§5. Элементы гомологической алгебры

5.1. Исчисление градуированных объектов. Под *градуированным K-модулем* мы понимаем прямую сумму K-модулей $V = \bigoplus_{\nu\in\mathbb{Z}} V^\nu$, элементы которой суть *конечные* суммы вида $v_{\nu_1} + v_{\nu_2} + \dots + v_{\nu_m}$, в которых каждый $v_d \in V^d$. Векторы $v_d \in V^d$ называются *однородными* степени d, и степень однородного вектора обозначается $|v_d| \overset{\text{def}}{=} d$. Если компоненты $V^d = 0$ при всех $d \ll 0$ (соотв. при всех $d \gg 0$) градуированный модуль V называется *ограниченным слева* (соотв. *справа*). Через $V[k]$ обозначается градуированный модуль с компонентами $V[k]^\nu \overset{\text{def}}{=} V^{\nu+k}$.

Гомоморфизм градуированных модулей $f : V \to W$ называется *однородным* степени m, если $f(V^\nu) \subset W^{\nu+m}$ при всех ν. Например, *сдвиг градуировки* $s : V \to V[1]$, тождественно действующий на элементы модуля: $s(v) \overset{\text{def}}{=} v$, однороден степени -1. Все K-линейные гомоморфизмы $V \to W$ образуют градуированный K-модуль

$$\mathrm{GrHom}(V,W) = \bigoplus_\nu \mathrm{GrHom}^\nu(V,W)\,, \tag{5-1}$$

компонента степени ν которого состоит из однородных гомоморфизмов ν-той степени. Поскольку при композиции однородных гомоморфизмов $|fg| = |f| + |g|$, эндоморфизмы градуированного модуля V образуют *градуированную алгебру* $\mathrm{GrEnd}(V)$, в которой $\mathrm{GrEnd}^\nu(V) \cdot \mathrm{GrEnd}^\mu(V) \subset \mathrm{GrEnd}^{\nu+\mu}(V)$.

Тензорное произведение[1] $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ градуированных модулей V_i определяется как градуированный модуль с компонентами

$$\left(V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n\right)^\nu \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{\sum \nu_i = \nu} V_1^{\nu_1} \otimes V_2^{\nu_2} \otimes \dots \otimes V_n^{\nu_n}\,.$$

5.1.1. Кошулево правило знаков. При работе с градуированными модулями мы по умолчанию используем так называемые s-версии[2] стандартных полилинейных операций линейной алгебры, которые получаются из обычных применением *кошулева правила знаков*: если некая операция над буквами $f_1, f_2, \dots, f_n$ определяется в неградуированной теории как линейная комбинация (некоммутативных) мономов от этих букв, в которой все мономы отличаются друг от друга перестановками букв, то в s-версии такой операции каждая транспозиция букв f_ν и f_μ дополнительно сопровождается умножением соответствующего монома на $(-1)^{|f_\nu|\cdot|f_\mu|}$. Например, *s-коммутатор* однородных эндоморфизмов градуированного модуля определяется как

$$[f,g] \overset{\text{def}}{=} f \circ g - (-1)^{|f||g|} g \circ f\,,$$

а *s-правило Лейбница* для однородного оператора F на градуированной алгебре выглядит так:

$$F(ab) = (Fa)b + (-1)^{|F|\cdot|a|} a(Fb)\,.$$

Аналогично, результат применения тензорного произведения $f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_n$ однородных гомоморфизмов $f_i : V_i \to V_i$ к тензорному моному

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \in V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$$

[1] По умолчанию, все тензорные произведения берутся в категории K-модулей.

[2] Т. е. подкрученные на знак (*sign*) или, как ещё говорят, *супер-* (или *skew-*) версии тензорных операций.

из однородных векторов v_i определяется как

$$f_1 \otimes \dots \otimes f_m \left(v_1 \otimes \dots \otimes v_m\right) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\varepsilon} f_1(v_1) \otimes \dots \otimes f_m(v_m), \tag{5-2}$$

где $\varepsilon = |f_m|\big(|v_1| + \dots + |v_{m-1}|\big) + |f_{m-1}|\big(|v_1| + \dots + |v_{m-2}|\big) + \dots + |f_2||v_1|$. Аналогично вычисляется и композиция тензорных мономов от гомоморфизмов:

$$\big(f_1 \otimes \dots \otimes f_m\big) \circ \big(g_1 \otimes \dots \otimes g_m\big) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\varepsilon} (f_1 \circ g_1) \otimes \dots \otimes (f_m \circ g_m) \tag{5-3}$$

где $\varepsilon = |f_m|\big(|g_1| + \dots + |g_{m-1}|\big) + |f_{m-1}|\big(|g_1| + \dots + |g_{m-2}|\big) + \dots + |f_2||g_1|$.

5.1.2. Комплексы и (ко)гомологии. Градуированный K-модуль V, оснащённый однородным K-линейным оператором $d : V \to V$ степени $|d| = 1$ с $d^2 = 0$ называется *комплексом*. Действие оператора d удобно изображать диаграммой

$$\dots \xrightarrow{d} V^{\nu-1} \xrightarrow{d} V^{\nu} \xrightarrow{d} V^{\nu+1} \xrightarrow{d} \dots . \tag{5-4}$$

Равенство $d^2 = 0$ означает, что $\ker d \supset \operatorname{im} d$. Оператор d с таким свойством называется *дифференциалом*. Фактор модуль $H(V) \stackrel{\text{def}}{=} \ker d / \operatorname{im} d$ называется *модулем когомологий* комплекса V. Он естественно градуирован:

$$H(V) = \bigoplus H^{\nu}(V), \quad \text{где} \quad H^{\nu}(V) = \frac{\ker\left(d : V^{\nu} \to V^{\nu+1}\right)}{\operatorname{im}\left(d : V^{\nu-1} \to V^{\nu}\right)} .$$

Элементы из $\ker d$ называются *коциклами*, а элементы из $\operatorname{im} d$ — *кограницами*. Если $H(V) = 0$, т. е. $\ker d = \operatorname{im} d$, комплекс V называется *точным* или *ацикличным*.

Замечание 5.1. Формально, комплекс можно определить в любой категории как последовательность стрелок (5-4) со свойством $d^2 = 0$, а когомологии комплекса — в любой точной категории. Все обсуждаемые в этом параграфе свойства когомологий справедливы для любой абелевой категории.

