§1. Тензорная алгебра

1.1. Полилинейные отображения. Рассмотрим векторные пространства $V_1, \dots, V_n$ и W над любым полем $\Bbbk$. Отображение множеств

$$\varphi : V_1 \times \dots \times V_n \to W \tag{1-1}$$

называется *полилинейным*[1], если оно линейно по каждому из n своих аргументов при произвольно зафиксированных остальных: $\varphi(\dots, \lambda u+\mu v, \dots) = \lambda\,\varphi(\dots, u, \dots)+\mu\,\varphi(\dots, v, \dots)$. Полилинейные отображения образуют векторное пространство относительно стандартных операций сложения и умножения на числа функций со значениями в векторном пространстве. Пространство полилинейных отображений обозначается $\mathrm{Hom}(V_1, \dots, V_n; W)$. Если выбрать в каждом пространстве V_i базис $E_i \subset V_i$ и для каждого сочетания базисных векторов

$$(e_1, \dots, e_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$$

произвольным образом указать вектор $\varphi(e_1, \dots, e_n) \in W$, то этот набор данных однозначно задаст полилинейное отображение (1-1) с указанными значениями на наборах базисных векторов. Его значение на произвольном наборе векторов $(v_1, \dots, v_n)$, где $v_i = \sum_{e_i \in E_i} x_{e_i} e_i \in V_i$, равно $\varphi(v_1, \dots, v_n) = \sum_{(e_1,\dots,e_n)\in E_1\times\dots\times E_n} x_{e_1} x_{e_2} \dots x_{e_n} \varphi(e_1, \dots, e_n)$. Если выбрать в пространстве W базис $E \subset W$ и разложить по нему все векторы $\varphi(e_1, \dots, e_n)$:

$$\varphi(e_1, \dots, e_n) = \sum\nolimits_{e\in E} a^e_{e_1,\dots,e_n} e\,,$$

получим набор чисел $a^e_{e_1,\dots,e_n} \in \Bbbk$, который естественно организуется в $(n+1)$-мерную матрицу, ячейки которой нумеруются элементами множества[2] $E \times E_1 \times \dots \times E_n$. В терминах этой матрицы

$$\varphi(v_1, \dots, v_n) = \sum\nolimits_{(e,e_1,\dots,e_n)\in E\times E_1\times\dots\times E_n} x_{e_1} \dots x_{e_n} a^e_{e_1,\dots,e_n} e\,.$$

При сложении полилинейных отображений и умножении их на числа соответствующие этим отображениям многомерные матрицы поэлементно складываются и умножаются на числа. Таким образом, мы получаем $\Bbbk$-линейный изоморфизм пространства полилинейных отображений с пространством многомерных матриц. Мы заключаем, что если $\dim V_i = d_i$ и $\dim W = d$, то $\dim \mathrm{Hom}(V_1, \dots, V_n; W) = d d_1 \dots d_n$.

1.1.1. Универсальное полилинейное отображение. Если помимо пространств $V_1, \dots, V_n$ и W задаться ещё одним пространством U и полилинейным отображением

$$\tau : V_1 \times \dots \times V_n \to U\,, \tag{1-2}$$

то каждому линейному отображению $F : U \to W$ можно сопоставить полилинейное отображение $F \circ \tau : V_1 \times \dots \times V_n \to W$. Это сопоставление является линейным отображением векторных пространств

$$\mathrm{Hom}(U, W) \to \mathrm{Hom}(V_1, \dots, V_n; W)\,, \quad F \mapsto F \circ \tau\,. \tag{1-3}$$

[1] Или *n-линейным*, когда желательно точно указать количество аргументов.

[2] При $n = 1$ получается обычная двумерная матрица линейного отображения $V \to W$, строки которой биективно соответствуют базисным векторам пространства W, а столбцы — базисным векторам пространства V.

Полилинейное отображение (1-2) называется *универсальным*, если для каждого векторного пространства W линейное отображение (1-3) является изоморфизмом. Это означает, что для каждого полилинейного отображения $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ существует единственное такое линейное отображение $F : U \to W$, что $\varphi = F \circ \tau$, т. е. пара полилинейных сплошных стрелок в диаграмме

$$
\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dd, dashed, "F"] \\
V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\
 & W
\end{tikzcd}
$$

всегда замыкается в коммутативный треугольник единственным пунктирным линейным отображением.

