

§1. Категории и функторы

1.1. Категории. Категория \mathcal{C} — это класс¹ объектов, обозначаемый $\text{Ob } \mathcal{C}$, в котором для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ задано множество морфизмов

$$\text{Hom}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

Морфизмы из X в Y удобно представлять себе в виде стрелок $\varphi : X \rightarrow Y$. Для разных пар объектов эти множества стрелок не пересекаются. Объединение всех стрелок категории \mathcal{C} обозначается $\text{Mor } \mathcal{C} = \bigsqcup_{X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ и тоже является классом, а не множеством. Для каждой тройки объектов $X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ имеется отображение композиции² $\text{Hom}(Y, Z) \times \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$, $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \circ \psi (= \varphi\psi)$, ассоциативное в том смысле, что $(\chi \circ \varphi) \circ \psi = \chi \circ (\varphi \circ \psi)$ всякий раз, когда эти композиции определены. Наконец, у каждого объекта $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ есть *тождественный морфизм* $\text{Id}_X \in \text{Hom}(X, X)$, который для любых стрелок $\varphi : X \rightarrow Y$ и $\psi : Z \rightarrow X$ удовлетворяет условиям³ $\varphi \circ \text{Id}_X = \varphi$ и $\text{Id}_X \circ \psi = \psi$. Подкатегория $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ — это категория, все объекты, стрелки и композиции которой наследуются из \mathcal{C} . Подкатегория $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ называется *полной*, если $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ для любых $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$. Категория \mathcal{C} называется *малой*, если $\text{Ob } \mathcal{C}$ это множество, а не больший класс. В этом случае $\text{Mor } \mathcal{C}$ тоже является множеством.

ПРИМЕР 1.1 (КАТЕГОРИИ, НЕ ЯВЛЯЮЩИЕСЯ МАЛЫМИ)

Часто возникающие в примерах категории, *не являющиеся малыми* — это категория Set всех множеств и всех отображений, категория Top топологических пространств и непрерывных отображений, категория $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$ векторных пространств над полем \mathbb{k} и \mathbb{k} -линейных отображений и её полная подкатегория $\text{vec}_{\mathbb{k}}$ конечномерных пространств, категории $R\text{-Mod}$ и $\text{Mod-}R$ левых и правых модулей над кольцом R и R -линейных отображений и их полные подкатегории $R\text{-mod}$ и $\text{mod-}R$ конечно представимых⁴ модулей, категория $\text{Ab} = \mathbb{Z}\text{-Mod}$ абелевых групп и их гомоморфизмов, категория Grp всех групп и групповых гомоморфизмов, категория Comr коммутативных колец с единицей и гомоморфизмов, переводящих единицу в единицу, и т. п.

ПРИМЕР 1.2 (ЧУМЫ И ТОПОЛОГИИ)

Каждое частично упорядоченное множество M это малая категория, объекты которой суть элементы $m \in M$, стрелки суть неравенства:

$$\text{Hom}_M(n, m) = \begin{cases} \text{одноэлементное множество, когда } n \leq m, \\ \emptyset \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

¹ Не хотелось бы вдаваться в точную формализацию этого термина (содержательную в той же мере, как формализация арифметики и теории множеств, изучаемые в стандартном курсе математической логики). Для наших нужд достаточно, что такая формализация существует и позволяет говорить, например, о «категории множеств», объекты которой, по понятным причинам, множества не образуют.

² Значок композиции « \circ », как и знак умножения, принято опускать, когда ясно, о чём речь.

³ Выкладка $\text{Id}' = \text{Id}' \circ \text{Id}'' = \text{Id}''$ показывает, что тождественный морфизм единствен.

⁴ Модуль называется *конечно представимым*, если он изоморфен фактору свободного модуля конечного ранга по конечно порождённому подмодулю.

а композиция стрелок $k \leq \ell$ и $\ell \leq n$ это стрелка $k \leq n$. Ассоциативность композиции и наличие тождественных морфизмов означают, соответственно, транзитивность и рефлексивность частичного порядка. Важным примером категории-чума является категория $\mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств топологического пространства X , стрелками в которой являются включения:

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}(X)}(U, W) = \begin{cases} \text{вложение } U \hookrightarrow W, \text{ если } U \subseteq W \\ \text{пустое множество, когда } U \not\subseteq W. \end{cases}$$

ПРИМЕР 1.3 (МАЛЫЕ КАТЕГОРИИ И АССОЦИАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ)

Всякую ассоциативную алгебру A с единицей $e \in A$ можно рассматривать как малую категорию с одним объектом e и множеством стрелок $\text{Hom}(e, e) = A$, композиция на котором задаётся умножением в этой алгебре. Наоборот, со всякой малой категорией \mathcal{C} и коммутативным кольцом K можно связать алгебру стрелок $K[\mathcal{C}]$, состоящую из формальных конечных линейных комбинаций стрелок категории \mathcal{C} с коэффициентами в K . Условимся для заданного множества M обозначать через $K \otimes M$ свободный K -модуль с базисом M , образованный всеми конечными формальными линейными комбинациями элементов множества M с коэффициентами из K . Тогда

$$K[\mathcal{C}] \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}} K \otimes \text{Hom}(X, Y) = \left\{ \sum x_i \varphi_i \mid x_i \in K, \varphi_i \in \text{Mor}(\mathcal{C}) \right\}.$$

Умножение стрелок в алгебре $K[\mathcal{C}]$ определяется их композицией в категории \mathcal{C}

$$\varphi \psi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \varphi \circ \psi & \text{если конец } \psi \text{ совпадает с началом } \varphi \\ 0 & \text{во всех прочих случаях} \end{cases}$$

и по дистрибутивности распространяется на произвольные конечные линейные комбинации стрелок. Алгебру $K[\mathcal{C}]$ можно представлять себе как алгебру финитных квадратных матриц¹, строки и столбцы которых занумерованы объектами категории, и в каждой клетке (Y, X) стоят элементы из своего K -модуля $K \otimes \text{Hom}(X, Y)$. Эта алгебра, вообще говоря, некоммутативна и без единицы, однако, для всякого $f \in K[\mathcal{C}]$ существует идемпотент $e_f = e_f^2$ со свойствами $e_f \circ f = f \circ e_f = f$. В качестве такового можно взять сумму тождественных эндоморфизмов Id_X всех объектов X , служащих началами или концами стрелок, линейной комбинацией которых является стрелка f .

1.1.1. Мономорфизмы, эпиморфизмы и изоморфизмы. Стрелка φ в категории \mathcal{C} называется *мономорфизмом*² (соотв. *эпиморфизмом*³), если на неё можно сокращать слева (соотв. справа), т. е. когда $\varphi\alpha = \varphi\beta \Rightarrow \alpha = \beta$ (соотв. $\alpha\varphi = \beta\varphi \Rightarrow \alpha = \beta$). По умолчанию мы используем стрелки \hookrightarrow для обозначения мономорфизмов, и стрелки \twoheadrightarrow для эпиморфизмов. Стрелка $\varphi : X \rightarrow Y$ называется *изоморфизмом* (или *обратимой стрелкой*) и обозначается \cong , если существует такая стрелка $\psi : Y \rightarrow X$, что $\varphi\psi = \text{Id}_Y$ и $\psi\varphi = \text{Id}_X$. В этой ситуации объекты X и Y называются *изоморфными*, а морфизмы φ и ψ — *обратными друг к другу*.

