§6. Основные понятия теории представлений.

6.1. Представления множества операторов. Для произвольного множества R условимся обозначать через $R \otimes \Bbbk$ векторное пространство с базисом R над полем $\Bbbk$, состоящее из всевозможных конечных формальных линейных комбинаций элементов из R с коэффициентами в $\Bbbk$, а через $A_R \overset{\text{def}}{=} T(R \otimes \Bbbk)$ — тензорную алгебру этого векторного пространства, т. е. свободную ассоциативную $\Bbbk$-алгебру, порождённую множеством R.

Например, если множество $R = \{t\}$ состоит из одного элемента t, то векторное пространство $t \otimes \Bbbk = \Bbbk\, t$ одномерно с базисом t, а ассоциативная алгебра $A_t = T(\Bbbk\, t)$, т. е. тензорная алгебра одномерного векторного пространства, изоморфна алгебре $\Bbbk[t]$ многочленов от одной переменной: изоморфизм сопоставляет базисному тензору $t \otimes \ldots \otimes t \in (\Bbbk\, t)^{\otimes n}$ моном t^n.

Отображение $\varrho : R \to \operatorname{End}(W)$ множества R в алгебру линейных эндоморфизмов какого-нибудь векторного пространства W над полем $\Bbbk$ называется *линейным представлением* множества R эндоморфизмами пространства W. По универсальному свойству свободной алгебры A_R, линейные представления $\varrho : R \to \operatorname{End}(W)$ биективно соответствуют гомоморфизмам ассоциативных алгебр $\tilde{\varrho} : A_R \to \operatorname{End}(W)$. Последние называются *линейными представлениями* алгебры A_R в пространстве W. Пространство W с фиксированным на нём представлением множества R или алгебры A_R называется, соответственно, R-модулем или A_R-модулем. И то, и другое равносильно сопоставлению каждому элементу $f \in R$ линейного оператора $\varrho(f) : W \to W$. Произвольные тензоры $f = \sum_{f_1,\ldots f_m \in R} x_{f_1 \ldots f_m} f_1 \otimes \ldots \otimes f_m \in A_R$ с $f_\nu \in R$, $x_{f_1 \ldots f_m} \in \Bbbk$ при этом представляются линейными операторами $\tilde{\varrho}(f) = \sum x_{f_1 \ldots f_m} \varrho(f_1) \circ \varrho(f_2) \circ \ldots \circ \varrho(f_m) : W \to W$, а образ гомоморфизма алгебр $\tilde{\varrho} : A_R \to \operatorname{End}(W)$ состоит из всех операторов $W \to W$, которые можно получить из представляющих элементы множества R операторов $\varrho(f)$ при помощи композиций, сложения и умножения на числа. Он называется *ассоциативной оболочкой* множества операторов $\varrho(R) \subset \operatorname{End}(W)$ и обозначается $\operatorname{Ass}\big(\varrho(R)\big) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{im} \tilde{\varrho}$.

Когда понятно, о каком представлении ϱ идёт речь, мы обозначаем результат применения оператора $\tilde{\varrho}(f)$, где $f \in A_R$, к вектору $w \in W$ просто через fw. Для подпространства $U \subset W$ и набора операторов $F \subset A_R$ мы полагаем $FU \overset{\text{def}}{=} \{fu \mid f \in F,\ u \in U\}$.

6.1.1. Разложимость, приводимость и полупростота. Векторное подпространство U в R-модуле W называется *R-подмодулем* или *R-инвариантным подпространством*, если $RU \subset U$.

Упражнение 6.1 (фактор модули). Убедитесь, что для всякого R-подмодуля $U \subsetneq W$ на фактор пространстве $V = W/U$ имеется структура R-модуля, на котором элементы $f \in R$ действуют по правилу $f[w] \overset{\text{def}}{=} [fw]$, где $[w] = w + U$ означает класс вектора $w \in W$ по модулю U.

Отличные от W подмодули $U \subsetneq W$ называются *собственными*.

Ненулевой R-модуль W называется *простым*, если у него нет ненулевых собственных подмодулей. Задающее такой модуль представление $\varrho : R \to \operatorname{End}(W)$ называется *неприводимым*.

Ненулевой R-модуль W и соответствующее ему представление называются *разложимыми*, если W является прямой суммой своих ненулевых собственных R-подмодулей. Всякий конечномерный R-модуль является прямой суммой неразложимых, однако бывают неразложимые непростые модули. Если R-модуль W является прямой суммой простых R-подмодулей, то он называется *полупростым*, а соответствующее представление $\varrho : R \to \operatorname{End}(W)$ — *вполне приводимым*. Обратите внимание, что каждый неприводимый R-модуль по определению полупрост и неразложим, и что прямая сумма любого множества полупростых модулей полупроста.

Упражнение 6.2. Убедитесь, что для заданных подпространств $U_1, U_2 \subset W$ условия $RU_1 \subset U_2$ и $A_R U_1 \subset U_2$ равносильны, и выведите отсюда, что простота, полупростота и разложимость пространства W относительно произвольного множества операторов $S \subset \mathrm{End}(W)$ и относительно ассоциативной оболочки $\mathrm{Ass}(S)$ этих операторов означают одно и то же.

Пример 6.1 (пространство с одним оператором)
Если множество R состоит из одного элемента t, то $A_R \simeq \Bbbk[t]$ является кольцом многочленов от этого элемента. Представление $\varrho : R \to \mathrm{End}\, W$ заключается в выборе на пространстве W линейного оператора $f = \varrho(t) : W \to W$ и наделяет пространство W структурой модуля над кольцом многочленов, которая задаётся гомоморфизмом

$$\tilde{\varrho} = \mathrm{ev}_f : \Bbbk[t] \to \mathrm{End}(W)\,, \; t \mapsto f\,, \tag{6-1}$$

переводящим многочлен $F \in \Bbbk[t]$ в результат подстановки в него оператора f вместо переменной t. Если пространство W конечномерно, гомоморфизм (6-1) имеет ненулевое ядро — главный идеал (μ_f), порождённый приведённым многочленом наименьшей степени, аннулирующим оператор[1] f. Ассоциативная оболочка оператора f, т. е. образ гомоморфизма (6-1), представляет собою множество всех многочленов от оператора f и изоморфна фактор алгебре $\Bbbk[t]/(\mu_f)$. По теореме о строении конечно порождённых модулей над кольцом главных идеалов[2] конечномерный $\Bbbk[t]$-модуль W, будучи модулем кручения, изоморфен прямой сумме фактор модулей

$$\frac{\Bbbk[t]}{(p_1^{m_1})} \oplus \ldots \oplus \frac{\Bbbk[t]}{(p_s^{m_s})}\,, \tag{6-2}$$

где все многочлены $p_i \in \Bbbk[t]$ неприводимы и приведены, а действие оператора состоит в умножении на t, и два таких модуля изоморфны если и только если они отличаются друг от друга перестановкой прямых слагаемых. В частности, всякое неразложимое пространство с оператором изоморфно пространству $\Bbbk[t]/(p^m)$ с оператором умножения на t, и два таких пространства с разными p или m не изоморфны друг другу.

