}$ для всех морфизмов $\varphi : U \to W$ категории $\mathcal{U}$ и всех $t \in F(W)$. Такой набор стрелок задаёт естественное преобразование предпучка $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ в предпучок

$$h_C^G : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et\,, \quad U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(G(U), C\big)\,,$$

действие которого над объектом $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{U}$ переводит сечение $s \in F(U)$ в морфизм $\gamma_{sU} : sG(U) \to C$. Тем самым, имеется функториальная по $F \in \mathrm{Ob}\,p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$ и $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ биекция

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{colim}\,GD_F, C) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}_F, \mathcal{C})}(GD_F, \overline{C}) \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{C})}(F, h_C^G)\,.$$

Поэтому согласно предл. 2.1 на стр. 19 сопоставление $F \mapsto \mathrm{colim}\,GD_F$ однозначно задаёт функтор $G^{\frown} : p\mathcal{S}h(\mathcal{U}) \to \mathcal{C}$, сопряжённый слева к функтору

$$h_*^G : \mathcal{C} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{U})\,, \quad C \mapsto h_C^G\,.$$

Как и всякий левый сопряжённый функтор, он перестановочен с копределами[1]. □

Пример 3.1 (тензорное умножение на бимодуль)

Всякое кольцо R с единицей можно рассматривать как аддитивную категорию $\mathcal{U}$ с одним объектом U и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(U, U) = R$. Предпучок абелевых групп $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{A}b$ на этой категории это правый R-модуль $F = F(U)$, так что $p\mathcal{S}h(\mathcal{U}) \simeq \mathcal{M}od\text{-}R$. Объекты категории $\mathcal{N}_F$ суть элементы $s \in F$, и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{N}_F}(s, t) = \{\varphi \in R \mid t\varphi = s\}$ это *трансформатор* из t в s. Представимый предпучок абелевых групп h_U это свободный модуль ранга 1, т. е. само кольцо R, рассматриваемое как правый модуль над собой. Объекты диаграммы $H_F : \mathcal{N}_F \to \mathcal{M}od\text{-}R$ суть свободные модули sR ранга 1 с базисными элементами $s \in F$, а стрелки — R-линейные справа отображения $(t\varphi)R \to tR$, переводящие базисный вектор $t\varphi \in (t\varphi)R$ в вектор $t \cdot \varphi \in tR$. В этой ситуации лем. 3.1 утверждает, что копредел такой диаграммы канонически изоморфен модулю F.

Упражнение 3.4. Убедитесь в этом непосредственно.

Возьмём в качестве козамкнутой категории $\mathcal{C}$ категорию $\mathcal{M}od\text{-}S$ правых модулей над каким-либо кольцом S. Тогда ковариантный функтор $G : \mathcal{U} \to \mathcal{M}od\text{-}S$ есть то ни что иное, как R-S-бимодуль $G = G(U)$. Отвечающий такому бимодулю функтор

$$h_*^G : \mathcal{M}od\text{-}S \to p\mathcal{S}h(\mathcal{U}) = \mathcal{M}od\text{-}R$$

переводит S-модуль C в R-модуль $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(G, C)$, правое действие кольца R на котором это левое действие на модуле G. В данном случае теор. 3.1 утверждает, что у этого функтора есть левый сопряжённый функтор $G^{\frown} : F \mapsto \mathrm{colim}\,GD_F$. Объектами диаграммы GD_F являются одинаковые копии sG модуля G, занумерованные элементами $s \in F$, а стрелками — морфизмы $\varphi : (t\varphi)G \to tG$, $(t\varphi) \cdot g \mapsto t \cdot (\varphi g)$, по одному для каждого элемента $\varphi \in R$.

Упражнение 3.5. Убедитесь, что $\mathrm{colim}\,GD_F = F\Omega \times_R G$.

[1] См. предл. 2.6 на стр. 32.

Таким образом мы снова получаем канонический изоморфизм из предл. 2.3 на стр. 21:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}\big(F\Omega \times_R G, C\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}\big(F, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(G,C)\big)\,.$$

Пример 3.2 (геометрическая реализация симплициальных множеств)
Для симплициальной категории $\mathcal{U} = \Delta$ и симплициального множества $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ диаграмма $H_F : \mathcal{N}_F \to p\mathcal{S}h(\Delta)$ состоит из объектов $sh_{[n]}$, занумерованных числами $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и симплексами $s \in F_n = F([n])$. Каждый предпучок $sh_{[n]} = h_{[n]} : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ является комбинаторным описанием стандартной триангуляции правильного симплекса $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Действие стрелки $\varphi_* : (t\varphi)h_{[n]} \to th_{[m]}$ состоит в левом умножении стрелок из $h_{[n]}$ на φ.

Упражнение 3.6. Убедитесь, что копредел этой диаграммы в категории симплициальных множеств изоморфен F.