¹ Возможно, бесконечного размера, но с конечным числом ненулевых элементов.

² А также *вложением* или *инъективным морфизмом*.

³ А также *наложением* или *сюръективным морфизмом*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 (ПОДОБЪЕКТЫ И ФАКТОР ОБЪЕКТЫ)

Класс эквивалентности инъективной стрелки с концом в X по модулю её умножения справа на обратимые стрелки называется *подобъектом* объекта X , а класс эквивалентности сюръективной стрелки с началом в X по модулю левого умножения на обратимые стрелки — *фактор объектом* объекта X . Категория называется *умеренно мощной*¹, если подобъекты любого её объекта образуют множество. Все категории из *прим. 1.3* умеренно мощны.

УПРАЖНЕНИЕ 1.1 (ЧАСТИЧНЫЙ ПОРЯДОК НА ПОД- И ФАКТОР ОБЪЕКТАХ). Проверьте, что отношение $\varphi \subseteq \psi$, означающее, что существует такая стрелка ξ , что $\varphi = \psi\xi$, задаёт частичный порядок на множестве подобъектов, а отношение $\varphi \supseteq \psi$, означающее наличие такой стрелки ξ , что $\varphi = \xi\psi$, задаёт частичный порядок на множестве фактор объектов.

ПРИМЕР 1.4 (КОНЕЧНЫЕ УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА И КОМБИНАТОРНЫЕ СИМПЛЕКСЫ)

Обозначим через Δ_{big} категорию, объектами которой являются конечные упорядоченные множества X , а морфизмами — сохраняющие порядок² отображения. Категория Δ_{big} не является малой³, но содержит полную малую подкатеорию $\Delta \subset \Delta_{\text{big}}$, объектами которой являются конечные подмножества в \mathbb{Z} вида

$$[n] \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, \dots, n\}, \quad n \geq 0, \quad (1-1)$$

со стандартным порядком. Множество (1-1) называется *n -мерным комбинаторным симплексом*, а категория Δ — *симплициальной категорией*. Для любого $X \in \text{Ob } \Delta_{\text{big}}$ имеется *единственный* изоморфизм $n_X : X \simeq [n]$ с *единственным* $[n] \in \text{Ob } \Delta$, а именно нумерация элементов X в порядке возрастания.

УПРАЖНЕНИЕ 1.2. Сколько всего стрелок в множестве $\text{Hom}_{\Delta}([n], [m])$? Сколько среди них инъективных? Сколько сюръективных? Покажите, что алгебра стрелок $\mathbb{Z}[\Delta]$, как абстрактная ассоциативная алгебра, порождается стрелками

$$e_n = \text{Id}_{[n]} \quad (\text{тождественное отображение}) \quad (1-2)$$

$$\partial_n^{(i)} : [n-1] \hookrightarrow [n] \quad (\text{вложение, образ которого не содержит } i) \quad (1-3)$$

$$s_n^{(i)} : [n] \twoheadrightarrow [n-1] \quad (\text{наложение, склеивающее } i \text{ с } (i+1)) \quad (1-4)$$

и опишите образующие идеала соотношений между этими стрелками.

1.1.2. Обращение стрелок. С каждой категорией \mathcal{C} связана *противоположная* категория \mathcal{C}^{opp} с теми же объектами, но с обращённым направлением всех стрелок:

$$\text{Ob } \mathcal{C}^{\text{opp}} = \text{Ob } \mathcal{C}, \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{opp}}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X), \quad \varphi^{\text{opp}} \circ \psi^{\text{opp}} = (\psi \circ \varphi)^{\text{opp}}.$$

На языке алгебр такое обращение стрелок означает переход от алгебры $\mathcal{C} = K[\mathcal{C}]$ к противоположной алгебре \mathcal{C}^{opp} из тех же элементов, но с происходящим в противоположном порядке умножением. Мономорфизмы и подобъекты категории \mathcal{C} являются эпиморфизмами и фактор объектами категории \mathcal{C}^{opp} и наоборот.

¹По-английски: *well powered*.

²Т. е. такие отображения $\varphi : X \rightarrow Y$, что $x_1 \leq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in X$.

³По упомянутым выше логическим причинам, см. сноску на стр. 3.

1.2. Функторы. Функтор¹ $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ из категории \mathcal{C} в категорию \mathcal{D} это отображение $\text{Ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{D}$, $X \mapsto F(X)$, и набор таких отображений²

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)), \quad \varphi \mapsto F(\varphi), \quad (1-5)$$

что $F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)}$ для всех $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ и $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$ всякий раз, когда композиция $\varphi \circ \psi$ определена. На языке ассоциативных алгебр функторы суть *гомоморфизмы* одной алгебры стрелок в другую. Если все отображения (1-5) сюръективны, функтор F называется *полным*³. Образ такого функтора является полной подкатегорией. Если все отображения (1-5) инъективны, функтор F называется *строгим*⁴. Такой функтор задаёт вложение алгебр стрелок. Полные строгие функторы называют *вполне строгими*.

Простейшие функторы — это *тождественный функтор* $\text{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, тождественно действующий на объектах и морфизмах, и *забывающие функторы*, действующие из какой-либо категории множеств с дополнительной структурой⁵, морфизмы в которой суть сохраняющие эту структуру отображения множеств, в категорию $\mathcal{S}et$ всех множеств — такие функторы просто забывают о структуре. Забывающий функтор не строг, если имеются различные морфизмы структур, одинаково действующие на подлежащих множествах, и не полон, если не всякое отображение множеств сохраняет рассматриваемую структуру.

ПРИМЕР 1.5 (ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ КОМБИНАТОРНЫХ СИМПЛЕКСОВ)

Зададим функтор $\Delta \rightarrow \mathcal{T}op$ из категории комбинаторных симплексов в категорию топологических пространств, сопоставляя n -мерному комбинаторному симплексу $[n]$ стандартный n -мерный симплекс⁶

$$\Delta^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_\nu = 1, x_\nu \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad (1-6)$$

а стрелке $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ — единственное аффинное отображение $\varphi_* : \Delta^n \rightarrow \Delta^m$, действующее на базисные векторы по правилу $e_\nu \mapsto e_{\varphi(\nu)}$. Это строгий, но не полный функтор. Образующие элементы (1-3) и (1-4) алгебры стрелок категории Δ переводятся этим функтором, соответственно, во вложение i -той грани $\Delta^{(n-1)} \hookrightarrow \Delta^n$ и в вырождение вдоль i -того ребра⁷ $\Delta^n \twoheadrightarrow \Delta^{(n-1)}$.