Замечание 5.2. Иногда бывает удобно считать, что степень дифференциала не $+1$, а -1. В этом случае однородные компоненты комплекса принято нумеровать нижними индексами, а дифференциал обозначать буквой ∂, так что диаграмма (5-4) превращается в $\dots \xrightarrow{\partial} V_{\nu+1} \xrightarrow{\partial} V_{\nu} \xrightarrow{\partial} V_{\nu-1} \xrightarrow{\partial} \dots$. Соответствующие факторы

$$H_{\nu}(V) = \frac{\ker\left(\partial : V_{\nu} \to V_{\nu-1}\right)}{\operatorname{im}\left(\partial : V_{\nu+1} \to V_{\nu}\right)}$$

называют *гомологиями*, элементы из $\ker \partial$ — *циклами*, а элементы из $\operatorname{im} \partial$ — *границами*[1]. Одни обозначения превращаются в другие формальной сменой знака у всех индексов с одновременным их опусканием или поднятием.

Пример 5.1 (цепной комплекс симплициального множества)
Пусть $X : \Delta^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ — симплициальное множество[2], и K-произвольное коммутативное кольцо. Обозначим через $C_n = C_n(X, K) \stackrel{\text{def}}{=} K \otimes X_n$ свободный K-модуль с базисом

[1] И только комплексы так и остаются комплексами ☺

[2] См. прим. 1.7 на стр. 8.

$X_n = X([n])$. Он называется модулем *n-мерных цепей* симплициального множества X с коэффициентами из K. Линейный оператор $\partial : C_n \to C_{n-1}$, действие которого на базисный вектор $x \in X_n$ задаётся правилом

$$\partial x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i X(\partial_i) x \,, \tag{5-5}$$

где $\partial_i : [n-1] \hookrightarrow [n]$ — возрастающее вложение, не содержащее в образе числа i, называется *граничным оператором*. Он сопоставляет ориентированному симплексу его ориентированную границу[1] и имеет $\partial^2 = 0$.

Упражнение 5.1. Убедитесь в этом.

Комплекс (C, ∂) называется *цепным комплексом*, а его гомологии — *гомологиями* симплициального множества X с коэффициентами в K. В случае, когда $X = S(\mathcal{X})$ является множеством сингулярных симплексов[2] топологического пространства $\mathcal{X}$, эти гомологии называются *сингулярными гомологиями* топологического пространства $\mathcal{X}$ с коэффициентами в K и обозначаются $H_n(\mathcal{X}, K)$. Аналогичная конструкция имеет смысл и для полусимплициальных множества $X : \Delta_{\mathrm{s}}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$. Получающиеся при этом гомологии называют *симплициальными гомологиями* соответствующего триангулированного пространства $|X|$.

Упражнение 5.2. Вычислите симплициальные гомологии тора из прим. 1.6 на стр. 7, триангулированного как на рис. 1◇1 и рис. 1◇2 на стр. 7.

Пример 5.2 (тензорное произведение комплексов)
На тензорном произведении $U \otimes V$ комплексов U и V имеется каноническая структура комплекса с дифференциалом

$$d = d_{U \otimes V} \stackrel{\text{def}}{=} d_U \otimes 1 + 1 \otimes d_V \,. \tag{5-6}$$

Равенство $d^2 = 0$ обеспечивается кошулевым правилом знаков, согласно которому

$$(1 \otimes d_V) \circ (d_U \otimes 1) = -d_U \otimes d_V \,,$$

ибо $|d_U| = |d_V| = 1$. Поэтому $d^2 = d_U^2 \otimes 1 + d_U \otimes d_V - d_U \otimes d_V + 1 \otimes d_V^2 = 0$. Отметим, что в силу того же правила знаков результат применения обеих частей формулы (5-6) к однородным элементам выглядит так:

$$d(u \otimes v) = (d_U \otimes 1)(u \otimes v) + (1 \otimes d_V)(u \otimes v) = (d_U u) \otimes v + (-1)^{|v|} v \otimes (d_V v) \,.$$

Аналогично определяется тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_m$ любого множества комплексов. Дифференциал на нём продолжает дифференциалы $d_i : V_i \to V_i$ по s-правилу Лейбница и равен

$$d_{\otimes V_i} = \sum_{i=1}^{m} 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes d_i \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$$

(отдельные слагаемые написанной суммы перемножаются и применяются к элементам с учётом кошулева правила знаков).

[1] Например, границей треугольника будет его контур, обходимый в порядке возрастания номеров вершин.

[2] См. прим. 2.3 на стр. 22.

5.1.3. Мультикомплексы. Мы называем *m-комплексом* $\mathbb{Z}^m$-градуированный K-модуль $V = \bigoplus_{\mu\in\mathbb{Z}^m} V^\mu$, на котором заданы однородные K-линейные дифференциалы

$$d_1, d_2, \dots, d_m : V \to V,$$

степенями которых являются стандартные базисные векторы в $\mathbb{Z}^m$, т. е.

$$d_i(V^\mu) \subset V^{\mu_1,\dots,\mu_{i-1},\mu_i+1,\mu_{i+1},\dots,\mu_m}$$

и которые удовлетворяют соотношениям грассмановой алгебры с m образующими, т. е. $d_i d_j + d_j d_i = 0$ и $d_i^2 = 0$ для всех i, j. Чаще всего мы будем иметь дело с *бикомплексами* $V = \bigoplus_{p,q} V^{p,q}$, на которых действует пара дифференциалов $d_1, d_2 : V \to V$, таких что $d_1^2 = 0$, $d_2^2 = 0$, $d_1 d_2 = -d_2 d_1$, $d_1(V^{p,q}) \subset V^{p+1,q}$, $d_2(V^{p,q}) = V^{p,q+1}$.

С каждым m-комплексом V можно связать обычный $\mathbb{Z}$-градуированный комплекс $\operatorname{Tot} V$, называемый *свёрткой* или *тотальным комплексом* m-комплекса V и имеющий

$$\operatorname{Tot}^\nu V \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{\sum \mu_i = \nu} V^{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_m} \quad \text{и} \quad d_{\operatorname{Tot}} = \sum d_i : \operatorname{Tot}^\nu V \to \operatorname{Tot}^{\nu+1} V.$$

Например, попарные тензорные произведения $U^p \otimes W^q$ однородных компонент комплексов (U, d_U) и (W, d_W) образуют бикомплекс с дифференциалами $d_1 = d_U \otimes 1_W$ и $d_2 = 1_U \otimes d_W$, и тензорное произведение комплексов $U \otimes V$ из предыдущего прим. 5.2 представляет собою тотальный комплекс этого бикомплекса.