Лемма 1.1

Для любых двух универсальных полилинейных отображений

$$\tau_1 : V_1 \times \ldots \times V_n \to U_1 \quad \text{и} \quad \tau_2 : V_1 \times \ldots \times V_n \to U_2$$

имеется единственный такой линейный изоморфизм $\iota : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$, что $\tau_2 = \iota\tau_1$.

Доказательство. В силу универсальности τ_1 и τ_2 существуют единственные такие линейные отображения $F_{21} : U_1 \to U_2$ и $F_{12} : U_2 \to U_1$, что $\tau_2 = F_{21}\tau_1$ и $\tau_1 = F_{12}\tau_2$, т. е. коммутативна диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_1}"'] \arrow[dr, dashed, "F_{21}"] & & & & U_2 \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_2}"] \arrow[dl, dashed, "F_{12}"'] \\
 & U_2 \arrow[dl, dashed, "F_{12}"] & V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[l, "\tau_2"'] \arrow[ull, "\tau_1"'] \arrow[dll, "\tau_1"] \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[urr, "\tau_2"] \arrow[drr, "\tau_2"'] & U_1 \arrow[dr, dashed, "F_{21}"'] & \\
U_1 & & & & U_2 \,.
\end{tikzcd}
$$

Равенства $F_{21}F_{12} = \mathrm{Id}_{U_2}$ и $F_{12}F_{21} = \mathrm{Id}_{U_1}$ выполняются в силу того, что разложения $\tau_1 = \varphi \circ \tau_1$ и $\tau_2 = \psi \circ \tau_2$ единственны и имеют место для $\varphi = \mathrm{Id}_{U_1}$, $\psi = \mathrm{Id}_{U_2}$. □

1.2. Тензорное произведение. Универсальное полилинейное отображение называется *тензорным произведением векторов* и обозначается

$$\tau : V_1 \times \ldots \times V_n \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \,. \tag{1-4}$$

Единственное с точностью до единственного перестановочного с тензорным произведением векторов изоморфизма пространство $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ называется *тензорным произведением* векторных пространств $V_1, \ldots, V_n$, а его элементы — *тензорами*. Тензорные произведения векторов обычно записывают в виде

$$v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \stackrel{\text{def}}{=} \tau(v_1, \ldots, v_n) \,. \tag{1-5}$$

Они составляют образ универсального отображения (1-4) и называются *разложимыми* тензорами. Так как отображение (1-4) не линейно, а полилинейно, его образ как правило не является векторным подпространством, и наугад взятая линейная комбинация мономов (1-5) скорее всего не раскладывается в тензорное произведение n векторов.

1.2.1. Существование тензорного произведения. Данные выше определения обеспечивают единственность универсального полилинейного отображения, но не гарантируют его существования. В этом разделе мы явно построим пространство $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ и укажем в нём базис. Рассмотрим векторное пространство[1] $\mathcal{V}$, базисом которого по определению являются всевозможные n-буквенные слова $[v_1 \ldots v_n]$, в которых в качестве i-той буквы может выступать любой вектор $v_i \in V_i$. В этом огромном пространстве рассмотрим не менее огромное подпространство $\mathcal{R} \subset \mathcal{V}$, порождённое всевозможными трёхчленными линейными комбинациями вида

$$[\ \ldots\ (\lambda u + \mu w)\ \ldots\ ] - \lambda\,[\ \ldots\ u\ \ldots\ ] - \mu\,[\ \ldots\ w\ \ldots\ ]\,, \tag{1-6}$$

где обозначенные многоточиями соответственные фрагменты всех трёх слов одинаковы. Положим по определению

$$V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \overset{\text{def}}{=} \mathcal{V}/\mathcal{R}\,, \quad v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \overset{\text{def}}{=} [v_1 \ldots v_n] \,(\mathrm{mod}\ \mathcal{R})\,. \tag{1-7}$$

Иными словами, пространство $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ состоит из конечных линейных комбинаций формальных тензорных мономов $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$, в которых $v_i \in V_i$ и которые подчиняются стандартным соотношениям дистрибутивности: если любой из сомножителей (при фиксированных остальных) записать в виде линейной комбинации векторов, то такое произведение можно преобразовать по обычному правилу для раскрытия скобок:

$$\ldots\ \otimes (\lambda u + \mu w) \otimes\ \ldots\ = \lambda \cdot (\ \ldots\ \otimes u \otimes\ \ldots\ ) + \mu \cdot (\ \ldots\ \otimes w \otimes\ \ldots\ )\,. \tag{1-8}$$

Лемма 1.2
Отображение $\tau : V_1 \times \ldots \times V_n \to \mathcal{V}/\mathcal{R}$, $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto [v_1 \ldots v_n]\,(\mathrm{mod}\ \mathcal{R})$, является универсальным полилинейным отображением.