1.2.1. Предпучки. Функтор $F : \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{D}$ называется *контравариантным функтором* из \mathcal{C} в \mathcal{D} или *предпучком* объектов категории \mathcal{D} на категории \mathcal{C} . Такой функтор оборачивает композицию: $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$ и на языке ассоциативных алгебр является *антигомоморфизмом* алгебр стрелок.

¹Иногда вместо «функтор» говорят *ковариантный функтор*.

²По одному отображению для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$.

³По-английски: *full*.

⁴По-английски: *faithful*.

⁵Например, геометрической — такой, как топология или структура гладкого многообразия, или алгебраической — такой, как структура группы, кольца или модуля.

⁶Т. е. выпуклую оболочку концов стандартных базисных векторов e_0, e_1, \dots, e_n в \mathbb{R}^{n+1} .

⁷Т. е. в проекцию симплекса на грань вдоль ребра, соединяющего i -тую вершину с $(i+1)$ -й.

ПРИМЕР 1.6 (ТРИАНГУЛИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА)

Обозначим через $\Delta_s \subset \Delta$ неполную подкатегорию, объектами которой тоже являются комбинаторные симплексы, $\text{Ob } \Delta_s = \text{Ob } \Delta$, но в качестве морфизмов допускаются только *строго возрастающие*¹ отображения. Категория Δ_s называется *полусимплициальной категорией*.

УПРАЖНЕНИЕ 1.3. Убедитесь, что алгебра стрелок $K[\Delta_s]$ порождается тождественными стрелками $e_n = \text{Id}_{[n]}$ и отображениями вложения граней $\partial_n^{(i)}$ из (1-3).

Предпучок множеств $X : \Delta_s^{\text{opp}} \rightarrow \text{Set}$ на полусимплициальной категории Δ_s называется *полусимплициальным множеством* и является ни чем иным, как комбинаторным описанием *триангулированного топологического пространства* $|X|$, которое называется *геометрической реализацией* полусимплициального множества X . В самом деле, функтор X задаёт для каждого целого неотрицательного n множество $X_n = X([n])$, точки которого следует воспринимать как дизъюнктивный набор n -мерных симплексов (1-6), из коих будет склеиваться пространство $|X|$. Стрелки $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ в категории Δ_s биективно соответствуют n -мерным граням m -мерного симплекса Δ^m , и отображение $X(\varphi) : X_m \rightarrow X_n$, которое функтор X сопоставляет стрелке φ , задаёт *правило склейки*: оно указывает данному m -мерному симплексу $x \in X_m$, какой именно n -мерный симплекс $X(\varphi)x \in X_n$ надлежит приклеить к нему в качестве φ -той n -мерной грани.

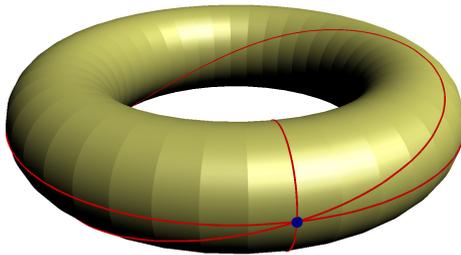


Рис. 1♦1. Триангуляция тора.

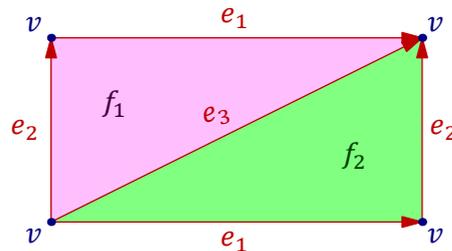


Рис. 1♦2. Симплексы триангуляции.

Так, на рис. 1♦1 показана стандартная триангуляция двумерного тора, склеенного из прямоугольника, изображённого на рис. 1♦2. Эта триангуляция состоит из одного 0-мерного симплекса, в который склеятся все вершины прямоугольника, трёх 1-мерных симплексов, в которые склеятся, соответственно, две горизонтальных стороны, две вертикальных стороны, и диагональ прямоугольника, а также пары 2-мерных симплексов, на которые прямоугольник разрезается диагональю. Направления стрелок на рис. 1♦2 соответствуют неравенствам между вершинами симплексов. Вертикальные рёбра e_2 с рис. 1♦2 изображаются на рис. 1♦1 меридианом тора, а горизонтальные рёбра e_1 — экватором тора. Соответствующее полусимплициальное множество X имеет $X_0 = \{v\}$, $X_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$, $X_2 = \{f_1, f_2\}$, и $X_i = \emptyset$ для всех $i \geq 3$, а

¹Т. е. сохраняющие порядок и инъективные.

отображения склейки $X(\varphi)$ действуют по правилам

$$\begin{aligned} X(\partial_1^0) &= X(\partial_1^1) : X_1 \rightarrow X_0, & e_i &\mapsto v \text{ для всех } i = 1, 2, 3 \\ X(\partial_2^0) &: X_2 \rightarrow X_1, & f_1 &\mapsto e_1, f_2 \mapsto e_2, \\ X(\partial_2^1) &: X_2 \rightarrow X_1, & f_1 &\mapsto e_3, f_2 \mapsto e_3, \\ X(\partial_2^2) &: X_2 \rightarrow X_1, & f_1 &\mapsto e_2, f_2 \mapsto e_1. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.4. Существует ли триангуляция окружности S^1 а) тремя 0-мерными и тремя 1-мерными симплексами¹ б) одним 0-мерным и одним 1-мерным симплексом, а также триангуляция двумерной сферы S^2 в) четырьмя 0-мерными, шестью 1-мерными и четырьмя 2-мерными симплексами г) двумя 0-мерными, одним 1-мерным и одним 2-мерным симплексом. Если да, задайте все отображения $X(\varphi)$ явно, если нет, объясните почему.

ПРИМЕР 1.7 (СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА)

Предпучок множеств $X : \Delta^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$ на всей симплициальной категории называется *симплициальным множеством*. Из симплициального множества X также можно изготовить топологическое пространство $|X|$, склеив стандартные правильные симплексы Δ_x^n , биективно сопоставленные точкам $x \in X_n$, согласно отображениям

$$\varphi^* \stackrel{\text{def}}{=} X(\varphi) : X_m \rightarrow X_n,$$

предусмотренным функтором X для всех неубывающих отображений $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ категории Δ . А именно, для каждого $x \in X_m$ надо приклеить каждую точку s симплекса $\Delta_{\varphi^*(x)}^n$, отвечающего элементу $\varphi^*(x) \in X_n$, к точке $\varphi_*(s)$ симплекса Δ_x^m , отвечающего элементу $x \in X_m$, где через $\varphi_* : \Delta^n \rightarrow \Delta^m$ обозначено аффинное отображение, переводящее вершины симплекса Δ^n в вершины симплекса Δ^m посредством морфизма φ . Результат такой склейки формально описывается как фактор пространство дизъюнктного объединения² $\bigsqcup_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n$ по наименьшему отношению эквива-

лентности, содержащему отождествления $(\varphi^*x, s) \simeq (x, \varphi_*s)$ для всех точек $x \in X_m$, $s \in \Delta^n$ и стрелок $\varphi : [n] \rightarrow [m]$.

