§3. Грассманова алгебра

3.1. Внешняя алгебра. Для произвольного векторного пространства V над полем $\Bbbk$ обозначим через $\mathcal{I}_{\text{skew}} \subset TV$ двусторонний идеал тензорной алгебры, порождённый квадратами

$$v \otimes v \in V \otimes V \tag{3-1}$$

всевозможных векторов $v \in V$. Элементы идеала AI называются *соотношениями антикоммутирования*. Как векторное пространство, идеал $\mathcal{I}_{\text{skew}} = \bigoplus_{n \geqslant 2} \mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n}$ является прямой суммой своих однородных компонент $\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n}$, каждая из которых является линейной оболочкой разложимых тензоров вида $\ldots \otimes v \otimes v \otimes \ldots$, где обозначенные многоточиями фрагменты одинаковы. Обратите внимание, что в этой линейной оболочке лежат и все суммы вида

$$(\ldots \otimes v \otimes w \otimes \ldots) + (\ldots \otimes w \otimes v \otimes \ldots),$$

а если $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$, то $\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n}$ линейно порождается такими суммами. Фактор алгебра

$$\Lambda V \stackrel{\text{def}}{=} TV / \mathcal{I}_{\text{skew}}$$

называется *внешней* или *грассмановой* алгеброй пространства V. Умножение в ΛV, индуцированное тензорным произведением в TV, называется *внешним* или *грассмановым* умножением и обозначается знаком $\wedge$. Как векторное пространство, внешняя алгебра является прямой суммой $\Lambda V = \bigoplus_{n \geqslant 0} \Lambda^n V$ своих однородных компонент $\Lambda^n V \stackrel{\text{def}}{=} V^{\otimes n} / (\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n})$, которые называются *внешними степенями* пространства V. При этом $\Lambda^0 V = \Bbbk$, $\Lambda^1 V = V$ и $\Lambda^k V \wedge \Lambda^m V \subset \Lambda^{k+m} V$ для всех k, m. Из описания идеала $\mathcal{I}_{\text{skew}}$ вытекает, что $u \wedge w = -w \wedge u$ для всех $u, w \in V$, и $v \wedge v = 0$ для всех $v \in V$. Перестановка сомножителей в составленном из векторов грассмановом мономе равносильна умножению этого монома на знак перестановки:

$$\forall\, g \in S_k \quad v_{g_1} \wedge \ldots \wedge v_{g_k} = \operatorname{sgn}(g) \cdot v_1 \wedge \ldots \wedge v_k\,.$$

Поэтому для однородных элементов $\omega \in \Lambda^k V$, $\eta \in \Lambda^m V$ выполняется равенство

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{km} \eta \wedge \omega\,.$$

Градуированные алгебры с таким свойством называются *s-коммутативными*[1]. Отождествление V с $\Lambda^1 V$ задаёт вложение $\iota : V \hookrightarrow \Lambda V$ со следующим универсальным свойством.

Упражнение 3.1. Покажите, что для любого линейного отображения $f : V \to L$ в произвольную s-коммутативную $\Bbbk$-алгебру L существует единственный такой гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\tilde{f} : \Lambda V \to L$, что $f = \tilde{f} \circ \iota$, причём алгебра ΛV и вложение ι определяются этим свойством однозначно с точностью до единственного перестановочного с ι изоморфизма $\Bbbk$-алгебр.

По этой причине алгебра ΛV иначе называется *свободной* s-коммутативной $\Bbbk$-алгеброй, порождённой векторным пространством V.

Пример 3.1 (грассмановы квадратичные формы)

Покажем, что каждый ненулевой однородный грассманов многочлен второй степени $\omega \in \Lambda^2 V$ на конечномерном пространстве V над любым полем $\Bbbk$ в подходящем базисе $e_1, \ldots, e_d$ пространства V может быть записан в *нормальном виде Дарбу*

$$e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \ldots + e_{2r-1} \wedge e_{2r}\,. \tag{3-2}$$

[1] Префикс «s» можно по желанию воспринимать как аббревиатуру для *super* или для *skew*.

Рассмотрим произвольный базис $u_1, \dots, u_d$ и перенумеруем его векторы так, чтобы

$$\omega = u_1 \wedge (\alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n) + u_2 \wedge (\beta_3 u_3 + \dots + \beta_n u_n) + (\text{члены без } u_1 \text{ и } u_2)\,,$$

где коэффициент $\alpha_2 \neq 0$. Перейдём к новому базису $v_1, \dots, v_d$, в котором $v_2 = \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$, а остальные $v_i = u_i$ при $i \neq 2$.

Упражнение 3.2. Убедитесь, что это действительно базис.

Получим выражение вида

$$\begin{aligned}\omega = v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge (\gamma_3 v_3 + \dots + \gamma_n v_n) + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2) = \\ = (v_1 - \gamma_3 v_3 - \dots - \gamma_n v_n) \wedge v_2 + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2)\end{aligned}$$

для некоторых $\gamma_3, \dots, \gamma_n \in \Bbbk$. Переходя к базису из векторов $w_1 = v_1 - \gamma_3 v_3 - \dots - \gamma_n v_n$ и $w_i = v_i$ при $i \neq 1$, получаем $\omega = w_1 \wedge w_2 +$ (члены без w_1 и w_2), после чего процесс может быть продолжен по индукции.

3.1.1. Кососимметричные полилинейные отображения. Полилинейное отображение

$$\alpha : V \times \dots \times V \to U \tag{3-3}$$

называется *кососимметричным*, если оно принимает нулевое значение всякий раз, когда какие-либо два аргумента совпадают. Всякое кососимметричное полилинейное отображение *знакопеременно*, т. е. $\alpha(v_{g(1)}, v_{g(2)}, \dots, v_{g(m)}) = \operatorname{sgn} g \cdot \alpha(v_1, \dots, v_n)$ для всех $g \in S_n$.

Упражнение 3.3. Убедитесь в этом и покажите, что когда $1 + 1 \neq 0$ в $\Bbbk$, знакопеременность равносильна кососимметричности.

Кососимметричные n-линейные отображения образуют векторное подпространство в пространстве n-линейных отображений. Сопоставляя линейному отображению $F : U \to W$ его композицию $F \circ \alpha$ с фиксированным кососимметричным n-линейным отображением (3-3), мы получаем линейное отображение $F \mapsto F \circ \alpha$ из $\operatorname{Hom}(U, W)$ в пространство кососимметричных полилинейных отображений $V \times \dots \times V \to W$. Если оно является изоморфизмом для всех векторных пространств W, то полилинейное отображение α называется *универсальным* кососимметричным n-линейным отображением, а также *антикоммутативным* или *грассмановым* произведением векторов.

Упражнение 3.4. Покажите, что пространство, в котором принимает значение грассманово произведение, единственно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с этим произведением.

