Спектральные последовательности.

ПГА5◇1. Точная диаграмма модулей

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[rr, "i_1"] & & D_1 \arrow[dl, "j_1"] \\ & E_1 \arrow[ul, "k_1"] & \end{tikzcd}$$

обозначается $(D_1, E_1, i_1, j_1, k_1)$ и называется *точной парой*[1]. Положим $d_1 = j_1 k_1$, $E_2 = \ker d_1 / \operatorname{im} d_1$, $D_2 = \operatorname{im} i_1$, $i_2 = i_1\big|_{\operatorname{im} i_1}$, $j_2 : i_1(x) \mapsto j_1(x)$ и $k_2 : x \,(\operatorname{mod} \operatorname{im} d_1) \mapsto k_1(x)$. Покажите, что **а)** $d_1^2 = 0$, j_2 и k_2 определены корректно, а $(D_2, E_2, i_2, j_2, k_2)$ является точной парой (она называется *производной* от $(D_1, E_1, i_1, j_1, k_1)$) **б)** в $(r-1)$-той производной паре $(D_r, E_r, i_r, j_r, k_r)$ модули $D_r = \operatorname{im} i_1^{r-1}$ и $E_r = k_1^{-1}(\operatorname{im} i_1^{r-1}) / j_1(\ker i_1^r)$ включаются в точную тройку $0 \to \operatorname{im} i_1^{r-1} / \operatorname{im} i_1^r \to E_r \to \ker i_1^r / \ker i_1^{r-1} \to 0$

ПГА5◇2. Пусть модули $D_1 = \bigoplus\limits_{p,q\in\mathbb{Z}} D_1^{p,q}$ и $E_1 = \bigoplus\limits_{p,q\in\mathbb{Z}} E_1^{p,q}$ биградуированы, а морфизмы однородны бистепеней $\deg i_1 = (-1, 1)$, $\deg j_1 = (0, 0)$ и $\deg k_1 = (1, 0)$. Разместим модули $E_r^{p,q}$ из $(r-1)$-той прозводной $(D_r, E_r, i_r, j_r, k_r)$ от начальной точной пары $(D_1, E_1, i_1, j_1, k_1)$ в прямоугольную таблицу с горизонтальной координатой p и вертикальной q. Пусть $E_1^{p,q} = 0$ при $q \ll 0$ равномерно по p и при $p \ll 0$ равномерно по q. Покажите, что для каждой клетки (p, q) найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что $\forall\, r > N$ $E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q}$, и опишите $E_\infty^{p,q}$ как подфактор в D_1 в терминах ядер и/или образов итерированного гомоморфизма $i_1 : D_1 \to D_1$ (см. диаграмку ниже).

$$\begin{tikzcd}
D^{p-1,q+2} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q+2} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q+2} \arrow[r, "j"] & E^{p,q+2} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q+2} \arrow[r, "j"] & E^{p+1,q+2} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q+2} \\
D^{p-1,q+1} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q+1} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q+1} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p,q+1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q+1} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p+1,q+1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q+1} \arrow[ull, "i"] \\
D^{p-1,q} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p,q} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p+1,q} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q} \arrow[ull, "i"] \\
D^{p-1,q-1} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q-1} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q-1} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p,q-1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q-1} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p+1,q-1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q-1} \arrow[ull, "i"]
\end{tikzcd}$$

Предел. Пусть $\forall\, p, q$ существует такое $N = N(p, q)$, что входящий в клетку (p, q) и выходящий из клетки (p, q) дифференциалы во всех таблицах $E_r^{p,q}$ с $r > N$ зануляются, так что корректно определены $E_\infty^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} E_{N+1}^{p,q} = E_{N+2}^{p,q} = \dots$. Если существуют модули E_∞^n с такими убывающими фильтрациями $F^p E_\infty^n$, что $E_\infty^n = \bigcup\limits_p F^p E_\infty^n$, $\bigcap\limits_p F^p E_\infty^n = 0$ и $F^p E_\infty^n / F^{p+1} E_\infty^n = E_\infty^{p,n-p}$, то говорят, что $E_r^{p,q}$ *сходятся* к E_∞^n и пишут $E_r^{p,q} \Rightarrow E_\infty^n$.

ПГА5◇3. Пусть каждый член K^m комплекса $\cdots \to K^m \to K^{m+1} \to \cdots$ снабжён конечной убывающей фильтрацией $K^m = F^0 K^m \supset F^1 K^m \supset F^2 K^m \supset \cdots \supset 0$ с $d(F^p K^m) \subset F^p K^{m+1}$ при всех p, m. Покажите, что: **а)** при каждом p корректно определён фактор комплекс $G^p K$ с m-тым членом $F^p K^m / F^{p+1} K^m$ и дифференциалом, индуцированным дифференциалом d исходного комплекса K **б)** модули $D_1^{p,q} = H^{p+q}(F^p K)$ и $E_1^{p,q} = H^{p+q}(G^p K)$ организуются в биградуированную точную пару с r-той производной $E_{r+1}^{p,q} \simeq Z_r^{p,q} / \left(B_r^{p,q} \cap Z_r^{p,q}\right) \simeq \left(Z_r^{p,q} + B_r^{p,q}\right) / B_r^{p,q}$, где $Z_r^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \{c \in F^p K^{p+q} \mid dc \in d\left(F^{p+r} K^{p+q}\right)\}$ и $B_r^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} d\left(F^{p-r} K^{p+q-1}\right) + F^{p+1} K^{p+q}$ **в)** $E_r^{p,q} \Rightarrow H^n(K)$.

ПГА5◇4. Рассмотрите на тотальном комплексе $\operatorname{Tot}(K)$ бикомплекса $K = \bigoplus K^{p,q}$ две фильтрации ${}^{I}F$ и ${}^{II}F$, имеющие ${}^{I}F^p \operatorname{Tot}^m(K) = \bigoplus\limits_{\substack{\nu \geqslant p \\ p+q=n}} K^{p,q}$ и ${}^{II}F^q \operatorname{Tot}^m(K) = \bigoplus\limits_{\substack{\nu \geqslant q \\ p+q=n}} K^{p,q}$ и получите пару спектралок: ${}^{I}E_r^{p,q} \Rightarrow H^n(\operatorname{Tot}(K))$ с ${}^{I}E_2^{p,q} = H_{d_1}^p(H_{d_2}^q(K))$ и ${}^{II}E_r^{p,q} \Rightarrow H^n(\operatorname{Tot}(K))$ с ${}^{II}E_2^{p,q} = H_{d_2}^q(H_{d_1}^p(K))$.

[1] По-английски *exact couple*.

Персональный табель ________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 5 (6.03.2017)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2			
3а			
б			
в			
4			