Если стрелка $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ является композицией наложения $\sigma : [n] \rightarrow [k]$ и вложения $\delta : [k] \hookrightarrow [m]$, то каждый n -мерный симплекс Δ_z^n , лежащий в образе φ^* и помеченный точкой $z = \sigma^*y = \sigma^*\delta^*x$, вклеится в пространство $|X|$ в виде k -мерного симплекса $\Delta_y^k = \sigma_*\Delta_z^n$, полученного из Δ_z^n аффинно линейной проекцией $\sigma_* : \Delta^n \rightarrow \Delta^k$. При этом он окажется δ -той k -мерной гранью m -мерного симплекса Δ_x^m . Таким образом, каждый симплекс $z \in X_n$, лежащий в образе отображения σ^* , отвечающего какой-нибудь стрелке $\sigma : [n] \rightarrow [k]$ с $k < n$, виден в итоговом пространстве $|X|$ как симплекс меньшей, чем n размерности. Такие симплексы называются *вырожденными*. Их использование позволяет описывать более общие клеточные структуры, чем

¹Т. е. можно ли получить окружность в качестве геометрической реализации полусимплициального множества X , у которого X_0 и X_1 состоят из трёх элементов, а все остальные X_i пусты

²В котором множества X_n рассматриваются с дискретной, а симплексы $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ со стандартной топологией объемлющего вещественного аффинного пространства.

стандартные триангуляции. Однако платой за это является громоздкость такого описания: для любого функтора $X : \Delta^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$ каждое из множеств X_n обязано быть непустым.

Например, n -мерная сфера S^n гомеоморфна топологическому фактору стандартного n -мерного симплекса по его границе¹ $S^n \simeq \Delta^n / \partial \Delta^n$. Этот гомеоморфизм задаёт на сфере S^n клеточную структуру, состоящую из одной 0-нульмерной вершины, в которую склеится граница симплекса, и одной n -мерной клетки, в которую превратится весь симплекс. Она описывается предпучком $X : \Delta^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$, у которого при всех k множество $X_k = X([k])$ получается из множества $\text{Hom}_{\Delta}([k], [n])$ отождествлением всех неэпиморфных отображений в один элемент, а правило склейки $\varphi^* : X_m \rightarrow X_k$, отвечающее неубывающему отображению $\varphi : [k] \rightarrow [m]$, переводит класс стрелки $\zeta : [m] \rightarrow [n]$ в класс стрелки $\zeta \varphi : [k] \rightarrow [n]$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.5. Убедитесь, что это описание корректно задаёт предпучок X с метрической реализацией $|X| \simeq S^n$ и найдите количество элементов в каждом множестве X_k , $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

ПРИМЕР 1.8 (ПРЕДПУЧКИ И ПУЧКИ НА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ)

Исторически, термин «предпучок» впервые возник в контексте категории $\mathcal{C} = \mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств $U \subset X$ заданного топологического пространства X . Предпучок $F : \mathcal{U}(X)^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{D}$ сопоставляет каждому открытому множеству $U \subset X$ объект $F(U) \in \text{Ob } \mathcal{D}$, который называется *сечениями* предпучка F над U . В зависимости от категории \mathcal{D} сечения могут образовывать множество, кольцо, алгебру, векторное или топологическое пространство и т. п. Морфизм $F(W) \rightarrow F(U)$, отвечающий включению $U \subset W$, называется *ограничением сечений*, определённых над W , на подмножество U , а результат его применения к сечению $s \in F(W)$ обозначается через $s|_U$. Вот несколько типичных примеров таких предпучков:

- 1) предпучок Γ_E локальных сечений непрерывного отображения $p : E \rightarrow X$ имеет в качестве $\Gamma_E(U)$ множество таких непрерывных отображений $s : U \rightarrow E$, что² $p \circ s = \text{Id}_U$, а его отображения ограничения — это обычные ограничения сечений с большего подмножества на меньшее
- 2) беря в предыдущем примере в качестве отображения проекцию $p : X \times Y \rightarrow X$, получаем предпучок локальных непрерывных отображений $\mathcal{C}^0(X, Y)$ пространства X в пространство Y , имеющий в качестве сечений над $U \subset X$ непрерывные отображения $s : U \rightarrow Y$
- 3) дальнейшими специализациями являются так называемые *структурные предпучки* \mathcal{O}_X : предпучок дифференцируемых функций $X \rightarrow \mathbb{R}$ на гладком вещественном многообразии X , предпучок локальных голоморфных функций $X \rightarrow \mathbb{C}$ на комплексно аналитическом многообразии X , предпучок локальных рациональных функций $X \rightarrow \mathbb{k}$ на алгебраическом многообразии X над полем \mathbb{k} и т. п. (все они являются предпучками алгебр над соответствующим полем)

¹Т. е. склеивании всех точек границы в одну. Например, двумерная сфера S^2 получается таким способом из треугольника.

²Это требование означает, что каждая точка $x \in U$ отображается в слой $p^{-1}(x)$ над нею.

- 4) постоянный *предпучок* S имеет в качестве $S(U)$ одно и то же фиксированное множество S для всех $U \subset X$, и все его отображения ограничения — тождественные морфизмы Id_S .

Предпучок F называется *пучком*, если для любого семейства открытых подмножеств U_i и любого набора таких локальных сечений $s_i \in F(U_i)$, что $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ при всех i, j , существует единственное такое сечение $s \in F(\bigcup_i U_i)$, что $s|_{U_i} = s_i$ при всех i . В случае, когда имеется не более одного такого сечения (но может не быть и ни одного), предпучок F называется *отделимым*.

УПРАЖНЕНИЕ 1.6. Убедитесь в том, что категории пучков и отделимых предпучков являются полными подкатегориями в категории всех предпучков $pSh(X)$.

Все предпучки (1) – (4) отделимы, и только последний из них — постоянный *предпучок* — не является пучком, поскольку для покрытия дизъюнктного объединения $W = U_1 \sqcup U_2$ множествами U_1, U_2 не всякая пара констант $s_i \in S(U_i)$ является ограничением одной константы $s \in S(W)$. Тем не менее наряду с постоянным предпучком в природе имеется и

- 5) постоянный *пучок* S^\sim , у которого $S^\sim(U)$ это *непрерывные* отображения $U \rightarrow S$ в множество S , рассматриваемое с *дискретной* топологией, или — что то же самое — *локально* постоянные функции со значениями в S .

УПРАЖНЕНИЕ 1.7. Опишите первообразные действительной функции $1/x$.