Предложение 3.1

Композиция $\alpha_n = \pi_{S^n} \circ \tau$ тензорного произведения $\tau : V \times \dots \times V \to V^{\otimes n}$ с последующей проекцией $\pi_{\Lambda^n} : V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$ является универсальным кососимметричным n-линейным отображением.

Доказательство. В силу универсальности τ любое n-линейное отображение $\varphi : V \times \dots \times V \to W$ однозначно представляется в виде композиции $\varphi = \widetilde{F} \circ \tau$, где $\widetilde{F} : V^{\otimes n} \to W$ линейно. Если φ кососимметрично, $\widetilde{F}$ аннулирует линейные порождающие подпространства $\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n} = \ker \pi_{\Lambda^n}$:

$$\widetilde{F}(\dots \otimes w \otimes w \otimes \dots) = \varphi(\dots, w, w, \dots) = 0\,,$$

и значит, корректно факторизуется до линейного отображения

$$F : \Lambda^n V \to W , \quad v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \mapsto \varphi(v_1, \ldots , v_n) .$$

Таким образом, $\varphi = \widetilde{F} \circ \tau = F \circ \pi_{\Lambda^n} \circ \tau = F \circ \alpha_n$. Из-за универсальности τ любое линейное отображение $F' : \Lambda^n V \to W$, для которого $\varphi = F' \circ \alpha_n = F' \circ \pi_{\Lambda^n} \circ \tau$, удовлетворяет равенству $F' \circ \pi_{\Lambda^n} = F \circ \pi_{\Lambda^n}$, откуда $F' = F$ в силу сюрьективности проекции π_{Λ^n}. □

Упражнение 3.5. Убедитесь, что для любого (в том числе бесконечномерного) пространства V пространство кососимметричных n-линейных отображений $V \times \ldots \times V \to \Bbbk$ канонически двойственно n-той внешней степени $\Lambda^n V$.

Следствие 3.1
Если зафиксировать в V базис $E \subset V$, то занумерованные всевозможными m-элементными подмножествами $M = \{e_1, \ldots , e_m\} \subset E$ мономы $e_M = e_1 \wedge \ldots \wedge e_m$ составят базис в $\Lambda^m V$ при всех m. При перестановке элементов множества M, моном e_M умножается на знак перестановки.

Доказательство. Рассмотрим векторное пространство U с базисом из символов e_M, где M пробегает m-элементные подмножества в E. В каждом таком подмножестве M мы произвольным образом занумеруем элементы, так что M запишется как $\{e_1, \ldots , e_m\}$, и рассмотрим кососимметричное полилинейное отображение $\alpha : V \times \ldots \times V \to U$, переводящее каждый упорядоченный набор из m различных базисных векторов, образующих перестановку $e_{g_1}, \ldots , e_{g_m}$ элементов некоторого множества $M = \{e_1, \ldots , e_m\} = \{e_{g_1}, \ldots , e_{g_m}\} \subset E$, в вектор $\operatorname{sgn}(g) \cdot e_M$. Отображение α универсально, поскольку для любого кососимметричного полилинейного отображения

$$\varphi : V \times \ldots \times V \to W$$

и линейного отображения $F : U \to W$ равенство $\varphi = F \circ \alpha$ равносильно тому, что

$$F(e_{\{e_1,\ldots,e_m\}}) = \operatorname{sgn}(g) \cdot \varphi(e_{g(1)}, \ldots , e_{g(m)})$$

для каждого m-элементного подмножества $\{e_1, \ldots , e_m\} \subset E$ и всех перестановок $g \in S_m$, причём эти условия корректно и однозначно определяют F, если задано φ, и наоборот. Тем самым, имеется единственный изоморфизм $U \xrightarrow{\sim} \Lambda^n V$, переводящий базисный вектор $e_{\{e_1,\ldots,e_m\}} \in U$ в грассманово произведение $e_1 \wedge \ldots \wedge e_m \in \Lambda^n V$. □

Следствие 3.2
Если пространство V конечномерно с базисом $e_1, \ldots , e_d$, то $\dim \Lambda^m V = \binom{d}{m}$, и мономы

$$e_I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m} , \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant d . \tag{3-4}$$

составляют базис пространства $\Lambda^m V$. В частности, $\Lambda^m V = 0$ при $m > d$, и $\dim \Lambda V = 2^d$.

Упражнение 3.6. В условиях сл. 3.2 покажите, что $\omega \in \Lambda V$ однороден степени $d = \dim V$ если и только если $v \wedge \omega = 0$ для всех $v \in V$, и опишите *центр* грассмановой алгебры

$$Z(\Lambda V) \overset{\text{def}}{=} \{\tau \in \Lambda V \mid \forall\, \omega \in \Lambda V \ \tau \wedge \omega = \omega \wedge \tau\} .$$

Предложение 3.2
Над полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ однородный грассманов многочлен $\omega \in \Lambda^2 V$ тогда и только тогда разложим в произведение $u \wedge w$ двух векторов $u, w \in V$, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

Доказательство. Если $\omega = u \wedge w$, то $\omega \wedge \omega = u \wedge w \wedge u \wedge w = 0$. Чтобы получить обратное, воспользуемся прим. 3.1 на стр. 22 и выберем в V такой базис $e_1, \dots, e_d$, в котором

$$\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \dots .$$

Если в этой сумме есть хотя бы два слагаемых, то в $\omega \wedge \omega$ войдёт $2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$, откуда $\omega \wedge \omega \neq 0$ если $2 \neq 0$. Таким образом, равенство $\omega \wedge \omega = 0$ влечёт равенство $\omega = e_1 \wedge e_2$. □

3.1.2. Линейные замены переменных и миноры. Пусть векторы $u_1, \dots, u_n \in V$ линейно выражаются векторы $w_1, \dots, w_m \in V$ по формуле $(u_1, \dots, u_k) = (w_1, \dots, w_m) \cdot C$, где $C \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(\Bbbk)$. Тогда при каждом $k = 1, \dots, n$ мономы $u_J = IWPu, j, k$ линейно выражаются через мономы $w_I = w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_d}$ по формуле

$$\begin{aligned} u_J = u_{j_1} \wedge \dots \wedge u_{j_k} &= \Big(\sum_{i_1} w_{i_1} c_{i_1 j_1}\Big) \wedge \Big(\sum_{i_2} w_{i_2} c_{i_2 j_2}\Big) \wedge \dots \wedge \Big(\sum_{i_k} w_{i_k} c_{i_k j_k}\Big) = \\ &= \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_k} \cdot \sum_{g \in S_k} \operatorname{sgn}(g)\, c_{i_{g(1)} j_1} \dots c_{i_{g(k)} j_k} = \sum_I w_I \cdot c_{IJ}\,, \end{aligned} \tag{3-5}$$

где $I = (i_1, \dots, i_k)$ пробегает наборы из k возрастающих номеров, а $c_{IJ} = \det C_{IJ}$ обозначает определитель $k \times k$-подматрицы $C_{IJ} \subset C$, сосредоточенной в пересечениях столбцов с номерами из J и строк с номерами из I. Определитель $c_{IJ} \overset{\text{def}}{=} \det C_{IJ}$ называется IJ-м *минором* k-го порядка в матрице C. Таким образом, IJ-тый элемент матрицы, выражающей грассманов моном u_J через грассмановы мономы w_I равен IJ-тому минору матрицы, выражающей векторы u через векторы w. Эта матрица[1] имеет размер $\binom{n}{k} \times \binom{n}{k}$, обозначается $\Lambda^k C$ и называется k-*й внешней степенью* матрицы C.