Упражнение 6.3. Убедитесь, что $\Bbbk[t]$-модуль $\Bbbk[t]/(p^m)$ неприводим если и только если $m = 1$.

Тем самым, всякое неприводимое пространство с оператором изоморфно $\Bbbk[t]/(p)$, где $p \in \Bbbk[t]$ приведён и неприводим, а оператор действует умножением на t, а всякое полупростое — прямой сумме нескольких таких пространств.

Упражнение 6.4. Докажите, что оператор f над произвольным полем $\Bbbk$ диагонализуем если и только если он аннулируется многочленом, полностью разлагающимся в $\Bbbk[t]$ в произведение попарно различных линейных множителей[3].

Пример 6.2 (коммутирующие операторы)
Если линейные операторы $f, g : V \to V$ на векторном пространстве V над произвольным полем $\Bbbk$ коммутируют друг с другом, то ядро и образ любого многочлена $\varphi(f)$ от оператора f переводятся оператором g в себя, поскольку из $\varphi(f)u = 0$ вытекает, что $\varphi(f)gu = g\varphi(f)u = 0$, а из $u = \varphi(f)w$ вытекает, что $gu = g\varphi(f)w = \varphi(f)gw$. В частности, все собственные подпространства $V_\lambda = \ker(f - \lambda \mathrm{Id})$ оператора f инвариантны относительно любого перестановочного с f оператора g. Отсюда получается простое, но полезное

[1] Напомню, что он называется *минимальным многочленом* оператора f.

[2] См. лекцию http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2223/lec_06.pdf.

[3] В частности, если оператор диагонализуем на всём пространстве, то он диагонализуем и на любом своём инвариантном подпространстве

Предложение 6.1
В конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ любое множество коммутирующих друг с другом операторов обладает общим для всех операторов собственным вектором. Над произвольным полем $\Bbbk$ любое множество коммутирующих друг с другом диагонализуемых операторов на V можно одновременно диагонализовать в одном общем для всех операторов базисе.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если все операторы скалярны (что так при $\dim V = 1$), то доказывать нечего — подойдут, соответственно, любой ненулевой вектор и любой базис. Если среди операторов есть хоть один нескалярный оператор F, то над замкнутым полем у него есть собственное подпространство строго меньшей размерности, чем V, а в диагонализуемом случае V является прямой суммой таких собственных подпространств. Каждое собственное подпространство оператора F инвариантно для всех операторов, причём если операторы диагонализуемы на всём пространстве, то их ограничения на собственные подпространства оператора F останутся диагонализуемы по упр. 6.4. Применяя к собственным подпространствам оператора F предположение индукции, получаем требуемое. □

Лемма 6.1
Пусть R-модуль[1] W линейно порождается над $\Bbbk$ некоторым множеством $\mathcal{S}$ своих неприводимых R-подмодулей. Тогда для любого собственного R-подмодуля $U \subsetneq W$ найдётся такой R-подмодуль $V \subset W$, что[2] $W = U \oplus V$, причём в качестве V можно взять прямую сумму подходящих подмодулей из множества $\mathcal{S}$. Для нулевого подмодуля $U = 0$ это утверждение означает, что весь модуль W является прямой суммой подходящих подмодулей из множества $\mathcal{S}$. В частности, такой модуль W автоматически полупрост.

Доказательство. Так как $U \neq W$ и W линейно порождается подмодулями $S \in \mathcal{S}$, в множестве $\mathcal{S}$ найдётся подмодуль $S \not\subset U$. Сумма $U + S$ является прямой, поскольку пересечение $S \cap U \subsetneq S$, будучи собственным подмодулем неприводимого модуля S, равно нулю. Обозначим через $\mathcal{S}'$ множество всех полупростых подмодулей $M \subset W$, разложимых в прямую сумму модулей из $\mathcal{S}$ и таких, что сумма $U + M$ прямая. По предыдущему, множество $\mathcal{S}'$ непусто. Введём на нём частичный порядок, полагая $M_1 < M_2$, когда $M_2 = M_1 \oplus M$ для некоторого $M \in \mathcal{S}'$.

Упражнение 6.5. Убедитесь, что $\mathcal{S}'$ является полным чумом[3].

По лемме Цорна[4] в множестве $\mathcal{S}'$ имеется максимальный элемент V. Покажем, что $U \oplus V = W$. Если $U \oplus V \neq W$, то повторяя проведённое в начале доказательства рассуждение для подмодуля $U \oplus V$ в роли подмодуля U, мы найдём в $\mathcal{S}$ такой подмодуль $S \subset W$, что сумма $(U \oplus V) + S$ прямая. Это означает, что $V \oplus S \in \mathcal{S}'$ строго больше, чем V. Всё сказанное работает и для $U = 0$. □

Теорема 6.1
Модуль W полупрост если и только если каждый ненулевой подмодуль в W содержит простой ненулевой подмодуль и для каждого ненулевого собственного R-подмодуля $U \subset W$ найдётся такой R-подмодуль $V \subset W$, что $W = U \oplus V$.

[1] Не обязательно конечномерный как векторное пространство над $\Bbbk$.

[2] Всякий подмодуль V с таким свойством называется *дополнительным* к U.

[3] Т. е. каждое линейно упорядоченное подмножество в $\mathcal{S}'$ имеет верхнюю грань, см. раздел 1.7 на стр. 15 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_01.pdf.

[4] См. раздел 1.9 на стр. 17 той же лекции.

Доказательство. Если модуль W полупрост, т. е. является прямой суммой простых подмодулей, подмодуль $V \subset W$, дополнительный к произвольно заданному подмодулю $U \subset W$, существует по лем. 6.1, применённой к множеству $\mathcal{S}$ всех простых подмодулей в W.

Упражнение 6.6. Убедитесь, что проекция $\pi : W = U \oplus V \twoheadrightarrow U$, $u + v \mapsto u$, перестановочна с действием операторов из R, т. е. $\pi(fw) = f\pi(w)$ для всех $f \in R$ и $w \in W$.

Так как W линейно порождается простыми подмодулями, проекция π переводит хотя бы один из них в ненулевое векторное подпространство в U.

Упражнение 6.7. Убедитесь, что это подпространство является простым R-подмодулем в U.

Это доказывает прямую импликацию «только если». Чтобы доказать обратную импликацию, обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех полупростых ненулевых подмодулей $S \subseteq W$. Это множество непусто, поскольку содержит ненулевой простой подмодуль, имеющийся в W по условию. Зададим на $\mathcal{S}$ частичный порядок, полагая $S_1 < S_2$ когда $S_2 = S_1 \oplus S$ для некоторого $S \in \mathcal{S}$.

Упражнение 6.8. Убедитесь, что чум $\mathcal{S}$ полон.