Упражнение 5.3. Убедитесь, что для любых двух комплексов (U, d_U) и (W, d_W) модули $H^{p,q} = \operatorname{Hom}(U^{-p}, W^q)$ образуют бикомплекс с дифференциалами

$$d_1 : \varphi \mapsto (-1)^{q+p} \varphi \circ \partial_U \quad \text{и} \quad d_2 : \varphi \mapsto \partial_W \circ \varphi.$$

5.2. Категории комплексов. В гомологической алгебре рассматриваются три разных категории комплексов с одним и тем же классом объектов — комплексами K-модулей, но с разными классами морфизмов.

5.2.1. DG-категория комплексов. Аддитивная категория $\mathcal{C}$, в которой на каждом множестве стрелок $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ имеется структура комплекса, а дифференциалы композиций вычисляются по s-правилу Лейбница:

$$d(\varphi \circ \psi) = (d\varphi) \circ \psi + (-1)^{|\varphi|} \varphi \circ (d\psi) \tag{5-7}$$

называется *дифференциальной градуированной* (или *DG*-) категорией. Примером такой категории является *DG-категория комплексов*, объектами которой являются комплексы K-модулей (V, d_V), а морфизмами из (U, d_U) в (W, d_W) являются произвольные K-линейные гомоморфизмы $U \to W$, образующие градуированный модуль (5-1)

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{DG}}(V, W) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{GrHom}(V, W) = \bigoplus_\nu \operatorname{GrHom}^\nu(V, W) \tag{5-8}$$

с дифференциалом $d : \operatorname{GrHom}^\nu(V, W) \to \operatorname{GrHom}^{\nu+1}(V, W)$, переводящим однородный морфизм $\psi : V \to W$ в его s-коммутатор с дифференциалами:

$$\psi \mapsto [d, \psi] \overset{\text{def}}{=} d_W \circ \psi - (-1)^{|\psi|} \psi \circ d_V.$$

Упражнение 5.4. Убедитесь, что комплекс $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(V,W)$ является свёрткой бикомплекса $\mathrm{Hom}(U^p,W^q)$ из упр. 5.3, и проверьте, что $d^2 = 0$ и что дифференциал композиции вычисляется по s-правилу Лейбница (5-7).

Мы будем использовать обозначение $\mathrm{Hom}^\nu_{\mathrm{DG}}(V,W) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{GrHom}^\nu(V,W)$ для однородных компонент комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(V,W)$.

5.2.2. Просто категория комплексов обозначается $\mathcal{C}om$ и имеет морфизмами K-линейные отображения степени нуль, перестановочные с дифференциалами:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}om}(V,W) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}^0_{\mathrm{DG}}(V,W) \cap \ker d = \{\varphi : V \to W \mid \forall \nu\ \varphi(V^\nu) \subset W^\nu \ \&\ d_W\varphi = \varphi d_V\}\,.$$

Такие отображения называются *морфизмами комплексов*. Очевидно, что морфизмы комплексов образуют абелеву подгруппу в $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(V,W)$. Прямая сумма $V \oplus W$ комплексов U и V определяется как их прямая сумма в категории градуированных K-модулей, т. е. имеет $U^\nu \oplus W^\nu$ в качестве компоненты степени ν, и снабжается дифференциалом $d_U \oplus d_W$. Таким образом, категория комплексов аддитивна. Ядро и коядро морфизма комплексов $\varphi : V \to W$ тоже определяются как ядро и коядро в категории градуированных K-модулей и снабжаются дифференциалами, индуцированными дифференциалами комплексов V и W соответственно.

Упражнение 5.5. Убедитесь, что $\ker \varphi_\nu \subset V^\nu$ образуют подкомплекс[1] в V, а дифференциал d_W корректно задаёт структуру комплекса на факторе $W/\varphi(V)$.

Поскольку в категории градуированных модулей[2] выполняется основная теорема о строении гомоморфизма, она выполняется и в категории комплексов. Таким образом, категория комплексов абелева. Точно так же проверяется, что и для любой абелевой категории $\mathcal{A}$ категория $\mathcal{C}om(\mathcal{A})$ комплексов из объектов категории $\mathcal{A}$ тоже абелева.

Предложение 5.1
Каждый морфизм комплексов $\varphi : V \to W$ корректно задаёт морфизм когомологий $\varphi_* : H(V) \to H(W)$, переводящий класс коцикла ξ в класс коцикла $\varphi(\xi)$.

Доказательство. Если $d_V\xi = 0$, то и $d_W\varphi\xi = \varphi d_V\xi = 0$, т. е. $\varphi(\xi)$ является коциклом. При замене коцикла ξ на когомологичный коцикл $\xi + d_V\zeta$ образ $\varphi(\xi + d_V\zeta) = \varphi(\xi) + \varphi(d_V\zeta) = \varphi(\xi) + d_W(\varphi(\zeta))$ когомологичен образу $\varphi(\xi)$. □

Предложение 5.2
С любой точной тройкой комплексов $0 \to U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W \to 0$ функториально[3] связана длинная точная последовательность когомологий

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_*} H^i(V) \xrightarrow{\psi_*} H^i(W) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(U) \xrightarrow{\varphi_*} H^{i+1}(V) \xrightarrow{\psi_*} \cdots\,, \tag{5-9}$$

в которой *связывающий гомоморфизм* $\delta : H^i(W) \to H^{i+1}(U)$ индуцирован дифференциалом комплекса V, т. е. переводит когомологический класс коцикла $\psi(\eta) \in \ker d_W$ в когомологический класс коцикла $d_V(\eta) \in \ker d_U$.