Предложение 3.3 (мультипликативность внешних степеней)
Для любых матриц $A \in \operatorname{Mat}_{m \times k}(\Bbbk)$, $B \in \operatorname{Mat}_{k \times n}(\Bbbk)$ при всех $1 \leqslant d \leqslant \min(m, n, k)$ выполняется равенство $\Lambda^d(A \cdot B) = \Lambda^d A \cdot \Lambda^d B$. В частности, для квадратных матриц A и B одинакового размера $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве V с базисом $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_m)$ наборы векторов $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_k) = \boldsymbol{e}\,A$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_n) = \boldsymbol{a}\,B = \boldsymbol{e}\,AB$. Обозначим через $\boldsymbol{e_d} \subset \Lambda^d V$ набор из $\binom{m}{d}$ грассмановых мономов $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}$, а через $\boldsymbol{b_d}, \boldsymbol{a_d} \subset \Lambda^d V$ — наборы из $\binom{n}{d}$ и $\binom{k}{d}$ грассмановых многочленов $b_J = b_{j_1} \wedge \dots \wedge b_{j_d}$ и $a_L = a_{\ell_1} \wedge \dots \wedge a_{\ell_d}$ соответственно. Набор мономов $\boldsymbol{e_d}$ является базисом в $\Lambda^d V$, а набор многочленов $\boldsymbol{b_d}$ выражается через него, с одной стороны, как $\boldsymbol{b_d} = \boldsymbol{e_d}\,\Lambda^d(AB)$, а с другой стороны — как $\boldsymbol{b_d} = \boldsymbol{a_d}\,\Lambda^d B = \boldsymbol{e_d}\,\Lambda^d A\,\Lambda^d B$. Поскольку матрица перехода от произвольного набора векторов к базису однозначно определяется этим набором, мы заключаем, что $\Lambda^d(A \cdot B) = \Lambda^d A \cdot \Lambda^d B$. □

[1] Здесь и далее мы предполагаем, что при каждом k индексы $I = (i_1, \dots, i_k)$ линейно упорядочиваются лексикографически.

Пример 3.2 (Соотношения Лапласа)
Для каждого набора из m возрастающих индексов $J = (j_1, \dots, j_m) \subset \{1, \dots, n\}$ положим

$$\deg J \overset{\text{def}}{=} m\,, \quad |J| \overset{\text{def}}{=} j_1 + \dots + j_m$$

и обозначим через $\overline{J} = (\overline{j}_1, \dots, \overline{j}_{n-m}) = \{1, \dots, n\} \smallsetminus J$ дополнительный к J набор из $n - m$ возрастающих индексов. Для произвольной квадратной матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ рассмотрим в грассмановой алгебре ΛV векторного пространства с базисом $e_1, \dots, e_n$ набор из n векторов

$$\alpha_j = e_1 a_{1j} + e_2 a_{2j} + \dots + e_n a_{nj}\,, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant j \leqslant n\,. \tag{3-6}$$

Для двух наборов индексов I, J одинаковой длины $\deg I = \deg J = m$ произведения

$$\alpha_J = \alpha_{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{j_m} \quad \text{и} \quad \alpha_{\overline{I}} = \alpha_{\overline{i}_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{\overline{i}_m}$$

имеют дополнительные степени m и $n - m$.

Упражнение 3.7. Убедитесь, что

$$\alpha_J \wedge \alpha_{\overline{I}} = \begin{cases} (-1)^{|J| + \frac{m(m+1)}{2}} \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \tag{3-7}$$

Подставляя в (3-7) разложения (3-6) и пользуясь формулами (3-5), в левой части получим

$$\left(\sum\nolimits_M e_M a_{MJ} \right) \wedge \left(\sum\nolimits_L e_L a_{L\overline{I}} \right) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} e_1 \wedge \dots \wedge e_n \sum\nolimits_M (-1)^{|M|} a_{MJ} a_{\overline{MI}}\,,$$

где M пробегает все индексы длины $\deg M = m$, а справа при $I \neq J$ получим 0, а при $I = J$ —

$$(-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + |J|} \det A \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

Мы заключаем, для любых двух наборов J, I из m столбцов произвольной квадратной матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ выполняются *соотношения Лапласа*

$$\sum\nolimits_M (-1)^{|M| + |J|} a_{MJ} a_{\overline{MI}} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \tag{3-8}$$

где суммирование идёт по всем наборам M из m строк матрицы A.

При $I = J$ соотношение (3-8) даёт формулу для вычисления определителя $\det A$ через всевозможные миноры a_{MJ} порядка m, сосредоточенные в m фиксированных столбцах матрицы A с номерами J, и *дополнительные* к ним миноры $a_{\overline{JM}}$ порядка $n - m$, равные определителям матриц, получающихся из A вычёркиванием всех строк и столбцов, содержащих минор a_{MJ}:

$$\det A = \sum\nolimits_M (-1)^{|M| + |J|} a_{MJ} a_{\overline{MJ}}\,. \tag{3-9}$$

Произведение $(-1)^{|M|+|J|} a_{\overline{MJ}}$ называется *алгебраическим дополнением* к минору a_{MJ} и обозначается $\overline{a}_{MJ}$. При $I \neq J$ соотношение (3-8) с точностью до знака имеет вид

$$\sum\nolimits_M (-1)^{|M| + |I|} a_{MJ} a_{\overline{MI}} = 0 \tag{3-10}$$

и называется *теоремой об умножении на чужие алгебраические дополнения*, поскольку левая часть в (3-10) отличается от (3-9) тем, что миноры a_{MJ} умножаются не на свои алгебраические дополнения $a_{\overline{MJ}}$, а на дополнения $a_{\overline{MI}}$ к минорам a_{MI}, сосредоточенным в другом наборе столбцов $I \neq J$.