1.2.2. Функторы Hom . С каждым объектом $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ любой категории \mathcal{C} связаны функтор $h^X : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$, переводящий объект Y в множество морфизмов

$$h^X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}(X, Y),$$

а стрелку $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$ в отображение $\varphi_* : \text{Hom}(X, Y_1) \rightarrow \text{Hom}(X, Y_2)$ левого умножения на $\varphi : \varphi_*(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \circ \psi$, и предпучок $h_X : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$, переводящий объект Y в множество морфизмов

$$h_X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}(Y, X),$$

а стрелку $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$ в отображение $\varphi^* : \text{Hom}(Y_2, X) \rightarrow \text{Hom}(Y_1, X)$ правого умножения на $\varphi : \varphi^*(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \psi \circ \varphi$.

Например, предпучок $h_{[n]} : \Delta_S \rightarrow \mathcal{S}et$ на полусимплициальной категории Δ_S задаёт стандартную триангуляцию стандартного n -мерного симплекса: множество её k -мерных симплексов $h_{[n]}([k]) = \text{Hom}([k], [n])$ это в точности множество всех k -мерных граней. Предпучок $h_U : \mathcal{U}(X) \rightarrow \mathcal{S}et$ на топологическом пространстве X имеет ровно одно сечение над всеми $W \subseteq U$ и пустое множество сечений над любым $W \not\subseteq U$. Вот ещё несколько примеров.

ПРИМЕР 1.9 (двойственность в категории векторных пространств)

Предпучок $h_{\mathbb{k}} : \mathcal{V}ec_{\mathbb{k}}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{V}ec_{\mathbb{k}}$ сопоставляет векторному пространству V двойственное векторное пространство $h_{\mathbb{k}}(V) = \text{Hom}(V, \mathbb{k}) = V^*$, а линейному отображению $\varphi : V \rightarrow W$ — двойственное отображение $\varphi^* : W^* \rightarrow V^*$, переводящее линейную форму $\xi : W \rightarrow \mathbb{k}$ в линейную форму $\xi \circ \varphi : V \rightarrow \mathbb{k}$.

ПРИМЕР 1.10 (двойственность конечных упорядоченных множеств)

Это комбинаторная версия предыдущего примера. Обозначим через ∇_{big} категорию конечных упорядоченных множеств из не менее двух элементов, морфизмами в которой являются неубывающие отображения, переводящие минимальный элемент в минимальный, а максимальный — в максимальный¹. Тавтологическое включение $\nabla_{\text{big}} \hookrightarrow \Delta_{\text{big}}$ является строгим, но не полным функтором. Предпучки

$$h_{[1]} : \Delta_{\text{big}}^{\text{opp}} \rightarrow \nabla_{\text{big}} \quad \text{и} \quad h_{[1]} : \nabla_{\text{big}}^{\text{opp}} \rightarrow \Delta_{\text{big}}$$

переводят упорядоченные множества $X \in \text{Ob } \Delta_{\text{big}}$ и $Y \in \text{Ob } \nabla_{\text{big}}$ в множества

$$X^* \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\Delta_{\text{big}}}(X, [1]) \quad \text{и} \quad Y^* \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\nabla_{\text{big}}}(Y, [1]),$$

порядок на которых задаётся поточечным сравнением значений:

$$\varphi \leq \psi, \quad \text{если } \varphi(x) \leq \psi(x) \text{ для всех } x.$$

Стрелка $\varphi : Z_1 \rightarrow Z_2$ переводится обоими функторами в морфизм правого умножения $\varphi^* : \text{Hom}(Z_2, [1]) \rightarrow \text{Hom}(Z_1, [1])$, $\xi \mapsto \xi \circ \varphi$.

Иначе можно сказать, что множество Z^* это множество «дедекиндовых сечений» множества Z , т. е. множество таких разбиений $Z = Z_0 \sqcup Z_1$, что $z_0 < z_1$ для всех $z_0 \in Z_0$, $z_1 \in Z_1$, и оба множества Z_i должны быть непусты, когда $Z \in \text{Ob } \nabla_{\text{big}}$, или одно из них может быть пусто, когда $Z \in \text{Ob } \Delta_{\text{big}}$. Обратите внимание, что сечения ведут себя контравариантно по отношению к морфизмам: при наличии неубывающего отображения $Z_1 \rightarrow Z_2$ разбиение второго множества Z_2 индуцирует разбиение на Z_1 , но не наоборот.

1.3. Естественные преобразования. Для пары функторов $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ естественным (или функториальным) преобразованием F в G называется такое занумерованное объектами $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ семейство стрелок $f_X : F(X) \rightarrow G(X)$ в категории \mathcal{D} , что для любой стрелки $\varphi : X \rightarrow Y$ из \mathcal{C} возникающая в категории \mathcal{D} диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(Y) \\ f_X \downarrow & & \downarrow f_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(\varphi)} & G(Y) \end{array} \quad (1-7)$$

коммулативна. На языке алгебр, гомоморфизм $F : K[\mathcal{C}] \rightarrow K[\mathcal{D}]$ наделяет алгебру $K[\mathcal{D}]$ структурой модуля над алгеброй $K[\mathcal{C}]$, в которой умножение элемента $b \in K[\mathcal{D}]$ на элемент $a \in K[\mathcal{C}]$ определяется правилом $a \cdot b \stackrel{\text{def}}{=} F(a) \cdot b$. Пара функторов F, G задаёт на алгебре $K[\mathcal{D}]$ две различных структуры $K[\mathcal{C}]$ -модуля, и естественное преобразование $f : F \rightarrow G$ это $K[\mathcal{C}]$ -линейный гомоморфизм между этими модулями: для любого $\varphi \in K[\mathcal{C}]$ действие на $K[\mathcal{D}]$ операторов $F(\varphi)$ и $G(\varphi)$ удовлетворяет соотношению $f \circ F(\varphi) = G(\varphi) \circ f$.

¹Отметим, что минимальный и максимальный элементы различны.

ПРИМЕР 1.11 (КАТЕГОРИЯ ФУНКТОРОВ)

Функторы из малой категории \mathcal{C} в произвольную категорию \mathcal{D} образуют категорию $\mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, объектами которой являются функторы $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, а морфизмами — естественные преобразования $f : F \rightarrow G$. Для малой категории \mathcal{C} мы будем обозначать категорию предпучков $\mathcal{F}un(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \mathcal{D})$ через $pSh(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Опущенная буква \mathcal{D} в этой записи по умолчанию означает, что $\mathcal{D} = \mathcal{S}et$, т. е. $pSh(\mathcal{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}un(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \mathcal{S}et)$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.8. Проверьте, что описанное в н° 1.2.2 сопоставление $X \mapsto h_X$ задаёт функтор $\mathcal{C} \rightarrow pSh(\mathcal{C})$, а сопоставление $X \mapsto h^X$ — предпучок $\mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{S}et)$.