[1] т. е. d_V переводит $\ker \varphi_\nu$ в $\ker \varphi_{\nu+1}$

[2] с сохраняющими градуировку гомоморфизмами K-модулей в качестве стрелок

[3] в том смысле, что сопоставление точной тройке её длинной последовательности когомологий является функтором из категории точных трёхчленных комплексов в категорию точных комплексов (в качестве стрелок в обеих категориях рассматриваются морфизмы комплексов)

Доказательство. Корректность определения гомоморфизма δ проверяется ползаньем по коммутативной диаграмме с точными строками

$$\begin{tikzcd}
{} & {} & {} \\
U^{i+1} \arrow[u, "d_U"'] \arrow[r, hook, "\varphi"] & V^{i+1} \arrow[u, "d_V"'] \arrow[r, two heads, "\psi"'] & W^{i+1} \arrow[u, "d_W"'] \\
U^{i} \arrow[u, "d_U"'] \arrow[r, hook, "\varphi"] & V^{i} \arrow[u, "d_V"'] \arrow[r, two heads, "\psi"'] & W^{i} \arrow[u, "d_W"'] \arrow[llu, dotted, "\delta"] \\
U^{i-1} \arrow[u, "d_U"'] \arrow[r, hook, "\varphi"] & V^{i-1} \arrow[u, "d_V"'] \arrow[r, two heads, "\psi"'] & W^{i-1} \arrow[u, "d_W"'] \arrow[llu, dotted, "\delta"] \\
{} \arrow[u, "d_U"'] & {} \arrow[u, "d_V"'] & {} \arrow[u, "d_W"']
\end{tikzcd}$$

Упражнение 5.6. Убедитесь, что при $d_W\psi\eta = 0$ образ $d_V(\eta)$ лежит в $\ker d_U \subset U \subset V$ и не меняется при добавлении к η кограницы, а при $\psi\eta_1 = \psi\eta_2$ их образы $d_V(\eta_1)$ и $d_V(\eta_2)$ когомологичны в U.

Функториальная зависимость морфизмов φ_*, ψ_* и δ от точной тройки очевидна из их конструкции, как и то, что последовательность (5-9) является комплексом. Проверку его точности мы оставляем читателю. □

Упражнение 5.7. Проверьте точность последовательности (5-9).

Определение 5.1 (сдвиг градуировки)
Функтор сдвига $S : \mathcal{C}om \to \mathcal{C}om$, $V \mapsto SV = V[1]$, действует на комплекс по правилу $SV^\nu = V^{\nu+1}$, $d_{SV} = -d_V$, так что *отображение сдвига* $s : V \to V[1]$, тождественно действующее на элементы и лежащее в $\mathrm{Hom}^{-1}_{\mathrm{DG}}(V, V[1])$, s-коммутирует с дифференциалом: $[d, s] = d_{SV}s + sd_V = 0$. Действие функтора S на морфизмы тождественно. Функтор S обратим. Его итерации обозначаются $S^kV = V[k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 5.3 (конус морфизма)
С каждым морфизмом комплексов $\varphi : U \to W$ функториально связан сосредоточенный в двух столбцах с номерами -1 и 0 бикомплекс

$$\begin{tikzcd}
{} & {} \\
U^{i+1} \arrow[u, "-d_U"] \arrow[r, "\varphi"] & W^{i+1} \arrow[u, "d_W"'] \\
U^{i} \arrow[u, "-d_U"] \arrow[r, "\varphi"] & W^{i} \arrow[u, "d_W"'] \\
U^{i-1} \arrow[u, "-d_U"] \arrow[r, "\varphi"] & W^{i-1} \arrow[u, "d_W"'] \\
{} \arrow[u, "-d_U"] & {} \arrow[u, "d_W"']
\end{tikzcd} \tag{5-10}$$

свёртка которого называется *конусом* морфизма φ и обозначается $\mathrm{Con}(\varphi)$. Как градуированный модуль $\mathrm{Con}(\varphi) \simeq U[1] \oplus W$ имеет $\mathrm{Con}^i(\varphi) = U^{i+1} \oplus W^i$, но дифференциал

$$d_{\mathrm{Con}(\varphi)} : U[1] \oplus W \to U[1] \oplus W, \quad \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -d_U & 0 \\ \varphi & d_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \tag{5-11}$$

не равен прямой сумме дифференциалов. Комплекс $W \subset \mathrm{Con}(\varphi)$ является подкомплексом в $\mathrm{Con}(\varphi)$ и фактор $\mathrm{Con}(\varphi)/W \simeq V[1]$, однако точная тройка комплексов

$$0 \to W \xrightarrow{\iota_\varphi} \mathrm{Con}(\varphi) \xrightarrow{\pi_\varphi} U[1] \to 0, \tag{5-12}$$

вообще говоря, *не расщепляется* в категории $\mathcal{C}om$. Длинная точная последовательность когомологий тройки (5-12) имеет вид

$$\cdots \to H^i(\mathrm{Con}\,\varphi) \xrightarrow{\pi_{\varphi_*}} H^{i+1}(U) \xrightarrow{\varphi_*} H^{i+1}(W) \xrightarrow{\iota_{\varphi_*}} H^{i+1}(\mathrm{Con}\,\varphi) \to \cdots, \tag{5-13}$$

и её связывающий гомоморфизм $\delta : H^i(U[1]) = H^{i+1}(U) \to H^{i+1}(W)$ совпадает с φ_*.

Упражнение 5.8. Убедитесь в этом.

5.2.3. Гомотопическая категория комплексов обозначается $\mathcal{H}o$ и имеет в качестве морфизмов нулевые когомологии комплексов $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}o}(V,W) \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^0\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(V,W)\right) = \frac{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}om}(V,W)}{\mathrm{im}\left(d : \mathrm{Hom}^{-1}_{\mathrm{DG}}(V,W) \to \mathrm{Hom}^0_{\mathrm{DG}}(V,W)\right)}.$$

Иначе говоря, морфизмы в гомотопической категории $\mathcal{H}o$ суть морфизмы комплексов $\varphi : V \to W$, рассматриваемые с точностью до сложения с морфизмами вида $[d,\gamma] = d_W\gamma - \gamma d_V$, где $\gamma : V \to W$ — любое K-линейное отображение степени -1. Морфизмы комплексов вида $[d,\gamma]$ называются *гомотопными нулю*. Морфизмы комплексов φ и ψ с гомотопной нулю разностью $\varphi - \psi = [d,\gamma]$ называются *гомотопными*, а отображение γ называется в этой ситуации *гомотопией* между φ и ψ, что записывается как $\varphi \underset{\gamma}{\sim} \psi$. Итак, морфизмы в категории $\mathcal{H}o$ это морфизмы комплексов с точностью до гомотопии.