Упражнение 3.8. Установите транспонированный вариант соотношений Лапласа

$$\sum\nolimits_M (-1)^{|I|+|M|} a_{JM} a_{\overline{IM}} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J. \end{cases} \tag{3-11}$$

Соотношения (3-8) и (3-11) сворачиваются в матричные равенства

$$\Lambda^m A \cdot \Lambda^{n-m} A^\vee = \Lambda^{n-m} A^\vee \cdot \Lambda^m A = \det A\, E\,, \tag{3-12}$$

где E — единичная матрицу размера $\binom{n}{m} \times \binom{n}{m}$, $\Lambda^m A$ — m-тая внешняя степень[1] матрицы A, т. е. матрица размера $\binom{n}{d} \times \binom{n}{d}$, клетки которой нумеруются d-элементными подмножествами $I, J \subset \{1, \dots, n\}$, и в клетке IJ стоит IJ-минор матрицы A, а через $\Lambda^{n-m} A^\vee$ обозначена матрица размера $\binom{n}{m} \times \binom{n}{m}$, клетки которой тоже нумеруются d-элементными подмножествами $I, J \subset \{1, \dots, n\}$, но в клетке IJ стоит *алгебраическое дополнение* к JI-минору[2] матрицы A, т. е. взятый со знаком $(-1)^{|I|+|J|}$ минор порядка $n - d$, сосредоточенный в столбцах $\bar{I}$ и строках $\bar{J}$. Матрица $\Lambda^{n-m} A^\vee$ называется *присоединённой* к матрице $\Lambda^m A$.

Пример 3.3 (соотношение Плюккера)
Рассмотрим 2×4 матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

с элементами из кольца $K = \mathbb{Z}[a_{11}, \dots, a_{22}]$ многочленов от восьми переменных a_{ij} и обозначим через $A_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i}$, где $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, её 2×2 минор, образованный i-м и j-м столбцами. Раскладывая нулевой определитель

$$0 = \det \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

по первым двум строкам, заключаем, что шесть миноров A_{ij} связаны *соотношением Плюккера*

$$A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23} = 0\,. \tag{3-13}$$

Упражнение 3.9. Убедитесь, для любого поля $\Bbbk$ и любых шести чисел $A_{ij} \in \Bbbk$, удовлетворяющих соотношению (3-21), существует матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 4}(\Bbbk)$ с 2×2 минорами A_{ij}.

Мы заключаем, что шесть чисел A_{ij} из поля $\Bbbk$ являются минорами 2×4 матрицы с элементами из $\Bbbk$ если и только если они удовлетворяют соотношению Плюккера (3-13). Отметим, что это согласуется с предл. 3.2 на стр. 25: грассманова квадратичная форма $\omega = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} A_{ij} e_i \wedge e_j$ имеет $\omega \wedge \omega = 2(A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23}) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$, а грассманово произведение векторов

$$u = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3 + a_{14}e_4 \quad \text{и} \quad w = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3 + a_{24}e_4$$

равно $u \wedge w = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} (a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i}) e_i \wedge e_j$.

[1] См. n° 3.1.2 на стр. 25.

[2] Обратите внимание, что индексы I и J преставились!

Пример 3.4 (определитель пучка матриц)
Рассмотрим квадратные матрицы $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ и пару коммутирующих переменных x, y. Матрица $x\,A + y\,B$ имеет элементы в $\Bbbk[x, y]$, и её определитель $\det(x\,A + y\,B)$ является однородным многочленом степени n от x и y. Покажем, что его коэффициент при $x^m y^{n-m}$ равен

$$\mathrm{tr}(\Lambda^m A \cdot \Lambda^{n-m} B^\vee) = \sum\nolimits_{IJ} (-1)^{|I|+|J|} a_{IJ} b_{\overline{IJ}}\,, \tag{3-14}$$

где суммирование идёт по всем m-элементным подмножествам $I, J \subset \{1, \dots, n\}$. Для этого рассмотрим наборы линейных форм $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n)\,A$ и $(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n)\,B$ от грассмановых переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$. Тогда

$$\det(xA + yB) \cdot \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n = (x\alpha_1 + y\beta_1) \wedge (x\alpha_2 + y\beta_2) \wedge \dots \wedge (x\alpha_n + y\beta_n)\,.$$

Моном $x^m y^{n-m}$ возникает при выборе первого слагаемого в каких-либо m скобках, скажем, с номерами $i_1, \dots, i_m$, и второго слагаемого во всех остальных скобках. Вклад такого произведения в коэффициент при $x^m y^{n-m}$ равен

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sgn}(i_1, \dots, i_m, \bar{i}_1, \dots, \bar{i}_{n-m}) \cdot \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k} \wedge \beta_{\bar{i}_1} \wedge \dots \wedge \beta_{\bar{i}_{n-m}} = \\
&\quad = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+|I|} \alpha_I \wedge \beta_{\bar{I}} = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+|I|} \Big(\sum\nolimits_J \xi_J a_{JI}\Big) \wedge \Big(\sum\nolimits_M \xi_M b_{M\bar{I}}\Big) = \\
&\quad = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+|I|} \sum\nolimits_{JM} a_{JI} \cdot b_{M\bar{I}} \cdot \xi_J \wedge \xi_M = \Big(\sum\nolimits_J (-1)^{|I|+|J|} a_{JI} \cdot b_{\overline{JI}}\Big) \cdot \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n.
\end{aligned}$$

Коэффициент при $x^m y^{n-m}$ в $\det(x\,A + y\,B)$ равен сумме этих вкладов по всем наборам I из m возрастающих номеров, что и даёт формулу (3-14).

3.2. Кососимметрические тензоры. Напомню[1], что симметрическая группа S_n действует на тензорной степени $V^{\otimes n}$ такого векторного пространства V перестановками сомножителей в разложимых тензорах: $g(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = v_{g(1)} \otimes v_{g(2)} \otimes \dots \otimes v_{g(n)}$. Подпространство

$$\mathrm{Alt}^n V \stackrel{\text{def}}{=} \{\, t \in V^{\otimes n} \mid \forall\, g \in S_n \;\; g(t) = \mathrm{sgn}(g) \cdot t \,\}$$

называется пространством *знакопеременных* тензоров в $V^{\otimes n}$.

3.2.1. Стандартный базис пространства знакопеременных тензоров. В разложении знакопеременного тензора $t \in \mathrm{Alt}^n V$ по базисным мономам тензорной алгебры присутствуют лишь мономы, в которых каждый базисный вектор $e \in E$ встречается не более одного раза, причём вместе с каждым таким мономом $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$ в разложение t входят все $n!$ мономов

$$g(e_1 \otimes \dots \otimes e_n) = e_{g_1} \otimes \dots \otimes e_{g_n}\,,$$

которые получаются из него перестановками $g \in S_n$, причём коэффициенты при $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$ и $g(e_1 \otimes \dots \otimes e_n)$ отличаются друг от друга множителем $\mathrm{sgn}(g)$. Таким образом, базис в пространстве $\mathrm{Alt}^n V$ составляют *полные знакопеременные тензоры*

$$e_I = \sum\nolimits_{g \in S_n} \mathrm{sgn}(g) \cdot e_{g_1} \otimes \dots \otimes e_{g_n} \tag{3-15}$$

находящиеся в биекции с n-элементным подмножествам $I = \{e_1, \dots, e_n\} \subset E$. При этом мы считаем, что на множестве E базисных векторов зафиксирован некоторый порядок, вводим индуцированный порядок на каждом конечном подмножестве $I \subset E$ и располагаем сомножители тензора $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$, отвечающего тождественной перестановке в формуле (3-15), в порядке возрастания.