1.3.1. Эквивалентности категорий. Категории \mathcal{C} и \mathcal{D} называются *эквивалентными*, если между ними есть такие функторы $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, что композиция GF естественно изоморфна тождественному функтору $\text{Id}_{\mathcal{C}}$, а композиция FG естественно изоморфна $\text{Id}_{\mathcal{D}}$, т. е. имеются естественные по $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ и $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ преобразования

$$GF(X) \simeq X \quad \text{и} \quad FG(Y) \simeq Y, \quad (1-8)$$

являющиеся для всех X и Y изоморфизмами в категориях \mathcal{C} и \mathcal{D} соответственно. Такие функторы F и G называются *квазиобратными* друг другу *эквивалентностями категорий*. Подчеркнём, что наличие изоморфизмов (1-8) не означает равенств $FG = \text{Id}_{\mathcal{D}}$ или $GF = \text{Id}_{\mathcal{C}}$: объекты $GF(X)$ и X могут быть различны, как и объекты $FG(Y)$ и Y .

ПРИМЕР 1.12 (ВЫБОР БАЗИСА)

Обозначим через $vec_{\mathbb{k}}$ категорию конечномерных векторных пространств над полем \mathbb{k} , а через $\mathcal{C} \subset vec_{\mathbb{k}}$ — её малую полную подкатегорию со счётным множеством объектов, коими являются *координатные* пространства \mathbb{k}^n , где $n \geq 0$ и $\mathbb{k}^0 = \{0\}$. Зафиксируем в каждом пространстве $V \in \text{Ob } vec_{\mathbb{k}}$ какой-нибудь базис, т. е. выберем для каждого $V \in \text{Ob } vec_{\mathbb{k}}$ изоморфизм¹

$$f_V : V \simeq \mathbb{k}^{\dim(V)}, \quad (1-9)$$

причём для всех координатных пространств \mathbb{k}^n положим $f_{\mathbb{k}^n} = \text{Id}_{\mathbb{k}^n}$. Рассмотрим функтор $F : vec_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{C}$, переводящий векторное пространство V в координатное пространство $\mathbb{k}^{\dim V}$, а стрелку $\varphi : V \rightarrow W$ — в стрелку $F(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}$, которую можно воспринимать как матрицу оператора φ в выбранных базисах пространств V и W . Покажем, что F является эквивалентностью категорий, квазиобратной к тавтологическому вложению $G : \mathcal{C} \hookrightarrow vec$. По построению мы имеем точное равенство² $FG = \text{Id}_{\mathcal{C}}$. Противоположная композиция $GF : vec \rightarrow vec$ принимает значения в несопоставимой с vec по мощности малой подкатегории $\mathcal{C} \subset vec$. Однако изоморфизмы (1-9) задают естественное преобразование из Id_{vec} в GF , т. к. в силу определения действия функтора F на стрелки все диаграммы (1-7) коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} \text{Id}_{vec}(V) = V & \xrightarrow{\varphi = \text{Id}_{vec}(\varphi)} & W = \text{Id}_{vec}(W) \\ f_V \downarrow & & \downarrow f_W \\ GF(V) = \mathbb{k}^{\dim V} & \xrightarrow{GF(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}} & \mathbb{k}^{\dim W} = GF(W) \end{array}$$

Тем самым, тождественный функтор Id_{vec} естественно изоморфен композиции GF .

¹Переводящий выбранный базис в стандартный базис в \mathbb{k}^n .

²А не просто изоморфизм функторов.

УПРАЖНЕНИЕ 1.9. Покажите, что категория Δ_{big} канонически эквивалентна симплициальной подкатегории $\Delta \subset \Delta_{\text{big}}$ (см. прим. 1.4 на стр. 5).

ЛЕММА 1.1

Функтор $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ тогда и только тогда задаёт эквивалентность категорий, когда он вполне строг¹ и каждый объект $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ изоморфен объекту вида $G(X)$ для некоторого (зависящего от Y) объекта² $X = X(Y) \in \text{Ob } \mathcal{C}$.

Доказательство. Пусть для каждого $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ указаны $X = X(Y) \in \text{Ob } \mathcal{C}$ и изоморфизм $f_Y : Y \simeq G(X)$, причём когда $Y = G(X)$, мы положим $f_{G(X)} = \text{Id}_{G(X)}$. Зададим функтор $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ на объектах правилом $F(Y) = X(Y)$, а для стрелки $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$ положим $F(\varphi)$ равным такой стрелке³ $\psi : X(Y_1) \rightarrow X(Y_2)$, что $G(\psi) = f_{Y_2} \circ \varphi \circ f_{Y_1}^{-1}$. Тогда $FG = \text{Id}_{\mathcal{D}}$ и для любой стрелки $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Id}_{\mathcal{D}}(Y_1) = Y_1 & \xrightarrow{\varphi} & Y_2 = \text{Id}_{\mathcal{D}}(Y_2) \\ f_{Y_1} \downarrow & & \downarrow f_{Y_2} \\ GF(Y_1) = X_1 & \xrightarrow{GF(\varphi)=G(\psi)} & X_2 = GF(Y_2). \end{array}$$

Таким образом, $f_Y : Y \simeq G(X) = GF(Y)$ задают естественный изоморфизм тождественного функтора $\text{Id}_{\mathcal{D}}$ с композицией GF . \square

УПРАЖНЕНИЕ 1.10. Покажите, что функторы дуализации из прим. 1.9 и прим. 1.10 являются квазиобратными самим себе антиэквивалентностями категорий.

1.4. Представимые функторы. Предпучок $F : \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$, естественно изоморфный предпучку h_X для некоторого $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, называется *представимым*, и X в этом случае называют *представляющим объектом* предпучка F . Двойственным образом, ковариантный функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$ называется *копредставимым*, если он естественно изоморфен функтору h^X для некоторого $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, именуемого в этом случае *копредставляющим объектом* функтора F .

УПРАЖНЕНИЕ 1.11. Убедитесь, что тензорное произведение конечномерных векторных пространств $U \otimes V$ копредставляет функтор $\mathcal{V}ec \rightarrow \mathcal{S}et$, сопоставляющий векторному пространству W множество билинейных отображений $U \times V \rightarrow W$.

Множество $X_n = X([n])$ всех n -мерных симплексов триангулированного топологического пространства $X : \Delta_s^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$ можно описать как множество всех *симплициальных* отображений $\Delta^n \rightarrow X$ из стандартным образом триангулированного n -мерного симплекса $\Delta^n = h_{[n]}$ в триангулированное пространство X , т. е. как множество естественных преобразований $\text{Hom}_{pSh(\Delta_s)}(h_{[n]}, X)$. Прямым обобщением этого наблюдения является

¹Т. е. все отображения $G : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), G(Y))$ являются изоморфизмами.

²Функторы G , обладающие этим свойством, называются *по существу сюръективными* (по-английски *essentially surjective*).

