# Тензорная алгебра

**ТП1◇1.** Докажите, что все полилинейные отображения $V_1\times\ldots\times V_n \to W$ во все пространства $W$ зануляются на наборе векторов $(v_1, \ldots, v_n) \in V_1 \times \ldots \times V_n$ если и только если хотя бы один из $v_i$ нулевой?

**ТП1◇2.** Пользуясь изоморфизмом $U^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(U,V)$, запишем операторы $g: U \to V$ и $f: V \to W$ в виде $g = \sum_i \gamma_i \otimes v_i$, $f = \sum_j \varphi_j \otimes w_j$ с $\gamma_i \in U^*$, $v_i \in V$, $\varphi_j \in V^*$, $w_j \in W$. Запишите в таком же виде их композицию $fg \in \mathrm{Hom}(U,W) \simeq U^* \otimes W$.

**ТП1◇3.** Пусть векторы $e_i \in V$ и ковекторы $x_i \in V^*$ образуют двойственные базисы. В какой оператор $V \to V$ переводит изоморфизм $V^* \otimes V \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V)$ *тензор Казимира* $\sum_i x_i \otimes e_i$?

**ТП1◇4.** Покажите, что отображение $\tau:\ \mathrm{Hom}(V,V) \simeq V^* \otimes V \to (V \otimes V^*)^* \simeq \mathrm{Hom}(V,V)^*$, переводящее $\xi \otimes v$ в линейную форму, значение которой на $v' \otimes \xi'$ равно $\xi(v') \cdot \xi'(v)$, корректно определено и задаёт на пространстве $\mathrm{Hom}(V,V)$ корреляцию[1]. Какой билинейной форме на $\mathrm{Hom}(V,V)$ она отвечает? Вырождена ли эта форма? Симметрична ли? Как она записывается в терминах матриц? Что за квадратичная форма ей соответствует?

**ТП1◇5.** Для конечномерных $U$, $V$, $W$ постройте изоморфизмы **а)** $U^* \otimes V^* \simeq (U \otimes V)^*$
**б)** $\mathrm{Hom}(U \otimes W, V) \simeq \mathrm{Hom}(W, \mathrm{Hom}(U,V))$ и $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(U,W),V) \simeq \mathrm{Hom}(W, U \otimes V)$
**в)** $\mathrm{Hom}\big(U \otimes \mathrm{Hom}(U,W)\,,\ W\big) \simeq \mathrm{End}\big(\mathrm{Hom}(U,W)\big) \simeq \mathrm{Hom}\big(U\,,\ \mathrm{Hom}(U,W)^* \otimes W\big)$
**г)** $\mathrm{End}(U \otimes V \otimes W) \simeq \mathrm{Hom}\big(\mathrm{Hom}(U,V) \otimes \mathrm{Hom}(V,W), \mathrm{Hom}(U,W)\big)$.

**ТП1◇6*.** В какое линейное отображение $\mathrm{Hom}(U,V) \otimes \mathrm{Hom}(V,W) \to \mathrm{Hom}(U,W)$ переходит в зад. ТП1◇5 (г) тождественный эндоморфизм пространства $U \otimes V \otimes W$?

**ТП1◇7*.** Какому эндоморфизму пространства $\mathrm{Hom}(U,W)$ отвечает в зад. ТП1◇5 (в) отображение $c: U \otimes \mathrm{Hom}(U,W) \to W$, $u \otimes \varphi \mapsto \varphi(u)$? Как устроено ядро соответствующего ему линейного оператора $U \to \mathrm{Hom}(U,W)^* \otimes W$?

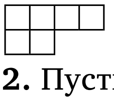
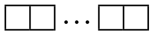
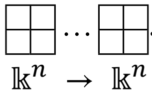
**ТП1◇8.** Постройте изоморфизм пространства $n$-линейных форм $V^* \times \ldots \times V^* \to \Bbbk$
**а)** с пространством $V^{\otimes n}$, если $\dim V < \infty$ **б)** с пространством, двойственным к $V^{*\otimes n}$.

**ТП1◇9.** Найдите размерность пространства таких трилинейных форм $\varphi: V \times V \times V \to \Bbbk$, что $\forall\, u,v,w \in V$ **а)** $\varphi(u,v,w) = \varphi(v,u,w) = \varphi(u,w,v)$ **б)** $\varphi(u,v,w) = \varphi(v,u,w)$ **в*)** $\varphi(u,u,u) = 0$ **г)** $\varphi(u,v,w) = \varphi(v,u,w) = \varphi(u,w,w)$ **д)** $\varphi(u,v,v) = \varphi(u,u,v) = 0$ **е*)** $\varphi(u,v,w) = \varphi(v,w,u)$ **ж*)** $\varphi(u,v,w) + \varphi(v,w,u) + \varphi(w,u,v) = 0$.

**ТП1◇10 (тензорное произведение линейных отображений).** Покажите, что любой набор линейных отображений $f_i: U_i \to W_i$ корректно задаёт линейное отображение

$$f_1 \otimes \ldots \otimes f_n: U_1 \otimes \ldots \otimes U_n \to W_1 \otimes \ldots \otimes W_n\,, \quad u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \mapsto f_1(u_1) \otimes \ldots \otimes f_n(u_n)\,.$$

Как связана матрица тензорного произведения двух операторов с матрицами самих операторов? Верно ли, что если $f$ инъективен или сюрьективен, то таков же и $f \otimes \mathrm{Id}$?

**ТП1◇11.** Опишите цикловой тип тензорного квадрата $f \otimes f: V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ нильпотентного оператора $f: V \to V$ в терминах диаграммы Юнга оператора $f$. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для оператора $f$ циклового типа
**а)**  **б)**  **в)** .

**ТП1◇12.** Пусть операторы $f: \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ и $g: \Bbbk^m \to \Bbbk^m$ диагонализуемы с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и $\mu_1, \ldots, \mu_m$. Найдите все собственные значения $f \otimes g$ и их кратности.

[1] Напомню, что *корреляцией* (или, на физической фене, *спуском индексов*) называется линейное отображение $\beta: V \to V^*$. Пространство корреляций изоморфно пространству билинейных форм $b: V \times V \to \Bbbk$. Изоморфизм переводит корреляцию $\beta$ в форму $b(u,w) = \langle\, u\,,\ \beta(w)\,\rangle$ (свёртка вектора $u \in V$ и ковектора $\beta(w) \in V^*$). Билинейная форма $b$ называется *вырожденной*, если существует такой вектор $u$, что $b(u,v) = 0$ для всех $v$. Форма $b$ называется *симметричной*, если $b(u,w) = b(w,u)$ для всех $u$, $w$. Каждая билинейная форма $b: V \times V \to \Bbbk$ задаёт *квадратичную* форму $q_b: V \to \Bbbk$, $q_b(v) = b(v,v)$.

Персональный табель ________________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

**Листок № 1 (7.02.2023)**

| № | дата | кто принял | подпись |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5а | | | |
| б | | | |
| в | | | |
| г | | | |
| 6 | | | |
| 7 | | | |
| 8 | | | |
| 9а | | | |
| б | | | |
| в | | | |
| г | | | |
| д | | | |
| е | | | |
| ж | | | |
| 10 | | | |
| 11а | | | |
| б | | | |
| в | | | |
| 12 | | | |