Функтор геометрической реализации $G : \Delta \to \mathcal{T}op$ переводит комбинаторный симплекс $[n]$ в геометрический симплекс $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. По теор. 3.1 этот функтор канонически продолжается на любые симплициальные множества перестановочным с копределами функтором $G^{\frown} : p\mathcal{S}h(\Delta) \to \mathcal{T}op$, который переводит симплициальное множество F в копредел диаграммы GD_F в категории $\mathcal{T}op$. Эта диаграмма получается из предыдущей диаграммы H_F заменой каждого комбинаторного симплекса $h_{[n]}$ на геометрический симплекс Δ^n, а морфизмов $\varphi_* : h_{[n]} \to h_{[m]}$, задаваемых левыми умножениями на стрелки $\varphi : [m] \to [n]$ в категории Δ, — на аффинные отображения $\varphi_* : \Delta^n \to \Delta^m$ действующие на вершины симплексов стрелкой φ.

Упражнение 3.7. Убедитесь, что копредел такой диаграммы гомеоморфен топологическому пространству $|F|$ из прим. 1.7 на стр. 8.

Правый сопряжённый к геометрической реализации функтор $h^G_* : C \to h^G_C$ сопоставляет топологическому пространству C симплициальное множество его сингулярных симплексов $h^G_C = S(C) : [n] \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, C)$. В данном случае теор. 3.1 утверждает наличие канонического изоморфизма $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(|F|, C) = \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\Delta)}(F, S(C))$ из прим. 2.3 на стр. 22.

Пример 3.3 (этальное пространство предпучка)
В случае, когда $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$ является категорией открытых множеств топологического пространства X, а $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ это предпучок на X, диаграмма H_F состоит из представимых предпучков sh_U, по одному для каждого открытого $U \subset X$ и каждого $s \in F(U)$. Пучок sh_U имеет пустые множества сечений над всеми $V \not\subset U$ и одноточечное множество сечений над каждым $V \subseteq U$. Единственный элемент последнего множества уместно обозначить $s|_V$. Каждому включению $U \hookrightarrow W$ и сечению $t \in F(W)$ в диаграмме H_F отвечает стрелка $t|_U h_U \to th_W$, действие которой над открытым $V \subseteq U \subseteq W$ переводит единственный элемент $t|_V \in t|_U h_U(V)$ в единственный элемент $t|_V \in h_W(V)$.

Упражнение 3.8. Убедитесь, что копредел этой диаграммы в категории предпучков на X равен F.

Возьмём в качестве козамкнутой категории $\mathcal{C}$ в теор. 3.1 категорию $\mathcal{T}op(X)$ топологических пространств над X, объектами которой являются непрерывные отображения $p : Y \to X$ в категории $\mathcal{T}op$, а $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op(X)}(p,q) = \{\psi \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{T}op \mid q\psi = p\}$. Иначе говоря, морфизм из $p : Y \to X$ в $q : Z \to X$ это непрерывное отображение $\psi : Y \to Z$, для каждого $x \in X$ переводящее слой $p^{-1}x$ в слой $q^{-1}x$. Имеется естественный функтор $G : \mathcal{U}(X) \to \mathcal{T}op(X)$ переводящий открытое подмножество $U \subset X$ в его тавтологическое вложение $U \hookrightarrow X$. Согласно теор. 3.1 этот функтор продолжается по непрерывности до функтора $G^{\frown} : p\mathcal{S}h(X) \to \mathcal{T}op(X)$, который сопоставляет предпучку F на X топологическое пространство над X. Оно называется *этальным пространством* предпучка F, обозначается $\mathcal{E}_F$, и представляет собою копредел в категории $\mathcal{T}op(X)$ диаграммы GD_F, объектами которой являются тавтологические вложения $sU \hookrightarrow X$, по одному для каждого открытого $U \subset X$ и каждого сечения $s \in F(U)$, а стрелками — включения $t|_U U \hookrightarrow tW$, по одному для каждого включения $U \hookrightarrow W$ и каждого сечения $t \in F(W)$. Слоем пространства $\mathcal{E}_F$ над точкой $x \in X$ является копредел $\operatorname{colim}_{U \ni x} F(U)$ индуктивной системы множеств сечений предпучка F над всеми открытыми окрестностями U точки x относительно отображений ограничения сечений, т. е. *слой*[1] F_x предпучка F в точке x. Напомню, что он состоит из *ростков* сечений, т. е. из классов $s|_x$ сечений $s \in F(U)$ по модулю эквивалентности, отождествляющей сечения $s \in F(U)$ и $t \in F(W)$, если и только если $s|_V = t|_V$ на какой-нибудь открытой окрестности $V \subset U \cap W$ точки x. Таким образом, как множество