По лемме Цорна, в $\mathcal{S}$ есть максимальный элемент M. Если он не совпадает с W, то найдётся такой ненулевой подмодуль $V \subset W$, что $W = M \oplus V$. Поскольку в V есть ненулевой простой подмодуль $S \subset V$, сумма $M \oplus S \in \mathcal{S}$ будет строго больше, чем M. Тем самым, $M = W$. □

Следствие 6.1 (критерии полупростоты)
Пусть каждый ненулевой R-подмодуль в R-модуле[1] W содержит в себе конечномерный ненулевой R-подмодуль. Тогда следующие свойства модуля W эквивалентны:

1) W полупрост
2) W линейно порождается над $\Bbbk$ простыми R-подмодулями
3) для любого ненулевого собственного R-подмодуля $U \subset W$ существует такой R-подмодуль $V \subset W$, что $W = U \oplus V$.

Доказательство. Если R-подмодуль конечномерен как векторное пространство над $\Bbbk$, то каждый его R-подмодуль минимальной положительной размерности автоматически прост. Поэтому каждый ненулевой подмодуль в W обладает простым ненулевым подмодулем, и условия (1) и (3) эквивалентны по теор. 6.1. Импликация (1) ⇒ (2) очевидна. Импликация (2) ⇒ (3) была установлена в лем. 6.1. □

6.1.2. Гомоморфизмы представлений. Линейное отображение $\varphi : W_1 \to W_2$ между R-модулями, отвечающими линейным представлениям $\varrho_1 : R \to \mathrm{End}(W_1)$ и $\varrho_2 : R \to \mathrm{End}(W_2)$, называется гомоморфизмом R-модулей[2], если оно перестановочно с действием всех операторов из R, т. е. для всех $f \in R$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} W_1 \arrow[r, "\varphi"] & W_2 \\ W_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[u, "\varrho_1(f)"] & W_2 \arrow[u, "\varrho_2(f)"'] \end{tikzcd}.$$

[1]Который не предполагается конечномерным.
[2]А также *сплетающим оператором*, *гомоморфизмом представлений* или *R-линейным отображением*.

Примером R-линейного отображения является проекция разложимого R-модуля $U \oplus V$ на подмодуль U вдоль подмодуля V из упр. 6.6 на стр. 65. Множество всех R-линейных гомоморфизмов обозначается через $\mathrm{Hom}_R(W_1, W_2) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi : W_1 \to W_2 \mid \forall\, w \in W_1,\ \forall\, f \in R\ \varphi(fw) = f\varphi(w)\}$.

Упражнение 6.9. Убедитесь, что а) $\mathrm{Hom}_R(W_1, W_2) = \mathrm{Hom}_{A_R}(W_1, W_2)$ является векторным подпространством в $\mathrm{Hom}(W_1, W_2)$ б) композиция R-линейных отображений R-линейна в) ядро и образ гомоморфизма R-модулей являются R-подмодулями г) образ и полный прообраз любого R-модуля относительно гомоморфизма R-модулей являются R-модулями.

Лемма 6.2 (лемма Шура)

Всякий ненулевой гомоморфизм неприводимых R-модулей является изоморфизмом. Если основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то все R-линейные эндоморфизмы неприводимого R-модуля скалярны, т. е. имеют вид $\lambda\,\mathrm{Id}$, где $\lambda \in \Bbbk$.

Доказательство. Пусть представления $\varrho_1 : R \to \mathrm{End}(W_1)$, $\varrho_2 : R \to \mathrm{End}(W_2)$ неприводимы, а линейное отображение $\varphi : W_1 \to W_2$ перестановочно со всеми операторами из R. Поскольку $\ker\varphi \subset W_1$ и $\mathrm{im}\,\varphi \subset W_2$ являются подмодулями простых модулей, либо $\ker\varphi = W_1$ и $\varphi = 0$, либо $\ker\varphi = 0$. Во втором случае, если $\varphi \neq 0$, то подмодуль $\mathrm{im}\,\varphi \subset W_2$ отличен от нуля, и значит, совпадает с W_2, т. е. φ одновременно инъективно и сюрьективно.

Рассмотрим теперь R-линейный эндоморфизм $\varphi : W \to W$. Для каждого $\lambda \in \Bbbk$ эндоморфизм $\lambda\,\mathrm{Id} - \varphi$ тоже R-линеен. Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, существует такое $\lambda_0 \in \Bbbk$, что R-подмодуль $\ker(\lambda_0\mathrm{Id} - \varphi) \neq 0$. Если W прост, то $\ker(\lambda_0\mathrm{Id} - \varphi) = W$ и $\varphi = \lambda_0\mathrm{Id}$. □

Следствие 6.2

Если основное поле алгебраически замкнуто, а R-модули U и W неприводимы, то

$$\dim \mathrm{Hom}_R(U, W) = \begin{cases} 0 & \text{если } U \text{ и } W \text{ не изоморфны} \\ 1 & \text{если } U \text{ и } W \text{ изоморфны.} \end{cases}$$

Доказательство. Любые два ненулевых изоморфизма $\varphi, \psi : U \xrightarrow{\sim} W$ пропорциональны, поскольку $\psi^{-1}\varphi = \lambda \cdot \mathrm{Id}_U$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk^*$. □

Следствие 6.3

Фактор модуль любого полупростого R-модуля W тоже полупрост.

Доказательство. По лемме Шура образ любого простого R-подмодуля $S \subset W$ при любой R-линейной сюрьекции $\pi : W \twoheadrightarrow U$ либо нулевой, либо изоморфен S и, стало быть, прост. Поскольку W линейно порождается простыми подмодулями $S \subset W$, модуль U линейно порождается ненулевыми подмодулями $\pi(S)$. □

Предложение 6.2

В условиях сл. 6.1 на стр. 65 полупростота R-модуля W равносильна тому, что для любого подмодуля $U \subset W$ существует такой R-линейный эндоморфизм $\pi_U \in \mathrm{End}_R(W)$, что $\pi_U^2 = \pi_U$ и $\mathrm{im}\,\pi_U = U$.

Доказательство. Если $W = U \oplus V$ для некоторого R-подмодуля $V \subset W$, то проектор

$$\pi_U : U \oplus V \to U \oplus V\,, \quad (u, v) \mapsto (u, 0)\,,$$

обладает требуемыми свойствами. Наоборот, если эндоморфизм π_U имеет $\pi_U^2 = \pi_U$, то он тождественно действует на своём образе: $\pi_U\pi_U w = \pi_U w$. Поэтому $\ker\pi_U \cap \operatorname{im}\pi_U = 0$. Так как каждый вектор $w \in W$ имеет разложение $w = \pi_U w + (w - \pi_U w)$, в котором $\pi_U w \in \operatorname{im}\pi_U$, а $w - \pi_U w \in \ker\pi_U$, мы заключаем, что $W = \operatorname{im}\pi_U \oplus \ker\pi_U$. В силу R-линейности π_U его ядро $\ker\pi_U$ является R-подмодулем в W. □

Следствие 6.4
Каждый подмодуль полупростого R-модуля тоже полупрост.