[1]См. n° 2.2 на стр. 16.

Предложение 3.4
Над полем характеристики нуль ограничение проекции $\pi_{\Lambda^n} : V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$ на подпространство $\mathrm{Alt}^n \subset V^{\otimes n}$ является изоморфизмом векторных пространств.

Доказательство. Для любого конечного подмножества $I = \{e_1, \dots, e_n\} \subset E$ каждое из $n!$ слагаемых суммы (3-15), перейдёт при проекции $\pi_{\Lambda^n} : V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$ в грассманов моном $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$. Тем самым, образы стандартных базисных знакопеременных тензоров пропорциональны базисным грассмановым мономам: $\pi_{\Lambda^n}(e_I) = n! \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_n$. □

Предостережение 3.1. Не смотря на предл. 3.4, подпространство $\mathrm{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$ не следует путать с фактор пространством $\Lambda^n V = V^{\otimes n}/(\mathcal{I}_{\mathrm{skew}} \cap V^{\otimes n})$, которое получаются из $V^{\otimes n}$ отождествлением некоторых тензоров между собою. Над полем характеристики $p > 0$ кососимметричные тензоры, степень которых больше p, аннулируются проекцией π_{Λ^n}. Даже в характеристике нуль изоморфизм из предл. 3.4 не отождествляют друг с другом стандартные базисные векторы буквально, но выражают их друг через друга с поправочными комбинаторными множителями, которые приходится учитывать как при подъёме на пространство знакопеременных тензоров умножения, которое имеется в алгебре ΛV, так и при спуске на пространства ΛV и ΛV^* операций свёртки, имеющихся на $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n}$.

3.3. Поляризация грассмановых многочленов. Согласно предл. 3.4, над полем характеристики нуль факторизация $\pi_{\Lambda^n} : \mathrm{Alt}^n V \to \Lambda^n V$ антисимметричных тензоров по соотношениям антикоммутирования является изоморфизмом. Обратный изоморфизм $\pi_{\Lambda^n}^{-1} : \Lambda^n V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}^n V$, называется *полной поляризацией* грассмановых многочленов. Он сопоставляет грассманову многочлену $\omega \in \Lambda^n V$ единственный знакопеременный тензор $\widetilde{\omega} \in \mathrm{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$, лежащий в классе ω по модулю подпространства[1] $\mathcal{I}_{\mathrm{skew}} \cap V^{\otimes n}$. Тензор $\widetilde{\omega}$ можно воспринимать как кососимметричную n-линейную форму $\widetilde{\omega} : V^* \times \dots \times V^* \to \Bbbk$, $(\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto \langle \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_n , \widetilde{\omega} \rangle$. В доказательстве предл. 3.4 мы видели, что поляризация грассманова монома $\omega = v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ равна

$$\widetilde{\omega} = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \mathrm{sgn}(g) \cdot v_{g_1} \otimes \dots \otimes v_{g_n} .$$

Поляризации произвольных грассмановых многочленов получаются отсюда по линейности.

3.3.1. Двойственность. Для двойственных конечномерных векторных пространств V, V^* над полем характеристики нуль полная свёртка $\langle \widetilde{\omega} , \tilde{\xi} \rangle \in \Bbbk$ полных поляризаций $\widetilde{\omega} \in \mathrm{Alt}^n V$, $\tilde{\xi} \in \mathrm{Alt}^n V^*$ однородных грассмановых многочленов $\omega \in \Lambda^n V$, $\xi \in \Lambda^n V^*$ задаёт невырожденное спаривание между пространствами $\Lambda^n V^*$ и $\Lambda^n V$. Грассмановы мономы, составленные из векторов e_i и e_i^* двойственных друг другу базисов в V и V^* спариваются при этом по правилу

$$\langle e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} , e^*_{j_1} \wedge \dots \wedge e^*_{j_n} \rangle = \begin{cases} \mathrm{sgn}(g)/n! & \text{если } \exists\, g \in S_n : \forall\, \nu \; i_\nu = j_{g(\nu)} \\ 0 & \text{в остальных случаях} . \end{cases}$$

Упражнение 3.10. Убедитесь в этом.

[1]См. n° 3.1 на стр. 22.

3.3.2. Грассмановы частные производные. Как и для обычных многочленов, определим отображение *поляризации* грассмановых многочленов вдоль ковектора $\xi \in V^*$

$$\mathrm{pl}_\xi \overset{\mathrm{def}}{=} \pi_{\Lambda^{n-1}} \circ i_\xi \circ \pi_{\Lambda^n}^{-1} : \ \Lambda^n V \to \Lambda^{n-1} V\,, \tag{3-16}$$

которое переводит грассманов многочлен $\omega \in \Lambda^n V$ в проекцию на $\Lambda^{n-1} V$ внутреннего произведения[1] $i_\xi \widetilde{\omega}$ ковектора ξ и полной поляризации $\widetilde{\omega}$ многочлена ω. Отображение (3-16) вписывается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V^{*\otimes n} \supset \mathrm{Alt}^n V^* \arrow[r, "i_\xi"] \arrow[d, "\pi_{\Lambda^n}"', "\wr"] & V^{*\otimes(n-1)} \arrow[d, "\pi_{\Lambda^{n-1}}"] \\ \Lambda^n V^* \arrow[r, "\mathrm{pl}_\xi"] & \Lambda^{n-1} V^*\,. \end{tikzcd}$$

Назовём *грассмановой производной* однородного грассманова многочлена ω в направлении ковектора $\xi \in V^*$ грассманов многочлен $\partial_\xi \omega \overset{\mathrm{def}}{=} \deg \omega \cdot \mathrm{pl}_\xi \omega$. Так как тензор $\widetilde{\omega}$ кососимметричен, для любых ξ, η, $\psi_1, \dots , \psi_{n-2} \in V^*$ выполняется равенство

$$i_\xi i_\eta \widetilde{\omega} \left(\psi_1, \dots \psi_{n-2}\right) = \omega \left(\xi, \eta, \psi_1, \dots \psi_{n-2}\right) = -\omega \left(\eta, \xi, \psi_1, \dots \psi_{n-2}\right) = -i_\eta i_\xi \widetilde{\omega} \left(\psi_1, \dots \psi_{n-2}\right)\ .$$

Поэтому и грассмановы поляризации, и грассмановы производные антикоммутируют:

$$\mathrm{pl}_\xi \mathrm{pl}_\eta = -\mathrm{pl}_\eta \mathrm{pl}_\xi \quad \text{и} \quad \partial_\xi \partial_\eta = -\partial_\eta \partial_\xi\,,$$

в частности $\partial_\xi^2 = 0$ для любого $\xi \in V^*$, что согласуется с тем, что грассмановы многочлены линейны по каждой переменной. Как и в коммутативном случае[2], выполняется равенство

$$\widetilde{\omega}(\xi_1, \dots , \xi_n) = \frac{1}{n!}\, \partial_{\xi_1} \dots \partial_{\xi_n} \omega\,. \tag{3-17}$$

Если ковекторы $x_i \in V^*$ и векторы $e_i \in V$ образуют двойственные друг другу базисы пространств V и V^*, то в силу билинейной зависимости $\mathrm{pl}_\xi \omega$ от ξ и ω, грассманова производная в направлении ковектора $\xi = \sum_i \alpha_i x_i$ может быть записана как $\partial_\xi = \sum_i \alpha_i\, \partial_{x_i}$. При этом ненулевой вклад в $\partial_{x_i} \omega$ будет лишь от входящих в ω мономов e_J с $J \ni i$.