$$\mathcal{E}_F = \bigsqcup_{x \in X} F_x\,,$$

и проекция $\pi_F : \mathcal{E}_F \to X$ отображает все элементы слоя $F_x \subset \mathcal{E}_F$ в точку $x \in X$. Каждое сечение $s \in F(U)$ задаёт локальное отображение $s : U \to \mathcal{E}_F$, переводящее точку $x \in U$ в класс $s|_x \in F_x$ сечения s. Топология на пространстве $\mathcal{E}_F$ определяется как слабейшая из топологий, в которых все такие локальные сечения $s : U \to \mathcal{E}_F$ непрерывны, т. е. множество $\mathcal{W} \subset \mathcal{E}_F$ открыто , если и только если для любого открытого подмножества $U \subset X$ и любого сечения $s \in F(U)$ прообраз множества $\mathcal{W}$ при отображении

$$s : U \hookrightarrow \mathcal{E}_F\,, \quad x \mapsto s|_x\,,$$

открыт в U. Тем самым, базу открытых окрестностей точки $s|_x \in \mathcal{E}_F$, изображающей класс сечения $s \in F(U)$ над какой-либо открытой окрестностью $U \ni x$, составляют образы $s(W) \subset \mathcal{E}_F$ содержащихся в U открытых окрестностей $W \ni x$ при отображении $s : U \to \mathcal{E}_F$, задаваемом сечением s. В частности, проекция $\pi_F : \mathcal{E}_F \to X$ является *локальным гомеоморфизмом* в том смысле, что любая точка пространства $\mathcal{E}_F$ обладает открытой окрестностью[2] $\mathcal{W}$, на которую проекция π_F ограничивается в гомеоморфизм $\pi_F|_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \xrightarrow{\sim} \pi_F(\mathcal{W})$.

Упражнение 3.9. Убедитесь, что пространство $\mathcal{E}_F = \bigsqcup_{x \in X} F_x$ с только что описанной топологией действительно является копределом диаграммы $GD_F : \mathcal{N}_F \to \mathcal{T}op(X)$.

Согласно теор. 3.1 функтор $F \mapsto \mathcal{E}_F$ сопряжён слева функтору $h^G_* : \mathcal{T}op(X) \to p\mathcal{S}h(X)$, который сопоставляет непрерывному отображению $p : Y \to X$ пучок его сечений[3]

$$h^G_Y = \Gamma_Y : U \mapsto \{s : U \to Y \mid ps = \mathrm{Id}_U\}\,,$$

[1] См. прим. 2.12 на стр. 29.

[2] Более того, такую окрестность можно указать в любой наперёд заданной окрестности любой точки пространства $\mathcal{E}_F$.

[3] См. прим. 1.8 на стр. 9.

т. е. имеется функториальная по предпучку F на X и пространству Y над X биекция

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Top}(X)}(\mathcal{E}_F, Y) = \mathrm{Hom}_{p\mathcal{Sh}(X)}(F, \Gamma_Y)\,. \tag{3-3}$$

В частности, функтор $F \mapsto \mathcal{E}_F$ перестановочен с копределами, а $Y \mapsto \Gamma_Y$ — с пределами.

3.2. Пучки на топологическом пространстве. Поскольку предпучок сечений непрерывного отображения является пучком[1], композиция функторов Γ и $\mathcal{E}$ из прим. 3.3

$$\Gamma \circ \mathcal{E} \,:\, p\mathcal{Sh}(X) \to \mathcal{Sh}(X)$$

функториально сопоставляет каждому предпучку F пучок $F^s \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma \circ \mathcal{E}(F)$, сечения которого над открытым множеством U суть непрерывные сечения $s \,:\, U \hookrightarrow \mathcal{E}_F$ этального пространства $\mathcal{E}_F \to X$ предпучка F. Такое сечение представляет собою семейство ростков $s(x) \in F_x$, занумерованных точками $x \in U$, в котором для каждой точки $y \in U$ найдется открытое $W \ni y$, $W \subset U$, и такое сечение $t \in F(W)$, что $s(x) = t|_x$ в F_x для всех $x \in W$. Иначе говоря, сечение пучка F^s над множеством U задаётся покрытием $\{W_\alpha \to U\}$ множества U семейством открытых множеств W_α и набором сечений $s_\alpha \in F(W_\alpha)$, согласованных на пересечениях, в том смысле, что $s_\alpha\big|_{W_\alpha \cap W_\beta} = s_\beta\big|_{W_\alpha \cap W_\beta}$ для всех α, β. Два таких набора данных задают одно и то же сечение, если и только если их ограничения на некоторое покрытие, вписанное в оба данных покрытия, совпадают.

В силу того, что функтор $\mathcal{E}$ сопряжён слева функтору Γ, имеется естественное преобразование[2] $s \,:\, \mathrm{Id}_{p\mathcal{Sh}(X)} \to \Gamma \circ \mathcal{E}$, т. е. функториальный по F морфизм предпучков $s \,:\, F \to F^s$, называемый *опучковыванием*. Над каждым открытым U он отображает $F(U)$ в $F^s(U)$, переводя $t \in F(U)$ в семейство его классов $t|_x$ в слоях F_x над всеми $x \in U$.