Упражнение 5.9. Убедитесь, что гомотопные нулю морфизмы образуют двусторонний идеал в $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}om)$, т. е. $\varphi \underset{\gamma}{\sim} 0 \Rightarrow \varphi\psi \underset{\gamma\psi}{\sim} 0$ и $\eta\varphi \underset{\eta\gamma}{\sim} 0$ для всех таких стрелок $\psi, \eta \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}om)$, что композиции $\varphi\psi$ и $\eta\varphi$ определены.

Тем самым, композиция морфизмов корректно определена на классах гомотопных морфизмов, и $\mathcal{H}o$ действительно является категорией.

Гомотопный нулю морфизм $\varphi = d_W\gamma + \gamma d_V : V \to W$ задаёт нулевой морфизм когомологий $\varphi_* : H(V) \to H(W)$, т. к. для любого коцикла $\xi \in \ker d_V$ коцикл $\varphi(\xi) = d_W(\gamma\xi) + \varphi\gamma(d_V\xi) = d_W(\gamma\xi)$ является кограницей. Поэтому гомотопные морфизмы комплексов одинаково действуют на когомологиях. В частности, при вычислении когомологий произвольного комплекса $V \in \mathcal{C}om$ можно заменить этот комплекс любым другим комплексом W, изоморфным V в категории $\mathcal{H}o$ — когомологии у W будут те же, что и у V, хотя изоморфизма между V и W в категории $\mathcal{C}om$ при этом может и не быть.

Определение 5.2
Комплекс V называется *стягиваемым*, если $\mathrm{Id}_V \underset{\gamma}{\sim} 0$. Гомотопия γ между нулевым и тождественным эндоморфизмами называется *стягивающей гомотопией*.

Упражнение 5.10. Убедитесь, что в категории $\mathcal{H}o$ все стягиваемые комплексы изоморфны нулевому комплексу и, в частности, ацикличны.

Пример 5.4 (конус тождественного морфизма)
Конус $\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V)$ тождественного морфизма $\mathrm{Id}_V : V \to V$ стягиваем посредством стягивающей гомотопии $\gamma \in \mathrm{GrHom}^{-1}(\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V), \mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V))$, которая в терминах прямых разложений $\mathrm{Con}^i(\mathrm{Id}_V) = V^{i+1} \oplus V^i$ и $\mathrm{Con}^{i-1}(\mathrm{Id}_V) = V^i \oplus V^{i-1}$ задаётся матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, т. е. действует по правилу

$$\gamma_i : V^{i+1} \oplus V^i \to V^i \oplus V^{i-1}, \quad \begin{pmatrix} v_{i+1} \\ v_i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В самом деле, s-коммутатор $\left[d_{\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V)}, \gamma\right]$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -d_V & 0 \\ 1 & d_V \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -d_V & 0 \\ 1 & d_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d_V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & d_V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V)}.$$

5.3. Комплексы Кошуля. Рассмотрим коммутативное кольцо K и для произвольного элемента $f \in K$ обозначим через K_f двучленный комплекс

$$0 \to K \xrightarrow{f} K \to 0, \tag{5-14}$$

сосредоточенный в степенях 0 и 1, дифференциалом в котором является гомоморфизм умножения на $f: x \mapsto fx$. Когомологии комплекса K_f суть

$$H^0(K_f) = \mathrm{Ann}\, f = \{a \in K \mid af = 0\} \quad \text{и} \quad H^1(K_f) = K/(f).$$

Лемма 5.1
Любой комплекс K-модулей C вписывается в категории $\mathcal{C}om$ в точную тройку

$$0 \to C[-1] \hookrightarrow K_f \otimes C \twoheadrightarrow C \to 0 \tag{5-15}$$

которая производит длинную точную последовательность когомологий

$$\cdots \to H^i(C) \xrightarrow{f} H^i(C) \to H^i(K_f \otimes C) \to H^{i+1}(C) \xrightarrow{f} H^{i+1}(C) \to \cdots$$

со связывающим гомоморфизмом $\delta : H^i(C) \to H^{i+1}(C[-1]) = H^i(C)$, $[x] \mapsto [fx]$.

Доказательство. Комплекс $K_f \otimes C$ имеет компонентой степени k сумму

$$\left(K_f^0 \otimes C^k\right) \oplus \left(K_f^1 \otimes C^{k-1}\right) \simeq C^k \oplus C^{k-1},$$

и изоморфен свёртке двухстолбцового бикомплекса[1]

$$\begin{tikzcd}
\ & \ \\
C^{k+1} \arrow[u, "d_C"] \arrow[r, "f"] & C^{k+1} \arrow[u, "-d_C"'] \\
C^{k} \arrow[u, "d_C"] \arrow[r, "f"] & C^{k} \arrow[u, "-d_C"'] \\
C^{k-1} \arrow[u, "d_C"] \arrow[r, "f"] & C^{k-1} \arrow[u, "-d_C"'] \\
\ \arrow[u, "d_C"] & \ \arrow[u, "-d_C"']
\end{tikzcd}$$

в котором правый столбец является подкомплексом, изоморфным $C[-1]$, а фактор по нему изоморфен левому столбцу, т. е. C. Последнее утверждение следует прямо из предл. 5.2 на стр. 65. □

Следствие 5.1
Если $f \in K$ обратим, то комплекс $K_f \otimes C$ ацикличен для любого комплекса C. □

Пример 5.5 (комплекс Кошуля последовательности элементов)
Для конечной последовательности $f_1, f_2, \dots, f_m \in K$ тензорное произведение

$$K_{f_1 f_2 \cdots f_m} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\alpha=1}^{m} K_{f_\alpha}$$

