Итоговый письменный экзамен за семестровый курс

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Для получения 100%-ного результата достаточно набрать 50 баллов.

Задача 1 (10 баллов). Задайте на трёхточечном множестве $X = \{1, 2, 3\}$ топологию, а также пару пучков F, G и морфизм $\varphi : F \to G$ так, чтобы индуцированные морфизмы слоёв $\varphi_x : F_x \to G_x$ были сюрьективны во всех точках $x \in X$, однако морфизмы сечений $\varphi_U : F(U) \to G(U)$ были сюрьективны не над всеми открытыми $U \subset X$.

Задача 2 (10 баллов). Пусть аффинное алгебраическое многообразие X над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ является объединением неприводимых многообразий[1] $X_1, X_2, \dots, X_m$ с координатными алгебрами $A_i = \Bbbk[X_i]$ и полями рациональных функций[2] $K_i = \Bbbk(X_i)$. Покажите, что всюду плотные[3] открытые подмножества $U \subset X$ образуют обратную фильтрующуюся систему и найдите $\underset{\rightarrow}{\operatorname{colim}}\, \mathcal{O}_X(U)$ по этой системе, где $\mathcal{O}_X$ — структурный пучок[4].

Задача 3 (10 баллов). Рассмотрим бикомплекс $\mathbb{Z}$-модулей

$$C_{p,q} = \begin{cases} \mathbb{Z}/(4) & \text{при } q \geqslant 0 \\ 0 & \text{при } q < 0\,, \end{cases}$$

с дифференциалами ∂_1 и ∂_2 бистепеней $(-1, 0)$ и $(0, -1)$, действующими между ненулевыми компонентами $C_{p,q}$ умножением на 2: $z \mapsto 2z \pmod 4$. Вычислите гомологии комплексов

$$T_n = \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q} \quad \text{и} \quad T'_n = \prod_{p+q=n} C_{p,q}$$

(оба с дифференциалом $\partial = \partial_1 + \partial_2$).

Задача 4 (10 баллов). Обозначим через X алгебраическое многообразие $\mathbb{A}^3 \smallsetminus V(x_1, x_2)$ над полем $\mathbb{C}$ (т. е. трёхмерное аффинное пространство без координатной прямой x_3). Вычислите все когомологии $H^k\left(X, \mathcal{O}_X\right)$ его структурного пучка $\mathcal{O}_X$.

Задача 5 (10 баллов). Пусть гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}_n$ над полем $\mathbb{C}$ задаётся однородным уравнением степени d. Вычислите размерности $\dim H^i(X, \mathcal{O}_X)$ для всех $i \geqslant 0$.

Задача 6 (10 баллов). Пусть $f : Z \hookrightarrow X$ это вложение компактного замкнутого подмножества Z в локально компактное[5] топологическое пространство X. Покажите, что $f^*F(Z) \simeq F_Z$ для любого пучка множеств F на X.

Задача 7 (10 баллов). Пусть локально компактное топологическое пространство X является локально конечным[6] объединением компактных замкнутых подмножеств $Z_\alpha \subset X$. Обозначим через

---

[1] Алгебраическое многообразие называется *неприводимым*, если оно не представляется в виде объединения двух непустых замкнутых по Зарисскому подмножеств. Для аффинного многообразия X неприводимость равносильна целостности его координатной алгебры $\Bbbk[X]$. Каждое аффинное алгебраическое многообразие над произвольным полем является объединением конечного числа неприводимых.

[2] *полем рациональных функций* неприводимого аффинного алгебраического многообразия X называется поле частных $\Bbbk(X)$ целостного кольца $\Bbbk[X]$

[3] в топологии Зарисского

[4] Сечения пучка $\mathcal{O}_X$ над открытым (по Зарисскому) множеством $U \subset X$ это функции $f : U \to \Bbbk$, представляющиеся в окрестности каждой точки $p \in U$ в виде φ/ψ, где φ, ψ — многочлены и $\psi(p) \neq 0$

[5] топологическое пространство называется *локально компактным*, если оно хаусдорфово и у каждой его точки есть компактная окрестность

[6] т. е. каждая точка $x \in X$ покрывается конечным числом множеств $Z_\alpha \subset X$

$\iota_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_p} : Z_{\alpha_0} \cap \dots \cap Z_{\alpha_p} \hookrightarrow X$ тавтологическое вложение и для каждого пучка абелевых групп F на X положим $F_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_p} \stackrel{\text{def}}{=} \iota_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_p *}\iota^*_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_p}F$. Постройте для каждого $i = 0, 1, \dots, p+1$ морфизм пучков $\partial_i : F_{\alpha_0\dots\hat{\alpha}_i\dots\alpha_{p+1}} \to F_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_{p+1}}$, организуйте из них точный комплекс пучков

$$0 \to F \to \prod_{\alpha} F_\alpha \to \prod_{\alpha,\beta} F_{\alpha\beta} \to \prod_{\alpha,\beta,\gamma} F_{\alpha\beta\gamma} \to \cdots$$

на X и получите из него сходящуюся к $H^{p+q}(X, F)$ спектральную последовательность с

$$E_1^{p,q} = \prod_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_p} H^q\left(Z_{\alpha_0} \cap \dots \cap Z_{\alpha_p}, \iota^*_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_p}F\right) = \prod_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_p} H^q\left(X, F_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_p}\right)$$

и индуцированным морфизмами ∂_i дифференциалом $d_1^{p,q} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i H^q(\partial_i)$.