Упражнение 3.10. Покажите, что канонический морфизм $s \,:\, F \to F^s$ инъективен, если и только если предпучок F отделим[3], и является изоморфизмом, если и только если F — пучок. В частности $F^{ss} \simeq F^s$.

Тем самым, ограничение композиции функторов $\Gamma\mathcal{E}$ на подкатегорию пучков естественно изоморфно тождественному функтору $\mathrm{Id}_{\mathcal{Sh}(X)}$. Этим мы наполовину доказали

Предложение 3.1
Ограничение функтора $\mathcal{E} \,:\, F \mapsto \mathcal{E}_F$ на полную подкатегорию пучков $\mathcal{Sh}(X) \subset p\mathcal{Sh}(X)$ и ограничение функтора $\Gamma \,:\, Y \mapsto \Gamma_Y$ на полную подкатегорию локальных гомеоморфизмов в $\mathcal{Top}(X)$ являются квазиобратными друг другу эквивалентностями категорий.

Доказательство. Как мы уже отмечали перед упр. 3.9 на стр. 38, проекция $p \,:\, \mathcal{E}_F \to X$ является локальным гомеоморфизмом для любого предпучка F на X. Так как функтор $F \mapsto \mathcal{E}_F$ сопряжён слева функтору $Y \mapsto \Gamma_Y$, имеется естественное преобразование $e \,:\, \mathcal{E} \circ \Gamma \to \mathrm{Id}_{\mathcal{Top}(X)}$, действие которого $e_Y \,:\, \mathcal{E}_{\Gamma_Y} \to Y$ над объектом $p \,:\, Y \to X$ переводит росток сечений $\sigma_x \in \mathcal{E}_{\Gamma_Y}$, лежащий в слое над точкой $x \in X$, в значение $s(x) \in Y$ любого локального сечения $s \,:\, U \hookrightarrow Y$, представляющего росток s_x. Если отображение

[1] См. прим. 1.8 на стр. 9.
[2] См. формулу (2-2) на стр. 18.
[3] См. прим. 1.8 на стр. 9.

$p : Y \to X$ является локальным гомеоморфизмом, то имеется обратное к e_Y отображение $\varepsilon : Y \to \mathcal{E}_{\Gamma_Y}$, переводящее точку $y \in Y$ в лежащий в слое пучка Γ_Y над точкой $p(y)$ росток любой такой открытой окрестности U точки y, которая гомеоморфно отображается на $p(U) \subset X$ и тем самым может рассматриваться как проходящее через y локальное сечение отображения $p : Y \to X$ над открытой окрестностью $p(U) \ni p(y)$.

Упражнение 3.11. Убедитесь, что e и ε непрерывны и обратны друг другу.

Тем самым, сужение $\mathcal{E}\Gamma$ на подкатегорию локальных гомеоморфизмов эквивалентно тождественному функтору. □

Следствие 3.1

Для любых пучков G, H на X и любых двух локальных гомеоморфизмов $Y \to X$, $Z \to X$ имеются функториальные изоморфизмы:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Sh}(X)}(G,H) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Top}(X)}(\mathcal{E}_G,\mathcal{E}_H) \quad \text{и} \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{Top}(X)}(X,Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Sh}(X)}(\Gamma_Y,\Gamma_Z).$$

Следствие 3.2

Функтор опучковывания $F \mapsto F^S$ сопряжён слева к вложению $\mathcal{Sh}(X) \hookrightarrow p\mathcal{Sh}(X)$, т. е. имеется функториальный по предпучку F и пучку G изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{p\mathcal{Sh}(X)}(F,G) \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{Sh}(X)}(F^S,G).$$

В частности, опучковывание перестановочно с копределами, и естественное преобразование $s : F \to F^S$ универсально: любой морфизм $\varphi : F \to G$ предпучка F в пучок G имеет вид $\varphi = \varphi^S \circ s$ для единственного морфизма $\varphi^S : F^S \to G$.

Доказательство. Пользуясь функториальными по предпучку F и пучку G изоморфизмами $G \simeq G^S$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Top}(X)}\left(\mathcal{E}_F,\mathcal{E}_G\right) \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{Sh}(X)}\left(\Gamma_{\mathcal{E}_F},\Gamma_{\mathcal{E}_G}\right)$, получаем $\mathrm{Hom}_{p\mathcal{Sh}(X)}(F,G) \simeq$ $\simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{Sh}(X)}(F,G^S) \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{Sh}(X)}\left(F,\Gamma_{\mathcal{E}_G}\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Top}(X)}\left(\mathcal{E}_F,\mathcal{E}_G\right) \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{Sh}(X)}\left(\Gamma_{\mathcal{E}_F},\Gamma_{\mathcal{E}_G}\right) \simeq$ $\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Sh}(X)}(F^S,G^S) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Sh}(X)}(F^S,G)$. □

3.2.1. Локальность. Поскольку слой F_x предпучка F на топологическом пространстве X в точке $x \in X$ является копределом $F_x = \mathrm{colim}_{U \ni x} F(U)$ прямой системы множеств $F(U)$ по всем открытым $U \ni x$, всякий морфизм предпучков $\varphi : F \to G$ в силу функториальности копредела задаёт морфизм слоёв $\varphi_x : F_x \to G_x$, переводящий росток сечения $s \in F(U)$ в росток сечения $\varphi_U(s) \in G(U)$.