Упражнение 3.11. Убедитесь, что $\partial_{x_{i_1}} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} = e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$ для любой[3] последовательности попарно разных индексов $i_1, \dots , i_n$.

Таким образом, дифференцирование грассманова монома в направлении базисного ковектора, двойственного к первой слева переменной в мономе, ведёт себя как обычная частная производная $\partial / \partial_{e_{i_1}}$ по этой переменной. В силу анткоммутативности грассмановых переменных, дифференцирование по k-той слева переменной монома ведёт себя как $(-1)^{k-1} \partial / \partial_{e_{i_k}}$:

$$\begin{aligned} \partial_{x_{i_k}} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} &= \partial_{x_{i_k}} (-1)^{k-1} e_{i_k} \wedge e_{i_1} \wedge \ \dots \ \wedge e_{i_{k-1}} \wedge e_{i_{k+1}} \ \dots \ e_{i_n} = \\ &= (-1)^{k-1} e_{i_1} \wedge \ \dots \ \wedge e_{i_{k-1}} \wedge e_{i_{k+1}} \ \dots \ e_{i_n}\,. \end{aligned}$$

[1] Т. е. свёртки ξ с ω по первому тензорному сомножителю, см. прим. 1.4 на стр. 11.
[2] Ср. с 2-12 на стр. 20
[3] Не обязательно возрастающей.

Иначе говоря, грассмановы производные удовлетворяют *грассманову правилу Лейбница*: для любых однородных грассмановых многочленов $\omega, \tau \in \Lambda V$ и любого ковектора $\xi \in V^*$

$$\partial_\xi(\omega \wedge \eta) = \partial_\xi(\omega) \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge \partial_\xi(\eta)\,. \tag{3-18}$$

Упражнение 3.12. Докажите формулу (3-18).

3.3.3. Линейный носитель грассманова многочлена. Как и в коммутативном случае, *линейный носитель* $\mathrm{supp}(\omega) \subset V$ однородного грассманова многочлена $\omega \in \Lambda^n V$ определяется как линейный носитель[1] $\mathrm{supp}(\widetilde{\omega})$ его полной поляризации $\widetilde{\omega} \in \mathrm{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$. Он равен пересечению всех таких подпространств $U \subset V$, что $\omega \in \Lambda^n U$, и тем самым является наименьшим таким подпространством, как по включению, так и по размерности.

Упражнение 3.13. Убедитесь в этом.

Согласно теор. 1.2 на стр. 12, подпространство $\mathrm{supp}(\omega) = \mathrm{supp}(\widetilde{\omega}) \subset V$ является образом полной свёртки $c_\omega : V^{*\otimes(n-1)} \to V$ с тензором $\widetilde{\omega} \in V^{\otimes n}$ по любым[2] его $n-1$ тензорным сомножителям, т. е. линейно порождается векторами $\partial_J \omega \overset{\text{def}}{=} \partial_{x_{j_1}} \dots \partial_{x_{j_{n-1}}} \omega$, где $J = j_1 \dots j_{n-1}$ пробегает всевозможные последовательности из $n-1$ не повторяющихся[3] натуральных чисел $1 \leqslant j_\nu \leqslant d$. Запишем ω в виде суммы

$$\omega = \sum_I a_I e_I = \sum_{i_1 \dots i_n} \alpha_{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} \tag{3-19}$$

где $I = i_1 \dots i_n$ пробегает все последовательности из n неповторяющихся индексов, а коэффициенты $\alpha_{i_1 \dots i_n}$ кососимметричны по $i_1, \dots, i_n$. Вклад в $\partial_J \omega$ дают лишь те слагаемые $a_I e_I$, у которых $I \supset J$. С точностью до общего знака,

$$\partial_J \omega = \pm \sum_{i \notin J} \alpha_{j_1 \dots j_{n-1} i}\, e_i\,. \tag{3-20}$$

Предложение 3.5

Следующие три условия на грассманов многочлен (3-19) эквивалентны:

1) $\omega = u_1 \wedge \dots \wedge u_n$ для некоторых $u_1, \dots, u_n \in V$

2) $u \wedge \omega = 0$ для всех $u \in \mathrm{supp}(\omega)$

3) для всех наборов $i_1 \dots i_{m+1}$ и $j_1 \dots j_{m-1}$, состоящих, соответственно, из $n+1$ и $n-1$ неповторяющихся в каждом из наборов индексов, выполнены *соотношения Плюккера*

$$\sum_{\nu=1}^{m+1} (-1)^{\nu-1} a_{j_1 \dots j_{m-1} i_\nu} a_{i_1 \dots \hat{i}_\nu \dots i_{m+1}} = 0\,, \tag{3-21}$$

где «крышка» в $a_{i_1 \dots \hat{i}_\nu \dots i_{m+1}}$ означает, что индекс i_ν следует пропустить.

[1] См. n° 1.5.2 на стр. 11.

[2] В силу знакопеременности тензора $\widetilde{\omega}$ изменение последовательности сворачиваемых сомножителей может привести лишь к смене знака у результата.

[3] В силу кососимметричности грассмановых частных производных можно было бы ограничиться только строго возрастающими последовательностями, но мы умышленно этого не делаем, чтобы упростить предстоящие далее вычисления.

Доказательство. Условие (1) означает, что ω лежит в старшей внешней степени $\Lambda^{\dim \operatorname{supp}(\omega)}$ своей линейной оболочки $\operatorname{supp}(\omega)$. По упр. 3.6 на стр. 24 это равносильно условию (2). Соотношение (3-21) представляет собою координатную запись условия (2) для $u = \partial_{j_1\cdots j_{m-1}}\omega$ и констатирует обнуление коэффициента при $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{m+1}}$ в произведении $(\partial_{j_1\cdots j_{m-1}}\omega) \wedge \omega$. Поскольку такие векторы u линейно порождают пространство $\operatorname{supp}(\omega)$, соотношения Плюккера равносильны условию (2). □

Пример 3.5 (квадрика Плюккера в $\mathbb{P}_5$)
Для четырёхмерного пространства V с базисом $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4$ запись квадратичного многочлена $\omega \in \Lambda^2 V$ в виде (3-19) выглядит как $\omega = \sum_{i,j} a_{ij} e_i \wedge e_j$, где коэффициенты a_{ij} образуют кососимметричную матрицу размера 4×4. Соотношение Плюккера для наборов $(i_1, i_2, i_3) = (2, 3, 4)$ и $j_1 = 1$ имеет вид

$$a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0\,. \tag{3-22}$$

Любой другой выбор непересекающихся наборов (i_1, i_2, i_3) и $j_1 \notin \{i_1, i_2, i_3\}$ приводит к тому же самому квадратичному соотношению (3-22).