Доказательство. Пусть R-модуль L является ненулевым собственным подмодулем полупростого R-модуля W. Каждый R-подмодуль $U \subset L$, будучи подмодулем и в W, является образом R-линейного проектора $W \twoheadrightarrow U$. Ограничение этого проектора на подмодуль L является R-линейным проектором $L \twoheadrightarrow U$. □

6.2. Представления ассоциативной алгебры. Пусть A — ассоциативная алгебра над произвольным полем $\Bbbk$, а V — любое векторное пространство над $\Bbbk$. Гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр

$$\varrho : A \to \operatorname{End} V$$

называется *линейным представлением* алгебры A в векторном пространстве V. Пространство V называется в этой ситуации A-модулем. Представления ассоциативных алгебр являются специальными примерами представлений множеств операторов, и к ним в полной мере приложима вся терминология из n° 6.1.1 на стр. 62. Для двух A-модулей U, W мы полагаем

$$\operatorname{Hom}_A(U,V) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi : U \to W \mid \forall f \in A,\ \forall u \in U\ \varphi(fu) = f\varphi(u)\}$$

и называем такие отображения $\varphi : U \to W$ *A-линейными*. Когда $U = W$ все A-линейные эндоморфизмы A-модуля W образуют ассоциативную $\Bbbk$-подалгебру $\operatorname{End}_A(W) \subset \operatorname{End}_\Bbbk(W)$ в $\Bbbk$-алгебре всех $\Bbbk$-линейных эндоморфизмов векторного пространства W. Подалгебру $\operatorname{End}_A(W)$ обычно называют *централизатором* A в $\operatorname{End}_\Bbbk(W)$.

Пусть $W = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ является прямой суммой своих A-подмодулей V_ν. Обозначим через $\iota_\nu : V_\nu \hookrightarrow W$ вложение каждого из них в W, а через $\pi_\mu : W \twoheadrightarrow V_\mu$ — проекцию прямой суммы $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ на μ-е слагаемое.

Упражнение 6.10. Убедитесь, что $\sum_\nu \iota_\nu\pi_\nu = \operatorname{Id}_W$, $\pi_\nu\iota_\nu = \operatorname{Id}_{V_\nu}$ для всех ν, $\pi_\nu\iota_\mu = 0$ и $\iota_\mu\pi_\nu = 0$ для всех $\mu \neq \nu$.

Для каждого $\varphi \in \operatorname{End}(W)$ положим $\varphi_{\mu\nu} \overset{\text{def}}{=} \pi_\mu \circ \varphi \circ \iota_\nu$ и организуем эндоморфизмы $\varphi_{\mu\nu} : V_\nu \to V_\mu$ в квадратную матрицу $(\varphi_{\mu\nu})$. Исходный эндоморфизм φ восстанавливается из этой матрицы как

$$\varphi = \operatorname{Id}_W \circ \varphi \circ \operatorname{Id}_W = \left(\sum\nolimits_\mu \iota_\mu\pi_\mu\right) \circ \varphi \circ \left(\sum\nolimits_\nu \iota_\nu\pi_\nu\right) = \sum\nolimits_{\mu,\nu} \iota_\mu\varphi_{\mu\nu}\pi_\nu\,.$$

При этом $\varphi \in \operatorname{End}_A(W)$ если и только если все $\varphi_{\mu\nu} \in \operatorname{Hom}_A(V_\nu, V_\mu)$. Таким образом, имеет место изоморфизм векторных пространств

$$\operatorname{End}_A(W) \xrightarrow{\sim} \bigoplus\nolimits_{\mu,\nu} \operatorname{Hom}_A(V_\nu, V_\mu)\,, \quad \varphi \mapsto (\varphi_{\mu\nu})\,. \tag{6-3}$$

Упражнение 6.11. Убедитесь, что изоморфизм (6-3) переводит композицию эндоморфизмов в произведение матриц.

В ситуации, когда все слагаемые $V_\nu = V$ являются копиями одного и того же A-модуля V, изоморфизм (6-3) превращается в изоморфизм $\Bbbk$-алгебр

$$\mathrm{End}_A\left(V^{\oplus n}\right) \simeq \mathrm{Mat}_n\left(\mathrm{End}_A(V)\right) . \tag{6-4}$$

Теорема 6.2 (теорема о двойном централизаторе)
Пусть конечномерное векторное пространство V полупросто над ассоциативной подалгеброй $A \subset \mathrm{End}(V)$, и $B = \mathrm{End}_A(V)$. Тогда $\mathrm{End}_B(V) = A$.

Доказательство. Включение $A \subset \mathrm{End}_B(V)$ очевидно из определений. Чтобы установить обратное включение, зафиксируем в V базис $e_1, \dots , e_n$ и покажем, что для каждого B-линейного оператора $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$ найдётся такой оператор $a \in A$, что $\varphi e_i = ae_i$ при всех i — это обеспечит равенство $\varphi = a$. Рассмотрим n-кратную прямую сумму $W = V^{\oplus n}$ и введём на ней структуру модуля над алгебрами A, B и $\mathrm{End}_B(V)$, полагая $f\,(v_1, \dots , v_n) = (fv_1, \dots , fv_n)$ для каждого оператора f из A, из B или из $\mathrm{End}_B(V)$. Обозначим вектор $(e_1, \dots , e_n) \in W$ через e. Достаточно убедиться, что $\varphi e \in Ae$. Поскольку W полупрост как A-модуль, его A-подмодуль $Ae \subset W$ является образом некоторого A-линейного проектора $\pi : W \twoheadrightarrow Ae$, тождественно действующего на Ae. Если π коммутирует с φ, то $\varphi(e) = \varphi(\pi e) = \pi(\varphi e) \in Ae$, что и требуется. Покажем, что π действительно коммутирует с φ. Для этого запишем эндоморфизм $\pi : V^{\oplus n} \to V^{\oplus n}$ матрицей (π_{ij}) с элементами $\pi_{ij} \in \mathrm{End}(V)$, как это объяснялось выше. Так как π перестановочен с действием A на W, каждая компонента π_{ij} перестановочна с действием A на V, т. е. лежит в $\mathrm{End}_A(V) = B$. Поэтому диагональная матрица, по диагонали которой стоят одинаковые элементы $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$, коммутирует с π. $\square$

Следствие 6.5 (теорема Бернсайда)
Если основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, а конечномерное векторное пространство V неприводимо как модуль над множеством операторов $R \subset \mathrm{End}(V)$, то ассоциативная оболочка $\mathrm{Ass}(R) \subset \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ этих операторов совпадает со всей алгеброй эндоморфизмов $\mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$. В частности, все конечномерные неприводимые представления $A \to \mathrm{End}(V)$ любой ассоциативной алгебры A эпиморфны.