Предложение 3.2

Для того, чтобы два морфизма пучков $\varphi, \psi : F \to G$ на пространстве X совпадали, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке $x \in X$ совпадали индуцированные ими морфизмы слоёв $\varphi_x, \psi_x : F_x \to G_x$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Для каждого открытого множества $U \subset X$ имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi_U"'] & \coprod\limits_{x\in U} F_x \arrow[d, "\coprod \varphi_x"] \\ G(U) \arrow[r, hook] & \coprod\limits_{x\in U} G_x \end{tikzcd} \tag{3-4}$$

горизонтальные стрелки которой, отправляющие сечение в набор его ростков, инъективны в силу того, что F и G пучки.

Упражнение 3.12. Убедитесь в этом.

Тем самым, если правая вертикальная стрелка не меняется при замене φ на ψ, то и левая не меняется. □

Предложение 3.3
Для морфизма $\varphi : F \to G$ пучков на пространстве X инъективность (соотв. биективность) отображений $\varphi_U : F(U) \to G(U)$ над всеми открытыми $U \subset X$ равносильна инъективности (соотв. биективности) отображений слоёв $\varphi_x : F_x \to G_x$ над всеми точками $x \in X$.

Доказательство. Импликация ⇒ вытекает из упр. 2.19 на стр. 33. Докажем противоположную импликацию. Утверждение про инъективность очевидно: если в предыдущей диаграмме (3-4) правая вертикальная стрелка инъективна, то инъективна и левая. Пусть в диаграмме (3-4) правая вертикальная стрелка биективна. Тогда для любого сечения $s \in G(U)$ у каждой точки $x \in U$ есть открытая окрестность $W_x \ni x$, $W_x \subset U$, с таким сечением $t_x \in F(W_x)$, что класс сечения $\varphi_W(t_x) \in G\big(W_x\big)$ в слое G_x равен $s|_x$. Для любых точек $x, y \in U$ классы сечений t_x и t_y совпадают в слоях F_z над всеми точками $z \in W_x \cap W_y$, поскольку совпадают их образы в слоях G_z. Поэтому, в силу инъективности горизонтальных стрелок, ограничения сечений t_x и t_y на пересечение $W(x) \cap W(y)$ равны. Тем самым, существует и единственно сечение $t \in F(U)$, ограничивающееся в сечение t_x над W_x сразу для всех $x \in U$. В силу коммутативности диаграммы (3-4), $\varphi_U(t) = s$, что доказывает биективность φ_U. □

Предостережение 3.1. Из сюрьективности отображений слоёв $\varphi_x : F_x \to G_x$ над всеми точками $x \in X$, вообще говоря, *не следует*, что отображения $\varphi_U : F(U) \to G(U)$ сюрьективны над *всеми* открытыми $U \subset X$. Рассмотрим, например, на окружности S^1 пучок C гладких вещественных функций и пучок Ω гладких дифференциальных 1-форм. Оператор дифференцирования $d : C \to \Omega$, $f \mapsto df$, локально эпиморфен, однако его действие над всей окружностью $d_{S^1} : C(S^1) \to \Omega(S^1)$ не эпиморфно: дифференциал длины дуги[1] $d\ell \in \Omega(S^1)$ не является дифференциалом ни от какой функции $f : S^1 \to \mathbb{R}$, поскольку

$$\int_{S^1} df = f(2\pi) - f(0) = 0\,, \quad \text{а} \quad \int_{S^1} d\ell = 2\pi\,.$$

3.3. Прямой и обратный образ. С каждым функтором $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ между произвольными малыми категориями $\mathcal{U}, \mathcal{W}$ естественно связан функтор *подъёма предпучков*

$$\Phi^* : p\mathcal{S}h(\mathcal{W}) \to p\mathcal{S}h(\mathcal{U})\,, \quad S \mapsto S\Phi\,. \tag{3-5}$$

[1]Значение дифференциальной формы $d\ell$ в каждой точке $p \in S^1$ на единичном векторе скорости, направленном против часовой стрелки, равно 1. Эквивалентно, в каждой точке $p \in S^1$ форма $d\ell$ равна дифференциалу функции длины $\ell : [a, b] \to \mathbb{R}$, которая определённа на произвольно выбранной дуге $[a, b] \subset S^1$, содержащей точку p строго внутри так, что движение $a \to p \to b$ происходит против часовой стрелки. Значение $\ell(t)$ в точке $t \in [a, b]$ равно длине дуги $[a, t]$. Обратите внимание, что хотя сама функция ℓ зависит от выбора точки a, её дифференциал $d\ell$ от этого выбора не зависит.

