Симметрические функции

ТП3⋄1. Выясните, являются ли симметрическими многочлены
а) $\sum_{i\neq j} x_i^2 x_j$ **б)** $\sum_{j<k}\sum_{i\notin\{j,k\}} x_i(x_j-x_k)^2$
в) $(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$
г) $(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_4)(x_1+x_3)(x_2+x_4)(x_1+x_4)$,
и если да, выразите их через $e_k=\sum_{i_1<\ldots<i_k} x_{i_1}\ldots x_{i_k}$.

ТП3⋄2. Выразите дискриминант[1] кубического трёхчлена x^3+px+q через p и q.

ТП3⋄3. Найдите все $\lambda\in\mathbb{C}$, при которых многочлен $x^4-4\,x+\lambda$ имеет кратный корень.

ТП3⋄4. Сумма двух из корней многочлена $2\,x^3-x^2-7\,x+\lambda$ в поле $\mathbb{C}$ равна 1. Найдите λ.

ТП3⋄5. Многочлен $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ имеет корни $x_1,\ldots,x_n$. Всякий ли симметрический многочлен от $x_2,\ldots,x_n$ переписывается в виде многочлена от x_1?

ТП3⋄6. Решите в поле $\mathbb{C}$ систему уравнений $x_1+x_2+x_3=x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3=24$.

ТП3⋄7. Вычислите сумму **а)** шестых степеней **б)** обратных кубов комплексных корней многочлена x^4+2x^2+x-1.

ТП3⋄8. Пусть $\zeta\in\mathbb{C}$ порождает мультипликативную группу корней m-той степени из 1.
а) Для каждого $a\in\mathbb{C}$ раскройте скобки и приведите подобные в $\prod_{\nu=1}^m(a-\zeta^{\nu-1}x)$.
б) Покажите, что $\forall\, f\in\mathbb{C}[x]\ \exists\, h\in\mathbb{C}[x]$: $\prod_{\nu=1}^m f(\zeta^{\nu-1}x)=h(x^m)$.
в) Выразите корни многочлена h через корни многочлена f.

ТП3⋄9. Найдите в $\mathbb{C}[x]$ многочлен 4-й степени, корнями которого являются
а) квадраты всех комплексных корней многочлена $x^4+2\,x^3-x+3$
б) кубы всех комплексных корней многочлена x^4-x-1.

ТП3⋄10*. Вычислите дискриминант n-того кругового многочлена[2] $\Phi_n(x)$. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для всех $n=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$.

ТП3⋄11. Выразите **а)** $s_{(1^n)}$ через e_ν **б)** $s_{(n)}$ через h_ν.

ТП3⋄12. Представьте **а)** $s_{(1)}^2$ **б)** $s_{(1,1)}\cdot s_{(2)}$ в виде целочисленных линейных комбинаций многочленов s_λ.

ТП3⋄13*. Покажите, что в кольце формальных степенных рядов с рациональными коэффициентами от матричных элементов $n\times n$ матрицы A выполняется равенство

$$\ln\det(E-A)=\operatorname{tr}\ln(E-A)\,,$$

а для всех достаточно малых комплексных матриц A оно выполняется и численно.

ТП3⋄14*. Положим $h_0=e_0=1$ и $h_k=e_k=0$ при $k<0$. Покажите, что матрицы $\left(h_{i-j}\right)$ и $\left((-1)^{i-j}e_{i-j}\right)$ обратны друг другу и получите отсюда соотношение

$$\det\left(h_{\lambda_i+j-i}\right)=\det\left(e_{\lambda_i^t+j-i}\right)$$

на дополнительные миноры этих матриц.

[1] *Дискриминантом* приведённого многочлена $f(x)=\prod_i(x-\alpha_i)$ называется произведение $\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2$.

[2] Т. е. приведённого многочлена степени $\varphi(n)$, корнями которого являются все примитивные комплексные корни степени n из единицы.

Персональный табель ______________________________________.   **Листок № 3 (7.03.2023)**

(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	**дата**	**кто принял**	**подпись**
1а			
б			
в			
г			
2			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
8а			
б			
в			
9а			
б			
10			
11а			
б			
12а			
б			
13			
14			