Упражнение 3.14. Проверьте это.

Если же взять $j_1 \in \{i_1, i_2, i_3\}$, то получится тривиальное соотношение $0 = 0$, поскольку в каждом из произведений $a_{ij}a_{km}$ будет сомножитель вида $a_{nn} = 0$. Таким образом, множество разложимых в произведение двух линейных множителей грассмановых квадратичных форм от четырёх переменных описывается уравнением (3-22), которое задаёт гладкую квадрику в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$.

Упражнение 3.15. Убедитесь, что соотношение (3-22) на грассманову квадратичную форму $\omega = \sum_{i,j} a_{ij} e_i \wedge e_j \in \Lambda^2 \Bbbk^4$ равносильно условию $\omega \wedge \omega = 0$.

Пример 3.6 (разложимые квадратичые формы)
Пусть $\dim V = n$. Всякая грассманова квадратичная форма $\omega \in \Lambda^2 V$ раскладывается по базисным мономам как $\omega = \sum_{i,j} a_{ij} e_i \wedge e_j$, где числа $a_{ij} \in \Bbbk$ образуют кососимметричную $n \times n$ матрицу A, являющуюся матрицей Грама билинейной формы $\widetilde{\omega} : V^* \times V^* \to \Bbbk$ в двойственном базисе пространства V^*.

Упражнение 3.16. Убедитесь в этом.

В базисе $e_1, \ldots, e_d$, который двойствен к такому базису пространства V^*, где матрица Грама кососимметричной билинейной формы $\widetilde{\omega}$ имеет блочный диагональный вид из 2×2 блоков[1] $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, форма ω приобретает вид $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \ldots$. Если в этой сумме ровно одно слагаемое, то форма $\omega = e_1 \wedge e_2$ разложима, и $\omega \wedge \omega = 0$. Если слагаемых больше одного, то $\omega \wedge \omega = 2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + \ldots \neq 0$, и стало быть, форма ω не представляется в виде $u \wedge w$ ни для каких $u, w \in V$. Таким образом, грассманова квадратичная форма $\omega \in \Lambda^2 V$ разложима в произведение двух линейных форм если и только если $\omega \wedge \omega = 0$. При $\dim V = 4$ и $\dim \Lambda^4 V = 1$ условие $\omega \wedge \omega = 0$ на форму $\omega = \sum_{i,j} a_{ij} e_i \wedge e_j$ записывается одним квадратичным соотношением (3-22), констатирующим обнуление коэффициента при $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ в $\omega \wedge \omega$.

[1] См. раздел n° 16.5.2 части I.

3.4. Грассманианы. Множество m-мерных векторных подпространств в d-мерном векторном пространстве V называется *грассманианом* и обозначается $\mathrm{Gr}(m,d)$ или $\mathrm{Gr}(m,V)$, если важно указать конкретное пространство V. Грассманиан $\mathrm{Gr}(m,V)$ вкладывается в проективное пространство $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$ *отображением Плюккера*

$$p_m : \mathrm{Gr}(m,V) \to \mathbb{P}(\Lambda^m V)\,, \quad U \mapsto \Lambda^m U \subset \Lambda^m V\,, \tag{3-23}$$

которое сопоставляет каждому m-мерному подпространству $U \subset V$ одномерное подпространство $\Lambda^m U \subset \Lambda^m V$. Если векторы $u_1, \dots, u_m$ составляют базис в U, то с точностью до ненулевого постоянного множителя $p_m(U) = u_1 \wedge \ldots \wedge u_m$.

Упражнение 3.17. Убедитесь, что отображение (3-23) инъективно.

Образ плюккерова вложения (3-23) состоит из ненулевых грассмановых полиномов $\omega \in \Lambda^m V$, полностью разложимых в произведение m линейных множителей, т. е. имеющих линейный носитель минимально возможной размерности $\dim \mathrm{supp}\omega = \deg \omega = m$. Такие полиномы называются *разложимыми*. По предл. 3.5 классы пропорциональности таких полиномов составляют алгебраическое многообразие в $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$, задаваемое квадратичными уравнениями (3-21).

Грассманиан $\mathrm{Gr}(m,d)$ является прямым обобщением проективного пространства $\mathbb{P}_n = \mathrm{Gr}(1, n+1)$. Векторное подпространство $U \subset V$ размерности m в координатном пространстве $V = \Bbbk^d$ можно задавать $m \times d$ матрицей $X_{\boldsymbol{u}}$, в m строках которой стоят координаты векторов некоторого базиса $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_m)$ пространства U. При выборе в подпространстве U другого базиса $(w_1, \dots, w_m) = (u_1, \dots, u_m) \cdot C_{\boldsymbol{uw}}$, где $C_{\boldsymbol{uw}} \in \mathrm{GL}_m(\Bbbk)$ — матрица, по столбцам которой записаны координаты векторов базиса $\boldsymbol{w}$ в базисе $\boldsymbol{u}$, матрица $X_{\boldsymbol{u}}$ заменится матрицей $X_{\boldsymbol{w}} = C^t_{\boldsymbol{uw}} X_{\boldsymbol{u}}$.

Упражнение 3.18. Убедитесь в этом.

Таким образом, точки грассманиана $\mathrm{Gr}(m,d)$ биективно соответствуют орбитам действия группы $\mathrm{GL}_m(\Bbbk)$ левыми умножениями на множестве $m \times d$ матриц ранга m. При $m = 1$ мы получаем орбиты мультипликативной группы поля $\varkappa^\times = \mathrm{GL}_1(\Bbbk)$ на множестве ненулевых строк $(x_1, \dots, x_d)$. Матрица X, строки которой порождают заданное подпространство $U \subset \Bbbk^d$ является прямым аналогом строки однородных координат на $\mathbb{P}_n$, и мы будем называть её *матрицей однородных координат* точки $U \in \mathrm{Gr}(m,d)$. Подчеркнём, что она определена лишь с точностью до умножения слева на произвольные матрицы из $\mathrm{GL}_m(\Bbbk)$.

Упражнение 3.19. Убедитесь, что каждый коэффициент $x_{i_1 \dots i_n}$ в разложении

$$u_1 \wedge \ldots \wedge u_m = \sum_{i_1 < \ldots < i_m} x_{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$$

равен $m \times m$ минору матрицы $X_{\boldsymbol{u}}$, расположенному в столбцах $i_1, \dots, i_m$.