Доказательство. По лемме Шура[1] $\mathrm{End}_{\mathrm{Ass}(R)}(V) = \Bbbk$, откуда $\mathrm{End}_{\Bbbk}(V) = \mathrm{Ass}(R)$. $\square$

Упражнение 6.12. Докажите, что обратная импликация: если $\mathrm{Ass}(R) = \mathrm{End}(V)$, то R-модуль V неприводим, имеет место над любым полем $\Bbbk$.

6.3. Изотипные компоненты. Зафиксируем ассоциативную алгебру A. Для произвольных A-модулей U, W на тензорном произведении $\mathrm{Hom}_A(U, W) \otimes U$ имеется естественная структура A-модуля, на котором элементы $a \in A$ действуют по правилу $a(\varphi \otimes u) \overset{\text{def}}{=} \varphi \otimes (au)$. При этом каноническая свёртка

$$c_{WU} : \ \mathrm{Hom}_A(U, W) \otimes U \to W\,, \ \ \varphi \otimes u \mapsto \varphi(u)\,, \tag{6-5}$$

является A-линейным гомоморфизмом.

Упражнение 6.13. Убедитесь в этом.

[1] См. лем. 6.2 на стр. 66.

Для простого A-модуля U образ канонической свёртки ([6-5](#)) обозначается $W_U = \operatorname{im} c_{WU} \subset W$ и называется *U-изотипной компонентой* модуля W. Он равен сумме всех имеющихся в W неприводимых подмодулей, изоморфных модулю U. Действительно, всякий ненулевой гомоморфизм $\psi : U \to W$ инъективен, и любой вектор вида $\sum \psi_i(u_i) \in W$ с $u_i \in U$ и $\psi_i \in \operatorname{Hom}_A(U, W)$ лежит в сумме подмодулей $\psi_i(U) \subset W$, каждый из которых изоморфен U, и наоборот, если векторы $v_i = \psi_i(u_i)$ лежат в образах A-линейных вложений $\psi_i : U \hookrightarrow W$, то $\sum v_i = c(\sum \psi_i \otimes u_i)$.

Предложение 6.3

Всякий гомоморфизм A-модулей $\varphi : V \to W$ переводит U-изотипную компоненту $V_U \subset V$ в U-изотипную компоненту $W_U \subset W$. В частности, для любого подмодуля $V \subset W$ выполнено равенство $V_U = V \cap W_U$.

Доказательство. Гомоморфизм φ переводит любой лежащий в $\operatorname{im} c_{VU}$ вектор $\sum \psi_i(u_i)$, у которого $\psi_i \in \operatorname{Hom}_A(U, V)$, а $u_i \in U$, в вектор $\sum \varphi\psi_i(u_i) \in \operatorname{im} c_{WU}$, ибо $\varphi\psi_i \in \operatorname{Hom}_A(U, W)$. □

Предложение 6.4

Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ для любого неприводимого A-модуля U и произвольного A-модуля W каноническая свёртка (6-5) инъективна и, тем самым, задаёт изоморфизм

$$c_{WU} : \operatorname{Hom}_A(U, W) \otimes U \xrightarrow{\sim} W_U .$$

Доказательство. Будучи линейно порождённым простыми подмодулями, изоморфными U, модуль W_U полупрост и раскладывается в прямую сумму $W_U = \bigoplus_i V_i$ простых подмодулей V_i, каждый из которых изоморфен U. Зафиксируем для каждого i вложение $\psi_i : U \hookrightarrow W$, изоморфно отображающее U на подмодуль $V_i \subset W$. По сл. 6.2 пространство $\operatorname{Hom}_A(U, W) = \operatorname{Hom}_A(U, W_U) = \bigoplus_i \operatorname{Hom}_A(U, V_i)$ является прямой суммой одномерных пространств, порождённых вложениями ψ_i. Поэтому каждый элемент модуля $\operatorname{Hom}_A(U, W) \otimes U$ однозначно записывается в виде $\sum \psi_i \otimes u_i$ с $u_i \in U$. Если $c_{WU}(\sum \psi_i \otimes u_i) = \sum \psi_i(u_i) = 0$, то каждое слагаемое $\psi_i(u_i) \in V_i$ равно нулю в отдельности, ибо сумма $W_U = \bigoplus_i V_i$ прямая. Так как все ψ_i инъективны, все $u_i = 0$. □

Предложение 6.5 (изотипное разложение)

Если A-модуль W полупрост, то в любом его разложении в прямую сумму простых подмодулей сумма тех слагаемых, что изоморфны U, совпадает с U-изотипной компонентой $W_U \subset W$. В частности, она не зависит от выбора разложения W в прямую сумму простых подмодулей, и если зафиксировать в каждом классе изоморфных простых модулей какой-нибудь представитель U, то всякий полупростой модуль будет иметь каноническое *изотипное разложение*

$$W = \bigoplus_U W_U , \tag{6-6}$$

где суммирование происходит по всем неизоморфным друг другу неприводимым A-модулям U, для которых $\operatorname{Hom}_A(U, W) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $W = \bigoplus_i W_i$, где все W_i просты. Так как $\operatorname{Hom}_A(U, W) = \bigoplus_i \operatorname{Hom}_A(U, W_i)$ и $\operatorname{Hom}_A(U, W_j) = 0$ для всех $W_j \not\simeq U$, образ канонической свёртки (6-5) лежит в сумме тех подмодулей W_i, что изоморфны U. □

Определение 6.1
Для простого модуля U и полупростого модуля W количество изоморфных U слагаемых в любом разложении модуля W в прямую сумму неприводимых подмодулей, обозначается

$$m_U(W) \stackrel{\text{def}}{=} \dim W_U / \dim U\,, \tag{6-7}$$

и называется *кратностью* простого модуля U в полупростом модуле W.

Следствие 6.6
Над алгебраически замкнутым полем для всех конечномерных полупростых A-модулей V, W выполняются равенства $\dim \mathrm{Hom}_A(V,W) = \sum_U m_U(V)\, m_U(W) = \dim \mathrm{Hom}_A(W,V)$, где суммирование происходит по всем представителям U различных классов изоморфных простых модулей.

Доказательство. Пусть $V = \bigoplus_i V_i$ и $W = \bigoplus_j W_j$, где все V_i и W_j неприводимы. По лемме Шура пространства $\mathrm{Hom}_A(V_i, W_j)$ нулевые при $V_i \not\simeq W_j$ и одномерные при $V_i \simeq W_j$. Поэтому размерность пространства $\mathrm{Hom}_A(V,W) = \bigoplus_{ij} \mathrm{Hom}_A(V_i, W_j)$ равна $\sum_U m_U(U)\, m_U(W)$, и то же самое верно для $\mathrm{Hom}_A(W,V)$. □

Следствие 6.7
Над алгебраически замкнутым полем для любого конечномерного A-модуля W и каждого простого A-модуля W выполняется равенство $m_U(W) = \dim \mathrm{Hom}_A(U,W) = \dim \mathrm{Hom}_A(W,U)$.