³Поскольку $G : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, X_2) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X_1), G(X_2))$ является изоморфизмом, стрелка ψ существует и единственна

ЛЕММА 1.2 (ЛЕММА ИОНЕДЫ 1)

Для любого предпучка множеств $F : \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$ на произвольной категории \mathcal{C} имеется функториальная по $F \in \text{pSh}(\mathcal{C})$ и по $A \in \mathcal{C}$ биекция $F(A) \simeq \text{Hom}_{\text{pSh}(\mathcal{C})}(h_A, F)$, переводящая элемент $a \in F(A)$ в естественное преобразование

$$f_X : \text{Hom}(X, A) \rightarrow F(X), \quad (1-10)$$

которое посылает стрелку $\varphi : X \rightarrow A$ в значение отображения $F(\varphi) : F(A) \rightarrow F(X)$ на элементе a . Обратная биекция сопоставляет каждому естественному преобразованию (1-10) значение отображения $f_A : h_A(A) \rightarrow F(A)$ на элементе $\text{Id}_A \in h_A(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого естественного преобразования (1-10), любого объекта $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ и любой стрелки $\varphi : X \rightarrow A$ мы имеем коммутативную диаграмму (1-7)

$$\begin{array}{ccc} h_A(A) = \text{Hom}(A, A) & \xrightarrow{h_A(\varphi)} & \text{Hom}(X, A) = h_A(X) \\ f_A \downarrow & & \downarrow f_X \\ F(A) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(X), \end{array} \quad (1-11)$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ , так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)(f_A(\text{Id}_A))$. Это означает, что естественное преобразование $f : h_A \rightarrow F$ однозначно восстанавливается по элементу $a = f_A(\text{Id}_A) \in F(A)$. Каждому элементу $a \in F(A)$ при этом отвечает преобразование (1-10), переводящее $\varphi \in \text{Hom}(X, A)$ в $f_X(\varphi) = F(\varphi)(a) \in F(X)$, естественное, поскольку для любой стрелки $\psi : Y \rightarrow X$ и всех $\varphi \in h_A(X)$ имеем $f_Y(h_A(\psi)\varphi) = f_Y(\varphi\psi) = F(\varphi\psi)a = F(\psi)F(\varphi)a = F(\psi)(f_X(\varphi))$, т.е. $f_Y \circ h_A(\psi) = F(\psi) \circ f_X$ как отображения $h_A(X) \rightarrow F(Y)$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 1.12 (ЛЕММА ИОНЕДЫ 2). Для ковариантного функтора $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$ постройте функториальную по F и $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ биекцию $F(A) \simeq \text{Hom}_{\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{S}et)}(h^A, F)$.

СЛЕДСТВИЕ 1.1

Функторы $X \mapsto h_X$ и $X \mapsto h^X$ задают вполне строгие ковариантное и контравариантное вложения категории \mathcal{C} в категории предпучков и ковариантных функторов соответственно. Иными словами, имеются функториальные по $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$ изоморфизмы $\text{Hom}_{\text{pSh}(\mathcal{C})}(h_A, h_B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ и $\text{Hom}_{\text{Fun}(\mathcal{C})}(h^A, h^B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяем леммы Ионеды к функторам $F = h_B$ и $F = h^B$. \square

СЛЕДСТВИЕ 1.2

Если объект $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$, копредставляющий функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$ (соотв. представляющий предпучок $F : \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$) существует, то он единствен с точностью до канонического изоморфизма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если имеются два таких объекта A, B , что $F = h^A = h^B$ (соотв. $F = h_A = h_B$), то тождественному естественному преобразованию $\text{Id}_F : F \rightarrow F$ отвечает по сл. 1.1 изоморфизм $B \simeq A$ (соотв. $A \simeq B$). \square

1.4.1. Описание объектов универсальными свойствами. При помощи [сл. 1.2](#) можно пытаться переносить в произвольную категорию \mathcal{C} естественные¹ операции над множествами, имеющиеся в категории $\mathcal{S}et$. А именно, будем называть результатом применения такой операции к набору объектов $X_i \in \text{Ob } \mathcal{C}$ представляющий объект X предпучка $\mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$, переводящего каждый объект $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ в результат применения этой операции к множествам $\text{Hom}(Y, X_i)$ в категории $\mathcal{S}et$. Разумеется, такое неявное описание не даёт никаких гарантий *существования* определяемого объекта, т. к. рассматриваемый функтор может оказаться непредставимым. Однако, если он представим, то представляющий объект X , во-первых, автоматически обладает некоторыми «универсальными свойствами», а во-вторых, единствен с точностью до *единственного* изоморфизма, сохраняющего эти свойства. Вдобавок, у каждой такого рода конструкции есть двойственная версия, получающаяся из предыдущей обращением стрелок и объявляющая результатом теоретико-множественной операции над объектами $X_i \in \text{Ob } \mathcal{C}$ копредставляющий объект ковариантного функтора $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$, переводящего $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ в результат применения операции к множествам $\text{Hom}(X_i, Y)$.

ПРИМЕР 1.13 (ПРОИЗВЕДЕНИЕ $A \times B$)

Определим *произведение* $A \times B$ объектов $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$ произвольной категории \mathcal{C} как объект, представляющий предпучок $\mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$, $Y \mapsto \text{Hom}(Y, A) \times \text{Hom}(Y, B)$. Если произведение существует, то имеется функториальный по Y изоморфизм

$$\beta_Y : \text{Hom}(Y, A \times B) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(Y, A) \times \text{Hom}(Y, B).$$

Полагая в нём $Y = A \times B$, получаем пару стрелок

$$A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B, \quad (1-12)$$

изображающих элемент $\beta_{A \times B}(\text{Id}_{A \times B}) \in \text{Hom}(A \times B, A) \times \text{Hom}(A \times B, B)$. Пара стрелок (1-12) универсальна в том смысле, что для любой пары стрелок

$$A \xleftarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} B, \quad (\varphi, \psi) \in \text{Hom}(Y, A) \times \text{Hom}(Y, B), \quad (1-13)$$

существует единственная стрелка $\varphi \times \psi : Y \rightarrow A \times B$, такая что $\beta_Y(\varphi \times \psi) = (\varphi, \psi)$. Коммутативная диаграмма²

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(A \times B, A \times B) & \xrightarrow{h_{A \times B}(\varphi \times \psi)} & \text{Hom}(Y, A \times B) \\ \beta_{A \times B} \downarrow & & \downarrow \beta_Y \\ \text{Hom}(A \times B, A) \times \text{Hom}(A \times B, B) & \xrightarrow{h_A(\varphi \times \psi) \times h_B(\varphi \times \psi)} & \text{Hom}(Y, A) \times \text{Hom}(Y, B), \end{array}$$

верхняя горизонтальная стрелка которой переводит $\text{Id}_{A \times B}$ в $\varphi \times \psi$, а композиция нижней и левой стрелок действуют на $\text{Id}_{A \times B}$ как

$$\text{Id}_{A \times B} \xrightarrow{\beta_{A \times B}} (\pi_A, \pi_B) \xrightarrow{h_A(\varphi \times \psi) \times h_B(\varphi \times \psi)} (\pi_A \circ (\varphi \times \psi), \pi_B \circ (\varphi \times \psi)),$$

¹Т. е. функториальные по всем участвующим множествам.