Лемма 3.2
У функтора (3-5) есть левый сопряжённый функтор $\Phi_* : p\mathcal{S}h(\mathcal{U}) \to p\mathcal{S}h(\mathcal{W})$, переводящий предпучок $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ в копредел диаграммы $\mathcal{N}_F \to p\mathcal{S}h(\mathcal{W})$, объектами которой являются представимые предпучки $sh_{\Phi(U)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} h_{\Phi(U)}$ на $\mathcal{W}$, по одному для каждого $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{U}$ и каждого $s \in F(U)$, а стрелками служат отображения

$$\Phi(\varphi)_* : \big(t\Phi(\varphi)\big)h_{\Phi(U)} \to th_{\Phi(V)}, \quad (t\varphi)\psi \mapsto t(\Phi(\varphi)\psi),$$

по одному для каждой стрелки $\varphi : U \to V$ категории $\mathcal{U}$ и каждого $t \in F(V)$.

Доказательство. Применим теор. 3.1 на стр. 35 к категории $\mathcal{C} = p\mathcal{S}h(W)$ и функтору

$$G : \mathcal{U} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{W}), \quad U \mapsto h_{\Phi(U)}.$$

В этом случае для каждого предпучка $S \in \mathrm{Ob}\,p\mathcal{S}h(\mathcal{W})$ предпучок $h_S^G \in \mathrm{Ob}\,p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$ является ни чем иным, как подъёмом Φ^*S предпучка S, поскольку по лемме Ионеды имеется функториальный по U и S изоморфизм

$$h_S^G(U) = \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{W})}\big(G(U), S\big) = \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{W})}\big(h_{\Phi(U)}, S\big) \simeq S\Phi(U).$$

Таким образом, функтор $h_*^G : p\mathcal{S}h(W) \to p\mathcal{S}h(U)$, $S \mapsto h_S^G$, это функтор подъёма $\Phi^* : S \mapsto S\Phi$. Согласно теор. 3.1 левый сопряжённый к нему функтор $\Phi_* = G^{\frown} : p\mathcal{S}h(\mathcal{U}) \to p\mathcal{S}h(\mathcal{W})$ переводит предпучок $F \in \mathrm{Ob}\,p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$ в копредел диаграммы GD_F, которая выглядит именно так, как указано в формулировке леммы. □

3.3.1. Прямой образ предпучка при непрерывном отображении. По определению, каждое непрерывное отображение топологических пространств $f : X \to Y$ задаёт функтор, действующий между их категориями открытых множеств в противоположном к f направлении

$$f^{-1} : \mathcal{U}(Y) \to \mathcal{U}(X), \quad U \mapsto f^{-1}(U).$$

Подъём предпучка $F : \mathcal{U}(X)^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на пространстве X вдоль этого функтора называется *прямым образом*[1] предпучка F и обозначается

$$f_*F \stackrel{\mathrm{def}}{=} (f^{-1})^*F = F \circ f^{-1} : \mathcal{U}(Y)^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et.$$

Множества его сечений над открытыми $U \subset Y$ суть $f_*F(U) \stackrel{\mathrm{def}}{=} F\left(f^{-1}(U)\right)$.

Упражнение 3.13. Проверьте, что прямой образ пучка тоже является пучком.

Например, когда $f : Z \hookrightarrow Y$ является вложением замкнутого подмножества, для любого предпучка абелевых групп F на Z слои

$$f_*F_y = \begin{cases} 0 & \text{при } y \notin Z \\ F_y & \text{при } y \in Z. \end{cases}$$

По этой причине пучок f_*F называется *продолжением нулём* на X пучка F с $Z \subset X$. Когда $f : U \hookrightarrow Y$ является вложением открытого подмножества и $F \in p\mathcal{S}h(U)$, слои f_*F_u над всеми точками $y \in U$ также совпадают со слоями F_u, однако над точками $x \notin U$ слои $f_*F_x = \mathrm{colim}_{W \ni x} F(U \cap W)$, вообще говоря, могут быть и ненулевыми.

[1] По-английски *direct image* или *push forward*.