Набор рассматриваемых с точностью до пропорциональности $m \times m$ миноров $x_{i_1 \dots i_n}$ матрицы $X_{\boldsymbol{u}}$, т. е. набор однородных координат плюккерова образа $p_m(U) \in \mathbb{P}(\Lambda^m V)$ подпространства $U \subset V$, называется *плюккеровыми координатами* точки $U \in \mathrm{Gr}(m,d)$.

3.5. Многообразие Сегре как сечение грассманиана. Рассмотрим прямую сумму

$$W = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$$

конечномерных векторных пространств V_i. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ и произвольной последовательности целых чисел $m_1, \dots, m_n$, в которой $0 \leqslant m_i \leqslant \dim V_i$ при всех i и $\sum_\nu m_\nu = k$, обозначим через $W_{m_1 \dots m_n} \subset \Lambda^k W$ линейную оболочку всех тех грассмановых мономов $w_1 \wedge \ldots \wedge w_k$, у которых для каждого i ровно m_i из сомножителей w_ν лежит в V_i.

Упражнение 3.20. Покажите, что правило $\omega_1 \otimes \ldots \otimes \omega_n \mapsto \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n$ корректно задаёт линейный изоморфизм $\Lambda^{m_1} V_1 \otimes \ldots \otimes \Lambda^{m_n} V_n \xrightarrow{\sim} W_{m_1 \dots m_n}$ и что

$$\Lambda^k W = \bigoplus_{m_1, \dots, m_n} W_{m_1 \dots m_n} \simeq \bigoplus_{m_1, \dots, m_n} \Lambda^{m_1} V_1 \otimes \ldots \otimes \Lambda^{m_n} V_n \,. \tag{3-24}$$

В частности, тензорное произведение $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ канонически изоморфно прямому слагаемому $W_{1 \dots 1} \subset \Lambda^n W$ разложения (3-24). Этот изоморфизм переводит разложимые тензоры $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ в грассмановы мономы $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$. Таким образом, многообразие Сегре прим. 1.2 на стр. 6 представляет собою сечение грассманиана $\mathrm{Gr}(n, W) \subset \mathbb{P}(\Lambda^n W)$ проективным подпространством $\mathbb{P}\left(W_{1 \dots 1}\right) \subset \mathbb{P}(\Lambda^n W)$ и является проективным алгебраическим многообразием, задаваемым ограничениями квадратичных соотношений из предл. 3.5 на стр. 31 на линейное подпространство $W_{1 \dots 1} \subset \Lambda^n W$.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 3.1. Модифицируйте решение упр. 2.2.

Упр. 3.3. Форма α меняет знак при транспозиции любых двух аргументов, поскольку

$$0 = \alpha(\dots,(v+w),\dots,(v+w),\dots) = \alpha(\dots,v,\dots,w,\dots) + \alpha(\dots,w,\dots,v,\dots)\,.$$

Упр. 3.4. Дословно те же аргументы, что и в лем. 1.1 на стр. 4.

Упр. 3.5. Отправляя линейную форму $\xi : \Lambda^n V \to \Bbbk$ в её композицию с антикоммутативным умножением $\alpha_n : V \times \dots \times V \to \Lambda^n V$, мы получаем линейное отображение $(\Lambda^n V)^* \to \mathrm{Alt}^n(V,\Bbbk)$, являющееся изоморфизмом в силу универсального свойства α_n.

Упр. 3.6. Фиксируем в V базис $e_1,\dots,e_d$. Если $\omega \notin \Lambda^d V$, то в ω есть моном e_I, не содержащий какого-нибудь базисного вектора, скажем, e_j. Тогда $e_j \wedge \omega \neq 0$, ибо содержит ненулевой моном $e_{j\sqcup I}$. Наоборот, если $\omega \in \Lambda^d U$, то $\omega = \lambda \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_d$, и $e_i \wedge \omega = 0$ для всех i, откуда $v \wedge \omega = 0$ для всех $v \in V$. При чётном d центр алгебры ΛV линейно порождается мономами чётных степеней, при нечётном d — мономами чётных степеней и старшим мономом $e_1 \wedge \dots \wedge e_d$, который в этом случае имеет нечётную степень.

Упр. 3.7. Знак *тасующей перестановки* $(j_1,\dots,j_m,i_1,\dots,i_{n-m})$, где $j_1 < \dots < j_m$ и $i_1 < \dots < i_{n-m}$, вычисляется по *правилу ниточек*, см. пример 8.1 на стр. 131 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2223/lec_08.pdf.

Упр. 3.8. Это сразу следует из равенства $\det A = \det A^t$.

Упр. 3.9. Если все $A_{ij} = 0$, положим $A = 0$, если, скажем, $A_{12} \neq 0$, положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -A_{23}/A_{12} & -A_{24}/A_{12} \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \end{pmatrix}.$$

Обратите внимание, что равенство

$$A_{34} = \det \begin{pmatrix} -A_{23}/A_{12} & -A_{24}/A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{pmatrix}$$

эквивалентно соотношению Плюккера из форм. (3-13) на стр. 27.

Упр. 3.12. Аналогично упр. 2.10.

Упр. 3.13. Убедитесь, что $\Lambda^n U \cap \Lambda^n W = \Lambda^n(U \cap W)$ в $\Lambda^n V$ для любых подпространств $U, W \subset V$.

Упр. 3.16. Каждый моном $e_i \wedge e_j$ поляризуется в билинейную форму

$$\frac{1}{2}(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i) : V^* \times V^* \to \Bbbk\,, \quad (x_k, x_m) \mapsto \begin{cases} 1/2 & \text{при } k = i, m = j \\ -1/2 & \text{при } k = j, m = i \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

поэтому каждая пара слагаемых $a_{ij}\left(e_i \wedge e_j - e_i \wedge e_j\right)$, где $i < j$, поляризуется в квадратичную форму, матрица Грама которой имеет a_{ij} и $-a_{ij}$, соответственно, в клетках (i,j) и (j,i), и нули в остальных местах.

Упр. 3.17. Пусть $U_1 \neq U_2$. Выберем базис в $U_1 \cap U_2$, дополним его до базисов в U_1, U_2, и включим все эти векторы в некоторый базис пространства V. Тогда $\Lambda^k U_1$ и $\Lambda^k U_2$ будут порождаться различными базисными мономами пространства $\Lambda^k V$.

Упр. 3.18. По условию, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e} \cdot X_{\boldsymbol{w}}^t$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e} \cdot X_{\boldsymbol{u}}^t$, $\boldsymbol{w} = u \cdot C_{\boldsymbol{uw}}$, где $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}$ суть строки из базисных векторов в V и U. Следовательно, $X_{\boldsymbol{w}}^t = X_{\boldsymbol{u}}^t C_{\boldsymbol{uw}}$.

Упр. 3.19. См. http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_08.pdf, раздел 8.4.2 на стр. 118.