²Ср. с использованной в доказательстве леммы Йонеды диаграммой из форм. (1-11) на стр. 14

показывает, что равенство $\beta_Y(\varphi \times \psi) = (\varphi, \psi)$ равносильно равенствам $\varphi = \pi_A \circ (\varphi \times \psi)$ и $\psi = \pi_B \circ (\varphi \times \psi)$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.13. Пусть диаграмма $A \xleftarrow{\pi'_A} C \xrightarrow{\pi'_B} B$ тоже универсальна в том смысле, что для любой пары стрелок (1-13) существует единственная такая стрелка $Y \rightarrow C$, композиции которой с π'_A и π'_B равны φ и π соответственно. Убедитесь, что существует единственный изоморфизм $\gamma : C \simeq A \times B$, такой что $\pi_A \circ \gamma = \pi'_A$ и $\pi_B \circ \gamma = \pi'_B$. Покажите также, что любая пара стрелок

$$\alpha : A_1 \rightarrow A_2, \quad \beta : B_1 \rightarrow B_2$$

задаёт единственный морфизм $\alpha \times \beta : A_1 \times B_1 \rightarrow A_2 \times B_2$, такой что $\alpha \circ \pi_A = (\alpha \times \beta) \circ \alpha$ и $\beta \circ \pi_B = (\alpha \times \beta) \circ \beta$.

В категории множеств произведение $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. Снабжённое слабой топологией, в которой π_A и π_B непрерывны, это множество задаёт произведение и в категории топологических пространств. Снабжённое покомпонентными операциями, оно же является произведением групп, колец и модулей над кольцами.

ПРИМЕР 1.14 (КОПРОИЗВЕДЕНИЕ $A \otimes B$)

Двойственным образом, копроизведение $A \otimes B$ объектов $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$ произвольной категории \mathcal{C} определяется как объект, копредставляющий ковариантный функтор

$$Y \mapsto \text{Hom}(A, Y) \times \text{Hom}(B, Y)$$

из \mathcal{C} в $\mathcal{S}et$. Обращая все стрелки в предыдущем примере, мы можем охарактеризовать копроизведение как объект, включающийся в диаграмму

$$A \xrightarrow{\iota_A} A \otimes B \xleftarrow{\iota_B} B,$$

универсальную в том смысле, что для любой пары стрелок в \mathcal{C}

$$A \xrightarrow{\varphi} Y \xleftarrow{\psi} B$$

имеется единственный морфизм $\varphi \otimes \psi : A \otimes B \rightarrow Y$, такой что $\varphi = (\varphi \otimes \psi) \circ \iota_A$ и $\psi = (\varphi \otimes \psi) \circ \iota_B$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.14. Убедитесь, что если такая универсальная диаграмма существует, то она единственна с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со стрелками ι_A, ι_B , и что любая пара стрелок $\alpha : A_1 \rightarrow A_2, \beta : B_1 \rightarrow B_2$ задаёт единственный такой морфизм $\alpha \otimes \beta : A_1 \otimes B_1 \rightarrow A_2 \otimes B_2$, что $\iota_A \circ \alpha = (\alpha \otimes \beta) \circ \alpha$.

Копроизведение в категории множеств и топологических пространств это дизъюнктное объединение $A \otimes B = A \sqcup B$. В категории групп это свободное произведение групп¹

¹Т. е. фактор свободной группы, порождённой дизъюнктным объединением $A \sqcup B$, по наименьшей нормальной подгруппе соотношений, позволяющих заменять пару соседних лежащих в одной группе букв их произведением. К примеру, $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \simeq \mathbb{F}_2$ это свободная (некоммутативная) группа с двумя образующими.

$A \otimes B = A * B$. В категории модулей над кольцом¹ копроизведение совпадает с произведением и равно прямой сумме модулей $A \otimes B = A \times B = A \oplus B$. В категории коммутативных колец с единицей копроизведение $A \otimes B$ это тензорное произведение колец².

ПРИМЕР 1.15 (свободные модули)

Обозначим через $R\text{-Mod}$ категорию левых модулей над фиксированным кольцом R . Для любого множества $E \in \text{Ob } \mathcal{S}et$ ковариантный функтор

$$R\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{S}et, \quad M \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{S}et}(E, M),$$

копредставим свободным R -модулем с базисом E . Мы будем обозначать такой свободный модуль через $R \otimes E$. По определению, он состоит из формальных линейных комбинаций $\sum_{e \in E} x_e e$ элементов множества E с коэффициентами $x_e \in R$, лишь конечное число из которых отлично от нуля.

УПРАЖНЕНИЕ 1.15. Установите функториальный по M и E изоморфизм

$$\text{Hom}_{R\text{-Mod}}(R \otimes E, M) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{S}et}(E, M). \quad (1-14)$$

¹В частности, в категории $\mathcal{A}b$ абелевых групп.

²Т. е. тензорное произведение подлежащих абелевых групп, как модулей над \mathbb{Z} , с покомпонентным умножением: $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 \cdot a_2) \otimes (b_1 \cdot b_2)$.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.1. Транзитивность очевидна, рефлексивность — взять $\xi = \text{Id}$, кососимметричность: в силу возможности сокращать слева (соотв. справа), равенства $\varphi = \psi\xi = \varphi\xi'\xi$ (соотв. $\varphi = \xi\psi = \xi\xi'\psi$) влекут $\xi'\xi = \text{Id}$ (соотв. $\xi\xi' = \text{Id}$), а равенства $\psi = \varphi\xi' = \psi\xi\xi'$ (соотв. $\psi = \varphi\xi' = \psi\xi\xi'$) влекут $\xi\xi' = \text{Id}$ (соотв. $\xi\xi' = \text{Id}$)

Упр. 1.7. Типичный ответ: « $\ln |x| + C$, где C — произвольная константа» неверен¹. На самом деле C является сечением *постоянного пучка* \mathbb{R}^\sim над несвязным открытым множеством $\mathbb{R} \setminus 0$.

Упр. 1.12. Элементу $a \in F(A)$ отвечает естественное преобразование

$$f_X : \text{Hom}(A, X) \rightarrow F(X),$$

посылающее стрелку $\varphi : A \rightarrow X$ в значение отображения $F(\varphi) : F(A) \rightarrow F(X)$ на элементе a . Обратное отображение сопоставляет естественному преобразованию f_* значение отображения $f_A : h^A(A) \rightarrow F(A)$ на элементе $\text{Id}_A \in h^A(A)$. Проверяется это с помощью построенной по произвольной стрелке $\varphi : A \rightarrow X$ диаграммы

$$\begin{array}{ccc} h^A(A) = \text{Hom}(A, A) & \xrightarrow{h^A(\varphi)} & \text{Hom}(A, X) = h^A(X) \\ f_A \downarrow & & \downarrow f_X \\ F(A) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(X), \end{array} \quad (3-8)$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ , так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)(f_A(\text{Id}_A))$.

¹И в былые годы абитуриентам мехмата случалось получать за такой ответ двойку на устном вступительном экзамене по математике.