двучленных комплексов (5-14) называется *комплексом Кошуля* этой последовательности. Комплекс Кошуля сосредоточен в степенях от 0 до m, и его компонента степени k является прямой суммой $\binom{m}{k}$ свободных модулей ранга 1:

$$K^{\otimes m} = K \otimes K \otimes \cdots \otimes K \simeq K\,,$$

которые биективно соответствуют грассмановым мономам $\xi_I = \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_k}$, если сопоставить такой моном базисному произведению $1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$ в котором k единиц степени 1 стоят в позициях $i_1, i_2, \dots, i_k$, а остальные $m-k$ единиц имеют степень нуль. Действие дифференциала комплекса на такое произведение $1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$ при этом совпадет с действием на моном ξ_I левого умножения на грассманову линейную форму $\xi = f_1\xi_1 + f_2\xi_2 + \cdots + f_m\xi_m$. Таким образом, комплекс Кошуля последовательности $f_1, f_2, \dots, f_m$ можно отождествить с комплексом

$$0 \to \Lambda^0(K^m) \xrightarrow{\xi} \Lambda^1(K^m) \xrightarrow{\xi} \cdots \xrightarrow{\xi} \Lambda^{m-1}(K^m) \xrightarrow{\xi} \Lambda^m(K^m) \xrightarrow{\xi} 0\,, \tag{5-16}$$

дифференциал в котором задаётся левым умножением на $\xi = \sum f_i \xi_i \in \Lambda^1(K^m)$.

[1] минусы справа обусловлены Кошулевым правилом знаков: в правом столбце

$$(\mathrm{Id} \otimes d_c)(1 \otimes c) = -1 \otimes (d_C c)\,,$$

поскольку в нём $|1| = 1$

Определение 5.3
Последовательность $f_1, f_2, \dots, f_m \in K$ называется *регулярной*, если класс элемента f_k не делит нуль в факторе $K/(f_{k+1}, f_{k+2}, \dots, f_m)$ при всех[1] $1 \leqslant k \leqslant m$.

Лемма 5.2
Если элементы $f_1, f_2, \dots, f_m \in K$ образуют регулярную последовательность, комплекс Кошуля (5-16) имеет

$$H^k(K_{f_1 f_2 \dots f_m}) \simeq \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant k \leqslant m-1 \\ K/(f_1, f_2, \dots, f_m) & \text{при } k = m\,. \end{cases}$$

В частности, если хоть один из элементов f_i обратим в K, комплекс Кошуля полностью ацикличен.

Доказательство. Индукция по m. Случай $m = 1$ очевиден. Если теорема верна для последовательности $f_2, f_3, \dots, f_m$, то по лем. 5.1 k-тая группа когомологий комплекса $K_{f_1 f_2 \dots f_m} = K_{f_1} \otimes K_{f_2 f_3 \dots f_m}$ при $0 \leqslant k \leqslant m-1$ зажата между двумя нулями:

$$0 = H^{k-1}\left(K_{f_2 f_3 \dots f_m}\right) \to H^k\left(K_{f_1 f_2 \dots f_m}\right) \to H^k\left(K_{f_2 f_3 \dots f_m}\right) = 0\,,$$

а m-тая группа является коядром умножения на f_1

$$\dots \to H^{m-1}\left(K_{f_2 f_3 \dots f_m}\right) \xrightarrow{f_1} H^{m-1}\left(K_{f_2 f_3 \dots f_m}\right) \to H^m\left(K_{f_1 f_2 \dots f_m}\right) \to 0$$

в фактор кольце $H^{m-1}\left(K_{f_2 f_3 \dots f_m}\right) = K/\left(f_2 f_3 \dots f_m\right)$. □

5.4. Спектральные последовательности. Рассмотрим последовательность таблиц $E_0, E_1, E_2, \dots$, клетки которых занумерованы целыми числами (p, q), где p увеличивается по горизонтали, а q по вертикали. Если при каждом r

- в клетках таблицы E_r располагаются модули $E_r^{p,q}$ и задан дифференциал d_r бистепени $(r, 1-r)$ по (p, q), действующий из клеток диагонали $p+q = n$ в клетки следующей диагонали $p + q = n + 1$ со сдвигом на r единиц вправо:
$$d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+1-r}\,, \quad d_r^2 = 0$$
- очередная таблица E_{r+1} состоит из когомологий предыдущей таблицы E_r:
$$E_{r+1}^{p,q} = \ker(d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+1-r})/d_r(E_r^{p-r,q-1+r})$$

то говорят, что эти таблицы образуют *спектральную последовательность*[2] когомологического типа[3]. Скажем, что спектральная последовательность *стабилизируется*, если содержимое каждой клетки с какого-то момента перестаёт меняться, т. е.

$$\forall\,(p, q)\;\exists\, N = N(p, q) : \forall\, r \geqslant N \quad d_r\left(E_r^{p,q}\right) = 0 \quad \text{и} \quad d_r\left(E_r^{p-r,q+r-1}\right) = 0\,. \tag{5-17}$$

[1]при $k = m$ это означает, что f_m не делит нуль в K

[2]В просторечии *спектралку*.

[3]В спектралке гомологического типа таблицы нумеруют верхним индексом: $E^0, E^1, E^2, \dots$ и заполняют модулями $E^r_{p,q}$ с дифференциалами $\partial_r : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ бистепени $(-r, r-1)$, бьющими из клеток диагонали $p + q = n$ в клетки предыдущей диагонали $p + q = n - 1$ со сдвигом на r единиц в влево.

Например, такое заведомо происходит, когда в одной из таблиц E_r на каждой диагонали $p+q = \mathrm{const}$ имеется лишь конечное число ненулевых модулей. Если спектральная последовательность стабилизируется, то модуль $E_r^{p,q}$ с $r \geqslant N(p,q)$ из условия (5-17) обозначается $E_\infty^{p,q}$ и называется *предельным*. В этой ситуации говорят, что спектралка *сходится* к градуированным модулям

$$E_\infty^n \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{p+q=n} E_\infty^{p,q}$$

и пишут $E_r^{p,q} \Rightarrow E_\infty^n$. Спектральные последовательности являются основным инструментом для получения информации о когомологиях комплексов, тем или иным способом «собранных» из более элементарных комплексов. Простейшим примером этой ситуации является

Предложение 5.3 (спектральная последовательность фильтрованного комплекса) Пусть комплекс C обладает такой убывающей системой подкомплексов[1] $F^pC \subseteq C$,

$$C \supseteq \cdots \supseteq F^{p-1}C \supseteq F^pC \supseteq F^{p+1}C \supseteq \cdots \supseteq 0\,, \tag{5-18}$$

что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ подмодули F^pC^n совпадают с C^n при всех $p \ll 0$ и зануляются при всех $p \gg 0$. Тогда существует спектральная последовательность с

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}\left(\mathrm{Gr}^pC\right)\,, \quad \text{где} \quad \mathrm{Gr}^pC \stackrel{\text{def}}{=} F^pC/F^{p+1}C\,,$$

сходящаяся к присоединённым факторам $\mathrm{Gr}^pH^{p+q}(C) \stackrel{\text{def}}{=} F^pH^{p+q}(C)/F^{p+1}H^{p+q}(C)$ убывающей фильтрации $F^\bullet H(C)$ на модуле когомологий $H(C)$, относящей в подмодуль $F^pH(C) \subseteq H(C)$ все коциклы, лежащие в подкомплексе F^pC, по модулю всех попавших в этот подкомплекс кограниц.