3.3.2. Обратный образ предпучка при непрерывном отображении. Согласно лем. 3.2 функтор $f_* = (f^{-1})^*$ прямого образа предпучков вдоль непрерывного отображения $f : X \to Y$ обладает левым сопряжённым функтором. Этот функтор называется *обратным образом*[1] предпучков при отображении f и обозначается

$$f^* \stackrel{\text{def}}{=} (f^{-1})_* : \ p\mathcal{S}h(Y) \to p\mathcal{S}h(X)\,.$$

Для заданного предпучка F на Y предпучок f^*F на X является копределом диаграммы представимых предпучков, объекты которой имеют вид $sh_{f^{-1}(U)}$, по одному для каждого открытого $U \subset Y$ и каждого сечения $s \in F(U)$, а стрелки суть естественные преобразования $t|_U h_{f^{-1}(U)} \to th_{f^{-1}(W)}$, по одному для каждого вложения $U \hookrightarrow W$ открытых множеств в Y и каждого сечения $t \in F(W)$. Множества сечений этих предпучков над открытым множеством $V \subset X$ образуют диаграмму множеств, непустыми объектами которой являются одноточечные множества $sh_{f^{-1}(U)}(V)$, по одному для каждого открытого $U \supset f(V)$ в Y и каждого $s \in F(U)$, а стрелки переводят единственный элемент множества $t|_U h_{f^{-1}(U)}(V)$ в единственный элемент множества $th_{f^{-1}(W)}(V)$ для всех открытых $W \supset U \supset f(V)$ и всех $t \in F(W)$. Копредел такой диаграммы совпадает со слоем

$$\operatorname*{colim}_{U \supset f(V)} F(U) = F_{f(V)}$$

пучка F над множеством $f(V) \subset Y$. Поэтому, согласно сл. 2.2 на стр. 31 множество сечений предпучка f^*F над открытым $V \subset X$ это слой пучка F над (не обязательно открытым!) образом $f(V) \subset Y$ множества V:

$$f^*F(V) = F_{f(V)} = \operatorname*{colim}_{U \supset f(V)} F(U)\,. \tag{3-6}$$

В частности, в каждой точке $x \in X$ слой $f^*F_x = F_{f(x)}$.

Упражнение 3.14. Убедитесь непосредственно, что для любого предпучка F на Y множества (3-6) образуют предпучок на X и постройте естественную по $F \in p\mathcal{S}h(Y)$ и $G \in p\mathcal{S}h(X)$ биекцию $\mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}(f^*F, G) = \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(Y)}(F, f_* G)$.

Предостережение 3.2. Если предпучок F на Y является пучком, то его обратный образ f^*F, определённый по формуле (3-6), может и не быть пучком на X. Например, при отображении двухточечного множества (с дискретной топологией) в одноточечное обратным образом постоянного пучка является постоянный предпучок, а не постоянный пучок.

3.3.3. Пучковый обратный образ. По определению, *пучковым* обратным образом (пред)пучка F на топологическом пространстве Y при непрерывном отображении $f : X \to Y$ называется опучковывание f^*F^S предпучка f^*F на X, заданного формулой (3-6). Так как прямой образ любого пучка G на X является пучком[2] на Y и функтор опучковывания сопряжён слева к строго полному вложению категории пучков в категорию предпучков, имеют место канонические изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}h(X)}(f^*F^S, G) \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}(f^*F, G) \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(Y)}(F, f_* G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}h(Y)}(F, f_* G)\,,$$

[1] По-английски *pull back*.

[2] Согласно упр. 3.13 выше.

означающие, что пучковый обратный образ сопряжён слева к ограничению функтора прямого образа на подкатегорию пучков. Всюду, когда речь идёт о пучках, под обратным образом пучка понимается именно пучковый обратный образ, и индекс «s» в обозначении f^*F^s опускается, т. е.

$$\text{для пучков} \quad f^*F \stackrel{\text{def}}{=} f^*F^s .$$

Согласно n° 3.2 на стр. 39 сечениями пучкового обратного образа f^*F над открытым множеством $U \subset X$ являются такие занумерованные точками $x \in U$ семейства ростков $s_x \in F_{f(x)}$, что для каждой точки $u \in U$ имеются открытая окрестность $V \ni u$ точки u в U, открытая окрестность $W \supset f(V)$ образа окрестности V в Y, а также сечение $t \in F(W)$, класс которого в слое $F_{f(x)}$ равен s_x для всех $x \in V$.

Иначе пучковый обратный образ можно определить как пучок сечений канонической проекции $X \times_Y \mathcal{E}_F \to X$ послойного произведения топологических пространств $f : X \to Y$ и $\mathcal{E}_F \to Y$ над Y.

Упражнение 3.15. Для любого предпучка F на Y постройте в категории $\mathcal{T}op(X)$ функториальный по F изоморфизм $X \times_Y \mathcal{E}_F \simeq \mathcal{E}_{f^*F}$.

Обратите внимание, что пучковый обратный образ определён для любого предпучка и всегда является пучком. В частности, опучковывание F^s предпучка F на X можно воспринимать как пучковый обратный образ Id_X^*F при тождественном отображении.