6.4. Представления групп. Действие группы G линейными преобразованиями на векторном пространстве V над полем $\Bbbk$ или, что то же самое, гомоморфизм групп $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$, называется *линейным представлением* группы G в векторном пространстве V. Пространство V называется в этом случае G-модулем. Прямая сумма, тензорное произведение, а также внешние и симметрические степени G-модулей U, W канонически наделяются такими структурами G-модулей, что операторы $g \in G$ действуют по правилам

$$g(u \dotplus w) \stackrel{\text{def}}{=} (gu) \dotplus (gw) \qquad g(u \otimes w) \stackrel{\text{def}}{=} (fu) \otimes (gw)$$
$$g(u_1 \wedge u_2) \stackrel{\text{def}}{=} (gu_1) \wedge (gu_2) \qquad g(u_1 \cdot u_2) \stackrel{\text{def}}{=} (gu_1) \cdot (gu_2)\,.$$

Для любого G-подмодуля $V \subset W$ фактор пространство W/V также является G-модулем с действием $g[v] \stackrel{\text{def}}{=} [gv]$.

Упражнение 6.14. Убедитесь, что все эти формулы корректно задают гомоморфизмы группы G в $\mathrm{GL}(U \oplus W)$, $\mathrm{GL}(U \otimes W)$, $\mathrm{GL}\big(\Lambda(U)\big)$, $\mathrm{GL}\big(S(U)\big)$ и $\mathrm{GL}(W/V)$ соответственно.

Для каждого представления $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *двойственное представление* $\varrho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ определяется таким образом, чтобы свёртка векторов с ковекторами была G-инвариантна, т. е.

$$\forall g \in G,\ \forall \xi \in V^*,\ \forall w \in V \quad \langle\, \varrho^*(g)\,\xi\,,\, \varrho(g)\,w\,\rangle = \langle\, \xi\,,\, w\,\rangle\,. \tag{6-8}$$

Так как каждый оператор $\varrho(g)$ обратим, равенство (6-8) равносильно равенству

$$\langle\, \varrho^*(g)\xi\,,\, v\,\rangle = \langle\, \xi\,,\, \varrho(g^{-1})v\,\rangle\,,$$

которое означает, что оператор $\varrho^*(g) = \varrho(g^{-1})^*$ двойствен оператору $\varrho(g)^{-1}$ и переводит ковектор $\xi \in V^*$ в композицию $\xi \circ g^{-1} : v \mapsto \xi(g^{-1}v)$. В частности, матрица оператора $\varrho^*(g)$ в двойственном базисе получается из матрицы $\varrho(g)$ обращением и транспонированием.

Упражнение 6.15. Убедитесь, что $\varrho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ является гомоморфизмом групп.

Для любых двух представлений $\varrho : G \to \mathrm{GL}(U)$ и $\lambda : G \to \mathrm{GL}(W)$ представление $\varrho^* \otimes \lambda$ задаёт действие группы G на пространстве $U^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(U, V)$ всех линейных операторов $\varphi : U \to V$ по правилу

$$g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1} . \tag{6-9}$$

Упражнение 6.16. Убедитесь в этом.

Подпространство неподвижных векторов представления (6-9) обозначается

$$\mathrm{Hom}_G(U, V) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi : U \to V \mid \forall\, g \in G\ g\varphi = \varphi g\}$$

и называется пространством G-*инвариантных* операторов[1].

Пример 6.3 (проектор на инварианты)

Пусть имеется линейное представление группы G в векторном пространстве V. Векторы, неподвижные относительно всех преобразований из G, образуют в V подмодуль G-*инвариантов* $V^G \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid gv = v\ \ \forall\, g \in G\ \}$, на котором группа G действует тривиально. Если группа G конечна и её порядок не делится на характеристику поля $\Bbbk$, то любое линейное представление V группы G допускает G-линейную проекцию на подмодуль G-инвариантов, которая сопоставляет вектору $v \in V$ центр тяжести

$$v^\natural \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g \in G} gv \tag{6-10}$$

его G-орбиты[2] в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$.

Упражнение 6.17. Убедитесь прямым вычислением, что при $\mathrm{char}(\Bbbk) \nmid |G|$ оператор $v \mapsto v^\natural$ перестановочен с действием G и линейно проектирует V на V^G.

Теорема 6.3

Каждое линейное представление V конечной группы G над полем, характеристика которого не делит $|G|$, вполне приводимо[3].

Доказательство. Покажем, что любой G-подмодуль $U \subset V$ является образом G-линейного проектора[4]. Группа G действует на пространстве всех $\Bbbk$-линейных отображений $\mathrm{Hom}(V, U)$ по правилу $g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}$. Достаточно убедиться в том, что проекция на инварианты этого действия

$$\mathrm{Hom}(V, U) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_G(V, U), \quad \varphi \mapsto \varphi^\natural = |G|^{-1} \sum\nolimits_{g \in G} g\varphi g^{-1}$$

переводит проекторы V на U в проекторы V на U. Пусть $\pi : V \twoheadrightarrow U$ — любой $\Bbbk$-линейный проектор. Тогда $\mathrm{im}\, \pi^\natural \subset U$, так как $g\pi g^{-1} U \subset U$ для всех $g \in G$, а любой вектор $u \in U$ неподвижен относительно $\pi^\natural$, ибо $g^{-1}U \subset U$ и $\pi|_U = \mathrm{Id}_U$ влекут $g\pi g^{-1} u = gg^{-1} u = u$. □

[1] А также *сплетающих* операторов, G-*линейных* операторов или G-*гомоморфизмов*.

[2] Если $|G| \vdots \mathrm{char}(\Bbbk)$, то сумма весов элементов орбиты нулевая, и центр тяжести не определён.

[3] Т. е. является прямой суммой неприводимых представлений или, что то же самое, полупростым G-модулем.

[4] См. предл. 6.2 на стр. 66.

Лемма 6.3
Пусть $|G| = n$ и основное поле $\Bbbk$ имеет $\operatorname{char}\Bbbk \nmid n$ и содержит все[1] n корней n-й степени из единицы. Тогда все элементы группы G действуют в любом её конечномерном линейном представлении диагонализуемыми операторами.

Доказательство. Каждый оператор из группы G аннулируются многочленом $t^n - 1$, который в силу сделанных предположений не имеет кратных корней[2] и полностью раскладывается в $\Bbbk[t]$ на линейные множители. По упр. 6.4 такой оператор диагонализуем. □

Следствие 6.8
Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \nmid n$, содержащем все n корней n-й степени из единицы, и $G \subset \mathrm{GL}(V)$ — конечная группа. Все операторы из G одновременно диагонализуются в одном базисе если и только если группа G абелева.