Доказательство. Для каждого $r = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$ рассмотрим в модуле C^{p+q} модули

$$\begin{aligned}
Z_r^{p,q} &\stackrel{\text{def}}{=} \ker\left(F^pC^{p+q} \xrightarrow{d} C^{p+q+1}/F^{p+r}C^{p+q+1}\right) = \{c \in F^pC^{p+q} \mid dc \in F^{p+r}C^{p+q+1}\}\\
B_r^{p,q} &\stackrel{\text{def}}{=} d\left(F^{p-r+1}C^{p+q-1}\right) + F^{p+1}C^{p+q}\\
E_r^{p,q} &\stackrel{\text{def}}{=} Z_r^{p,q}/\left(B_r^{p,q} \cap Z_r^{p,q}\right) \simeq \left(Z_r^{p,q} + B_r^{p,q}\right)/B_r^{p,q}\,.
\end{aligned}$$

При $r = 0$ они имеют вид

$$\begin{aligned}
Z_0^{p,q} &= F^pC^{p+q}\\
B_0^{p,q} &= F^{p+1}C^{p+q}\\
E_0^{p,q} &= F^pC^{p+q}/F^{p+1}C^{p+q} = \mathrm{Gr}^pC^{p+q}\,,
\end{aligned}$$

и дифференциал $d : C^{p+q} \to C^{p+q+1}$ комплекса C корректно факторизуется до дифференциала $d_0 : E_0^{p,q} = \mathrm{Gr}^pC^{p+q} \to \mathrm{Gr}^pC^{p+q+1} = E_0^{p,q+1}$. Таким образом, в p-том столбце

[1] Это означает, что $d_C(F^pC) \subset F^pC$ при всех $p \in \mathbb{Z}$.

таблицы E_0 стоит p-тый присоединённый фактор комплекс $\mathrm{Gr}^p C = F^p C / F^{p+1} C$ фильтрованного комплекса C. Прообразы коциклов степени $p+q$ из этого комплекса образуют в C^{p+q} подмодуль $\{c \in F^p C^{p+q} \mid dc \in F^{p+1} C^{p+q}\} = Z_1^{p,q}$, а когомологии

$$H^{p+q}(\mathrm{Gr}^p C) = \frac{Z_1^{p,q}}{Z_1 \cap \left(F^p(C^{p+q-1}) + F^{p+1}C^{p+q}\right)} = \frac{Z_1^{p,q}}{Z_1^{p,q} \cap B_1^{p,q}} = E_1^{p,q}\,.$$

Упражнение 5.11. При всех $r \in \mathbb{N}$ проверьте, что

$$d(Z_r^{p,q}) \subset Z_r^{p+r,q-r+1} \quad \text{и} \quad d(B_r^{p,q}) \subset B_r^{p+r,q-r+1}\,,$$

так что дифференциал $d : C \to C$ корректно факторизуется до дифференциала $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+1-r}$, и убедитесь, что модуль когомологий последнего

$$\frac{\ker\left(d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+1-r}\right)}{\operatorname{im}\left(d_r : E_r^{p-r,q+r-1} \to E_r^{p,q}\right)} \simeq \frac{Z_{r+1}^{p,q}}{B_{r+1}^{p,q} \cap Z_{r+1}^{p,q}} = E_{r+1}^{p,q}\,.$$

Из условия предположения вытекает, что на каждой диагонали возникающей таким образом спектральной последовательности имеется лишь конечное число ненулевых модулей, и она сходится к модулям

$$E_\infty^{p,q} = \frac{Z_\infty^{p,q}}{B_\infty^{p,q} \cap Z_\infty^{p,q}} \simeq \frac{F^p C^{p+q} \cap \ker d}{F^{p+1} C^{p+q} \cap \operatorname{im} d} = \mathrm{Gr}^p H^{p+q}(C)\,,$$

что и утверждалось. □

Пример 5.6 (двучленная фильтрация)
Точная тройка комплексов $0 \to U \to V \to W \to 0$ задаёт на среднем комплексе V двучленную фильтрацию $V = F^0 V \supset U = F^1 V \supset 0 = F^2 V$ с присоединёнными факторами $\mathrm{Gr}^0 V = V/U = W$ и $\mathrm{Gr}^1 V = U/0 = U$. В этом случае таблица E_1 спектральной последовательности из предл. 5.3 сосредоточена в двух столбцах $p = 0, 1$ и имеет вид

$$\begin{tikzcd}
H^{p+1}(W) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, dotted, dash] & H^{p+2}(U) \\
H^{p}(W) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, dotted, dash] & H^{p+1}(U) \\
H^{p-1}(W) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, dotted, dash] & H^{p}(U) \\
H^{p-2}(W) \arrow[r, "\delta"] & H^{p-1}(U)
\end{tikzcd}$$

Таблица её когомологий $E_2 = H(E_1)$ совпадает с предельной таблицей E_∞ и состоит из присоединённых факторов индуцированной двучленной фильтрации на $H(V)$:

$$0 \to \operatorname{coker}\left(H^{n-1}(W) \to H^n(U)\right) \hookrightarrow H^n(V) \twoheadrightarrow \ker\left(H^n(W) \to H^{n+1}(U)\right) \to 0\,,$$

что согласуется с длинной последовательностью когомологий (5-9)

$$\cdots \to H^{n-1}(W) \xrightarrow{\delta} H^n(U) \to H^n(V) \to H^n(W) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(U) \to \cdots ,$$

исходной точной тройки комплексов $0 \to U \to V \to W \to 0$. Таким образом, спектральная последовательность двучленной фильтрации содержит ровно столько же информации, что и длинная последовательность когомологий.