3.3.4. Ограничение на открытые и замкнутые подмножества. В ситуации, когда $f : Q \hookrightarrow X$ является вложением открытого или замкнутого подмножества, функтор обратного образа $f^* : \mathcal{S}h(X) \to \mathcal{S}h(Q)$ называется *ограничением* пучков с X на Q.

Ограничение любого пучка множеств F с X на открытое подмножество $f : U \hookrightarrow X$ имеет над всеми открытыми $W \subset U$ те же множества сечений, что и пучок F, т. е. $f^*F(W) = F(W)$. В частности, для всех $x \in U$ слой $f^*F_x = F_x$.

При соблюдении подходящих условий конечности, ограничение пучков на замкнутые подмножества также ведёт себя интуитивно ожидаемым образом. Напомню, что топологическое пространство называется *компактным*, если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Топологическое пространство называется *локально компактным*, если у любой его точки есть открытая окрестность с компактным замыканием.

Упражнение 3.16. Убедитесь, что все открытые и замкнутые подмножества локально компактного пространства X тоже локально компактны, и в каждой открытой окрестности любого компакта $C \subset X$ есть компакт, для которого все точки из C являются внутренними.

Предложение 3.4

Пусть $f : Z \hookrightarrow X$ это вложение компактного замкнутого подмножества Z в локально компактное топологическое пространство X. Тогда для любого пучка множеств F на X множество глобальных сечений пучка f^*F на Z находится в естественной биекции со слоем пучка F над Z, т. е. $f^*F(Z) \simeq F_Z$.

Доказательство. Поскольку сечения пучка F над всеми открытыми $U \supset Z$ ограничиваются в глобальные сечения пучка f^*F, имеется канонический морфизм

$$\varphi : F_Z = \lim_{U \supset Z} F(U) \to f^*F(Z) . \tag{3-7}$$

Если ростки сечений $s \in F(U)$ и $t \in F(W)$ над открытыми $U, W \supset Z$ совпадают в слоях F_z над всеми точками $z \in Z$, то у каждой точки z найдётся открытая в X окрестность $V_z \ni z$, на которую оба сечения ограничиваются одинаково: $s|_{V_z} = t|_{V_z}$. Беря объединение всех этих окрестностей, мы получаем открытое множество $V \supset Z$ с $s|_V = t_V$, что влечёт совпадение классов сечений s и t в слое F_Z и тем самым доказывает инъективность морфизма (3-7). Чтобы установить его сюрьективность, рассмотрим произвольное сечение $s \in f^*F(Z)$. Для каждой точки $z \in Z$ найдутся компактная окрестность[1] C_z точки z в пространстве Z, открытое в X множество $V_z \supset C_z$ и сечение $s_z \in F(V_z)$, класс которого во всех слоях F_x над точками $x \in C_z$ совпадает с классом сечения s. Выберем конечное множество $C_{z_1}, C_{z_2}, \dots, C_{z_n}$ покрывающих Z компактов C_z. Достаточно построить открытое в X множество $W \supset Z$ и сечение $t \in F(W)$, которое при каждом i ограничивается на некоторое открытое в V_{z_i} подмножество $V \supset C_i$ точно также, как и сечение s_{z_i}. Тогда образом класса сечения t в слое F_Z при морфизме (3-7) будет в точности сечение s.

Индукция по n сводит построение к случаю $n = 2$: достаточно для любой пары компактных подмножеств $C_1, C_2 \subset X$ и сечений $s_1 \in F(V_1)$, $s_2 \in F(V_2)$, заданных на открытых в X множествах $V_1 \supset C_1$, $V_2 \supset C_2$ и имеющих равные ростки в слоях F_x над всеми точками $x \in C_1 \cap C_2$, построить открытое в X множество $W \supset C_1 \cup C_2$ и сечение $t \in F(W)$, которое ограничивается на какие-либо открытые в V_i подмножества $W_i \supset C_i$ точно также, как сечение s_i. Рассуждение, использованное при доказательстве инъективности морфизма (3-7), позволяет построить открытое в $V_1 \cap V_2$ подмножество $V \supset C_1 \cap C_2$ и такое сечение $t_V \in F(V)$, что $s_1\big|_V = s_2\big|_V = t_V$. По той же причине и в силу упр. 3.16 непересекающиеся друг с другом компакты $C_i \smallsetminus V$ обладают непересекающимися друг с другом открытыми в V_i окрестностями $U_i \supset (C_i \smallsetminus V)$, над которыми существуют сечения $t_i \in F(U_i)$ с $s_i\big|_{U_i} = t_i$. Поскольку сечения t_1, t_V, t_2 согласованы на непустых пересечениях $U_1 \cap V$ и $V \cap U_2$, а пересечение $U_1 \cap U_2$ пусто, над объединением $W = U_1 \cup V \cup U_2$ эти три сечения однозначно склеиваются в искомое сечение $t \in F(W)$. □

[1] Т. е. компакт, содержащий некоторую открытую окрестность точки z.