Доказательство. Так как все диагональные матрицы коммутируют друг с другом, любая группа одновременно диагонализованных операторов абелева. Наоборот, в силу предл. 6.1 на стр. 64 любое множество коммутирующих диагонализуемых операторов можно диагонализовать одновременно. □

6.5. Пример: представления конечных абелевых групп. Из сл. 6.8 вытекает, что каждое конечномерное линейное представление конечной абелевой группы G над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}(\Bbbk) \nmid |G|$ является прямой суммой одномерных представлений. Поскольку на одномерном пространстве V все линейные операторы действуют скалярно, каждый оператор $g \in G$ действуют на векторы $v \in V$ по правилу

$$gv = \chi(g)\, v\,, \text{ где } \chi : G \to \Bbbk^* \text{ — мультипликативный гомоморфизм,} \tag{6-11}$$

сопоставляющий элементу $g \in G$ ту константу, на которую оператор g умножает все векторы из V. Гомоморфизмы абелевой группы G в мультипликативную группу поля $\Bbbk$ называются *мультипликативными характерами* группы G. Одномерный G-модуль, на котором G действует по формуле (6-11) обозначается через V_χ.

Упражнение 6.18. Убедитесь, что $V_\chi \simeq V_\psi$ как G-модули если и только если $\chi = \psi$ как гомоморфизмы из G в $\Bbbk^*$.

Поскольку $\chi(g)^{|G|} = \chi\left(g^{|G|}\right) = \chi(e) = 1$ для всех $g \in G$, множество значений любого мультипликативного характера $\chi : G \to \Bbbk^\times$ лежит в группе $\boldsymbol{\mu}_{|G|}(\Bbbk) \subset \Bbbk^*$ корней $|G|$-той степени из 1 в поле $\Bbbk$. Множество всех мультипликативных характеров $\chi : G \to \Bbbk^\times$ является мультипликативной абелевой подгруппой в алгебре $\Bbbk^G$ всех функций на группе G со значениями в поле $\Bbbk$. Эта подгруппа обозначается $G^\wedge$ и называется *двойственной по Понтрягину* к группе G. Единицей в $G^\wedge$ служит *тривиальный характер* $\chi_{\mathbb{1}} \equiv 1$, отвечающий тривиальному представлению. Обратный к $\chi \in G^\wedge$ характер χ^{-1} действует по правилу $\chi^{-1}(g) \overset{\text{def}}{=} \chi(g)^{-1} = \chi(g^{-1})$.

Упражнение 6.19. Проверьте, что характер тензорного произведения одномерных представлений абелевой группы равен произведению их характеров, а характер двойственного представления обратен характеру исходного.

[1] Если $\operatorname{char}\Bbbk \nmid n$, то у многочлена $t^m - 1$ нет кратных корней, поскольку его производная $mt^{m-1} \neq 0$ не имеет с ним общих корней.

[2] См. предыдущую сноску.

6.5.1. Представление в пространстве функций на группе. Любая группа G действует на пространстве $\Bbbk^G$ функций $G \to \Bbbk$ по правилу $g : f(x) \mapsto f(g^{-1}x)$.

Упражнение 6.20. Убедитесь, что это правило задаёт гомоморфизм любой[1] группы G в группу линейных автоморфизмов пространства $\Bbbk^G$.

Если группа G абелева, то для каждого характера $\chi \in G^\wedge$ изотипная компонента $\Bbbk^G_\chi$ представления группы G в пространстве $\Bbbk^G$ состоит из всех таких функций $f : G \to \Bbbk$, что

$$f(g^{-1}x) = \chi(g)f(x) \text{ для всех } x, g \in G. \tag{6-12}$$

Полагая в этом равенстве $x = e$, получаем $f(g^{-1}) = \chi(g)\,f(e)$ для всех $g \in G$ и, переобозначая g^{-1} через h, заключаем, что $f(h) = f(e)\chi(h^{-1}) = f(e)\chi^{-1}(h)$ для всех $h \in G$. Иными словами, каждая функция (6-12) пропорциональна характеру χ^{-1}, обратному к χ в группе $G^\wedge$. Мы заключаем, что изотипное разложение пространства функций на группе G имеет вид

$$\Bbbk^G = \bigoplus\nolimits_{\chi \in G^\wedge} \Bbbk\,\chi\,,$$

т. е. каждое из неприводимых представлений группы G содержится в представлении группы G на пространстве функций $G \to \Bbbk$ с кратностью один. В частности, $|G^\wedge| = |G|$ и характеры образуют базис пространства функций на группе G со значениями в поле $\Bbbk$.

Упражнение 6.21. Для произвольной[2] группы G покажите, что любое множество различных гомоморфизмов $G \to \Bbbk^*$ линейно независимо в пространстве $\Bbbk^G$.

Теорема 6.4 (двойственность Понтрягина)

Для каждого $g \in G$ функция вычисления $\mathrm{ev}_g : G^\wedge \to \Bbbk$, $\chi \mapsto \chi(g)$, является характером группы $G^\wedge$, а отображение $G \to G^{\wedge\wedge}$, $g \mapsto \mathrm{ev}_g$ является изоморфизмом групп.

Доказательство. Первое утверждение проверяется выкладкой

$$\mathrm{ev}_g(\chi_1\chi_2) = \chi_1(g)\,\chi_2(g) = \mathrm{ev}_g(\chi_1)\cdot \mathrm{ev}_g(\chi_2)\,.$$

Равенства $\mathrm{ev}_{g_1g_2}(\chi) = \chi(g_1g_2) = \chi(g_1)\cdot\chi(g_2) = \mathrm{ev}_{g_1}(\chi)\ \mathrm{ev}_{g_2}(\chi)$ показывают, что отображение $g \mapsto \mathrm{ev}_g$ является гомоморфизмом групп. Если элемент $g \in G$ лежит в его ядре, то $\chi(g) = 1$ для всех $\chi \in G^\wedge$ и g тривиально действует в любом конечномерном представлении группы G. Поэтому $f(g^{-1}x) = f(x)$ для любой функции $f : G \to \Bbbk$, что возможно только при $g = e$. Поскольку $|G^{\wedge\wedge}| = |G|$, инъективность гомоморфизма $g \mapsto \mathrm{ev}_g$ влечёт его биективность. □

6.5.2. Преобразование Фурье. На самом деле двойственность Понтрягина имеет место для всех локально компактных топологических абелевых групп, и конечные абелевы группы являются лишь первыми, простейшими примерами таких групп. В качестве двойственной к произвольной локально компактной топологической абелевой группе G берётся группа G *непрерывных* гомоморфизмов $G \to \mathbb{C}^*$. Например, мультипликативная группа $\mathrm{U}(1)$ комплексных чисел единичной длины двойственна по Понтрягину аддитивной группе целых чисел $\mathbb{Z}$: каждому $n \in \mathbb{Z}$ отвечает характер $\mathrm{U}(1) \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$, а каждому $e^{2\pi i t} \in \mathrm{U}(1)$ — характер $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$, $m \mapsto e^{2\pi i m t}$. Аддитивная группа $\mathbb{R}$ вещественных чисел двойственна сама себе: каждому $\alpha \in \mathbb{R}$ отвечает характер $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto e^{2\pi i \alpha x}$.