5.4.1. Спектральные последовательности бикомплекса. На тотальном комплексе[1] $C^n = \mathrm{Tot}^n(V) = \bigoplus\limits_{p+q=n} V^{p,q}$ бикомплекса $V = V^{p,q}$ имеются две симметричных фильтрации, получающиеся одна из другой отражением $p \leftrightarrow q$ относительно диагонали $p = q$. Первая имеет

$$F^p \,\mathrm{Tot}^n(V) = \bigoplus_{\nu \geqslant p} V^{\nu, n-\nu}$$

и индуцирует на $H^n\left(\mathrm{Tot}^n(V)\right)$ убывающую фильтрацию, присоединённые градуированные факторы которой можно вычислять при помощи спектральной последовательности из предл. 5.3. В столбцах её начальной таблицы E_0 стоят фактор комплексы

$$E_0^{p,*} = G^p \,\mathrm{Tot}(V) \simeq V^{p,*} ,$$

и дифференциал тотального комплекса $d = d_{\mathrm{h}} + d_{\mathrm{v}}$, имеющий горизонтальную и вертикальную компоненты $d_{\mathrm{h}} : V^{p,q} \to V^{p+1,q}$ и $d_{\mathrm{v}} : V^{p,q} \to V^{p,q+1}$, действует на E_0 дифференциалом $d_0 = d_{\mathrm{v}}$. Таблица $E_1 = H(E_0)$ состоит из когомологий

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}\Big(\mathrm{Gr}^p\left(\mathrm{Tot}(V)\right)\Big) = H^q_{\mathrm{ver}}\left(V^{p,*}\right)$$

комплексов-столбцов бикомплекса V, а дифференциал $d = d_{\mathrm{h}} + d_{\mathrm{v}}$ действует на них дифференциалом $d_1 = d_{\mathrm{h}*}$, который индуцируется на когомологиях комплексов-столбцов бикомплеса V горизонтальным дифференциалом d_{h} этого бикомплекса.

Упражнение 5.12. Убедитесь, что всякий s-антикоммутирующий с дифференциалами[2] d_U, d_W комплексов U, W моморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}^0_{\mathrm{DG}}(U, W)$, также, как и морфизм комплексов, корректно задаёт морфизм когомологий[3] $\varphi_* : H(U) \to H(W)$.

Тем самым, таблица E_2 состоит из модулей $E_2^{p,q} = H^p_{\mathrm{hor}}\left(H^q_{\mathrm{ver}}(V)\right)$.

Вторая убывающая фильтрация на $\mathrm{Tot}^n(V)$ получается из первой перестановкой букв p, q и имеет

$$F^q \,\mathrm{Tot}^n(V) = \bigoplus_{\nu \geqslant q} V^{n-\nu, \nu} .$$

Дифференциалы $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p-r+1,q+r}$ ассоциированной с нею спектральной последовательности с ростом r наклоняются влево и вверх, симметрично относительно диагонали $p = q$ к тому, как вели себя дифференциалы первой спектралки, а $E_2^{p,q} = H^p_{\mathrm{ver}}\left(H^q_{\mathrm{hor}}(V)\right)$. Подытожим сказанное как

[1] См. n° 5.1.3 на стр. 64.

[2] Т. е. удовлетворяющий равенству $d_W\varphi + \varphi d_U = 0$.

[3] Ср. с предл. 5.1 на стр. 65.

Предложение 5.4 (спектральные последовательности бикомплекса) С каждым бикомплексом V связаны две спектралки с E_2-членами

$$ {}^{I}E_2^{p,q} = H^p_{\mathrm{hor}}\left(H^q_{\mathrm{ver}}(V)\right) \quad \text{и} \quad {}^{II}E_2^{p,q} = H^q_{\mathrm{ver}}\left(H^p_{\mathrm{hor}}(V)\right) . \tag{5-19} $$

Если на каждой диагонали $p+q = \mathrm{const}$ бикомплекса V имеется лишь конечное число ненулевых модулей $V^{p,q}$, обе они сходятся к присоединённым градуированным факторам некоторых фильтраций на $H^{p+q}(\mathrm{Tot}(V))$. □

Упр. 5.7. Равенства $\psi_*\varphi_* = 0$, $\delta\psi_* = 0$ и $\varphi_*\delta = 0$ следуют прямо из определений морфизмов φ_*, ψ_* и δ. Точность композиции $\psi_*\varphi_*$: если класс коцикла η лежит в $\ker\psi_*$, то $\psi\eta = d_W\xi$, и для такого $\eta' \in V$, что $\psi\eta' = \xi$, когомологичная коциклу η разность $\eta - d_V\eta' \in \ker\psi$, а значит, найдётся такой $\zeta \in U$, что $\varphi\zeta = \eta - d_V\eta' \equiv \eta \pmod{d)_V(V)}$. Точность композиции $\delta\psi_*$: если класс коцикла $\xi = \psi(\eta) \in \ker\delta$, то $\delta\xi = d_V\varphi\zeta$ для некоторого $\zeta \in U$, откуда $\eta - \varphi\zeta \in \ker d_V$ является коциклом в V, и $\xi = \psi(\eta - \varphi\zeta)$. Точность композиции $\varphi_*\delta$: если коцикл $\zeta \in \ker d_U$ лежит в $\ker\varphi_*$, то $\varphi\zeta = d_V\eta$ для и $\eta \in V$, и $\zeta = \delta(\psi\eta)$, причём $\psi\eta \in W$ является коциклом, т. к. $d_W(\psi\eta) = \psi d_V\eta = \psi\varphi\zeta = 0$.

Упр. 5.9. Пусть $\psi : U \to V$ и $d_V\psi = \psi d_U$. Тогда для $\varphi = \delta_W\gamma + \gamma d_V$ имеем

$$\varphi\psi = \delta_W\gamma\psi + \gamma d_V\psi = \delta_W\gamma\psi + \gamma\psi d_U\,.$$

Упр. 5.10. Если A стягиваем, то единственные отображения $\iota : 0 \to A$ и $\pi : A \to 0$ суть взаимно обратные изоморфизмы в $\mathcal{H}o$, т. к. $\pi\iota = \mathrm{Id}_0$, а $\iota\pi = 0 \sim \mathrm{Id}_A$.