[1] В том числе неабелевой.

[2] Не обязательно абелевой.

Каждая достаточно регулярная функция $f : G \to \mathbb{C}$ на локально компактной топологической абелевой группе G имеет единственное «линейное выражение» через характеры. Для группы $\mathrm{U}(1)$ это выражение представляет собою разложение функции $f : \mathrm{U}(1) \to \mathbb{C}$ в бесконечный ряд Фурье

$$f(z) = \sum\nolimits_{m\in\mathbb{Z}} f^\wedge(m)\, z^m$$

с коэффициентами $f^\wedge(m) \in \mathbb{C}$, которые можно воспринимать как функцию $f^\wedge : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ на двойственной по Понтрягину группе. Для аддитивной группы $\mathbb{R}$ «линейное выражение» через характеры означает представление функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ в виде интеграла Фурье

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^\wedge(\alpha)\, e^{2\pi i\alpha x}\, d\alpha\,,$$

в котором «семейство коэффициентов» $f^\wedge(\alpha)$ представляет собою функцию $f^\wedge : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ на двойственной по Понтрягину группе. Функции $f : G \to \mathbb{C}$ и $f^\wedge : G^\wedge \to \mathbb{C}$ однозначно восстанавливаются друг по другу по простым явным формулам, и с учётом двойственности Понтрягина $f^{\wedge\wedge} = f$. Инволюция $f \leftrightarrow f^\wedge$ называется *преобразованием Фурье*.

Упр. 6.1. Для всех $w \in W$ и $u \in U$ вектор $f(w+u) = fw + fu$ лежит в том же классе, что и fw, поскольку $fu \in U$.

Упр. 6.3. При $m \geqslant 2$ классы многочленов, делящихся на p, составляют ненулевой собственный подмодуль в $\Bbbk[t]/\left(p^m\right)$. При $m = 1$ фактор кольцо $\Bbbk[t]/(p)$ является полем, т. е. для любого ненулевого класса $[g] \in \Bbbk[t]/(p)$ существует такой многочлен $h \in \Bbbk[t]$, что $h \cdot [g] = [1]$. Поэтому любой класс $[f] \in \Bbbk[t]/(p)$ получается из класса $[g]$ применением оператора $h(t) \cdot f(t)$.

Упр. 6.4. Диагональный оператор с собственными числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ аннулируется многочленом $\prod(t - \lambda_i)$. Наоборот, поскольку многочлен, аннулирующий модуль (6-2), делится все многочлены p^ν, стоящие в знаменателях разложения из форм. (6-2) на стр. 63, все эти многочлены p имеют вид $t - \lambda$ и входят в разложение (6-2) только в первых степенях, что и означает диагонализуемость оператора умножения на t в прямой сумме (6-2).

Упр. 6.5. Верхней гранью цепи из $\mathcal{S}'$ является объединение всех модулей цепи.

Упр. 6.6. Пусть $w = u + v$. Тогда $fw = fu + fv$ и $fv \in V$. Поэтому $\pi(fw) = fu = f\pi(w)$.

Упр. 6.7. Пусть $\pi(S) \neq 0$ для простого подмодуля $U \subset W$. Поскольку $f\pi(s) = \pi(fs) \in \pi(S)$ для всех $f \in R$ и $s \in S$, подпространство $\pi(S)$ является R-подмодулем. Для любого R-подмодуля $M \subset \pi(S)$ пересечение

$$S \cap \pi^{-1}(M) = \{s \in S \mid \pi(s) \in M\}$$

является R-подмодулем в S: если $\pi(s) \in M$, то $\pi(fs) = f\pi(s) \in M$ для всех $f \in R$ и $s \in S$. Так как в S нет ненулевых собственных подмодулей, их нет и в $\pi(S)$.

Упр. 6.8. Верхней гранью цепи из $\mathcal{S}$ является объединение или, что то же самое, прямая сумма всех модулей цепи.

Упр. 6.9. (а) и (б) проверяются непосредственно; (в) проверяется так: если $\varphi(v) = 0$, то $\varphi(fv) = f\varphi(v) = f(0) = 0$ для всех $f \in R$, а если $v = \varphi(u)$, то $fv = f\varphi(u) = \varphi(fu)$ для всех $g \in R$; (г) фактически было доказано в упр. 6.7.

Упр. 6.11. $\varphi\psi = \sum_{\alpha,\beta} \iota_\alpha \varphi_{\alpha\beta}\pi_\beta \circ \sum_{\mu,\nu} \iota_\mu \varphi_{\mu\nu}\pi_\nu = \sum_{\alpha,\nu} \iota_\alpha p_{\alpha\nu}\pi_\nu$, где $p_{\alpha\nu} = \sum_\eta \varphi_{\alpha\eta}\psi_{\eta\nu}$, так как

$$\pi_\beta \iota_\mu = \begin{cases} \mathrm{Id}_{V_\eta} & \text{если } \beta = \mu = \eta \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Упр. 6.12. Из равенства $\mathrm{Ass}(R) = \mathrm{End}(V)$ вытекает, что A_R действует транзитивно на ненулевых векторах пространства V, т. е. A_R-орбита любого ненулевого вектора совпадает со всем пространством V.

Упр. 6.16. Поскольку правило $g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}$ линейно по φ, его достаточно проверять только на разложимых $\varphi = \xi \otimes w$ с $\xi \in U^*$, $w \in W$. По определению

$$\varrho^* \otimes \lambda(g) : \xi \otimes w \mapsto \varrho(g^{-1})^* \xi \otimes \lambda(g) w = (\xi \circ g^{-1}) \otimes (gw)\,.$$

Этот оператор переводит $u \in U$ в $\xi(g^{-1}u) \cdot gw = g\left(\xi(g^{-1}u) \cdot w\right) = g \circ (\xi \otimes w) \circ g^{-1}(u)$.

Упр. 6.21. Пусть множество различных гомоморфизмов $\psi_\nu : G \to \Bbbk^*$ линейно зависимо. Рассмотрим линейную зависимость $\lambda_1\psi_1 + \ldots + \lambda_n\psi_n = 0$ с минимально возможным числом слагаемых и какой-нибудь элемент $h \in G$, на котором $\psi_1(h) \neq \psi_2(h)$. Поскольку для каждого $g \in G$ выполняется равенство $\sum_i \lambda_i \psi_i(h)\psi_i(g) = \sum_i \lambda_i \psi_i(hg) = 0$, имеется ещё одно линейное соотношение между функциями ψ_i с коэффициентами $\lambda_i\,\psi_i(h)$. Деля все коэффициенты на $\psi_1(h)$ и вычитая из первой зависимости, получаем линейную зависимость между ψ_i с нулевым коэффициентом при ψ_1 и ненулевым коэффициентом при ψ_2. Она нетривиальна и содержит меньше слагаемых. Противоречие.