Доказательство. Полилинейность тавтологически следует из наложенных соотношений и выражается в точности формулой (1-8). Докажем универсальность. Для любого отображения множеств $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ существует единственное линейное отображение $F : \mathcal{V} \to W$, переводящее базисный вектор $[v_1 \ldots v_n] \in \mathcal{V}$ в $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$. Для того, чтобы это отображение было корректно определено на факторе $\mathcal{V}/\mathcal{R}$, достаточно проверить, что $\mathcal{R} \subset \ker F$. Для каждого соотношения (1-6) из полилинейности φ и линейности F получаем

$$\begin{aligned} &F\big([\ldots(\lambda u + \mu w)\ldots] - \lambda\,[\ldots u \ldots] - \mu\,[\ldots w \ldots]\big) = \\ &\qquad = F\big([\ldots(\lambda u + \mu w)\ldots]\big) - \lambda\,F\big([\ldots u \ldots]\big) - \mu\,F\big([\ldots w \ldots]\big) = \\ &\qquad\qquad = \varphi(\ldots, (\lambda u + \mu w), \ldots) - \lambda\,\varphi(\ldots, u, \ldots) - \mu\,\varphi(\ldots, w, \ldots) = 0\,, \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Следствие 1.1
Разложимые тензоры $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ линейно порождают пространство $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$.

Доказательство. Поскольку слова $[v_1 \ldots v_n]$ линейно порождают $\mathcal{V}$, их образы $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ при факторизации $\mathcal{V} \twoheadrightarrow \mathcal{V}/\mathcal{R}$ линейно порождают фактор $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n = \mathcal{V}/\mathcal{R}$. □

[1] Скорее всего, бесконечномерное.

Теорема 1.1
Если в каждом пространстве V_i задан базис $E_i \subset V_i$, то всевозможные тензорные произведения

$$e_1 \otimes \ldots \otimes e_n\,, \text{ где } e_i \in E_i\,, \tag{1-9}$$

базисных векторов образуют базис в $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$. В частности, $\dim V_1 \otimes \ldots \otimes V_n = \prod_i \dim V_i$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{W}$ пространство с базисом из выражений (1-9), которые мы временно будем воспринимать как формальные символы. Полилинейное отображение

$$\tau : V_1 \times \ldots \times V_n \to \mathcal{W}\,,$$

переводящее каждый набор базисных векторов $(e_1, \ldots, e_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ в соответствующий базисный вектор (1-9) пространства $\mathcal{W}$, универсально, поскольку для любых полилинейного и линейного отображений $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ и $F : \mathcal{W} \to W$ равенство $\varphi = F \circ \tau$ равносильно выполнению для всех $(e_1, \ldots, e_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ равенств $F(e_1 \otimes \ldots \otimes e_n) = \varphi(e_1, \ldots, e_n)$, которые однозначно определяют F, если задано φ, и наоборот. По лем. 1.1 имеется единственный линейный изоморфизм $\mathcal{W} \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$, переводящий базисные векторы (1-9) пространства $\mathcal{W}$ в соответствующие тензорные произведения базисных векторов, вычисленные в $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$. Тем самым, последние тоже образуют базис. □

Пример 1.1 (многочлены)
Обратите внимание, что теор. 1.1 верна и для *бесконечномерных* векторных пространств. Например, тензорное произведение n экземпляров пространства многочленов $\Bbbk[x] \otimes \ldots \otimes \Bbbk[x]$ изоморфно пространству многочленов от n переменных $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$. Изоморфизм сопоставляет базисному разложимому тензору $x^{m_1} \otimes \ldots \otimes x^{m_n}$ базисный моном $x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$.

Пример 1.2 (многообразия Сегре)
Тензорное произведение $\tau : V_1 \times \ldots \times V_n \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ конечномерных пространств V_i задаёт отображение $s : \mathbb{P}_{m_1} \times \ldots \times \mathbb{P}_{m_n} \to \mathbb{P}_m$ из произведения проективных пространств $\mathbb{P}_{m_i} = \mathbb{P}(V_i)$ в проективное пространство $\mathbb{P}_m = \mathbb{P}\left(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n\right)$. Это отображение называется *вложением Сегре*. Оно переводит набор одномерных подпространств, натянутых на ненулевые векторы $v_i \in V_i$, в одномерное подпространство, порождённое тензором $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$.

Упражнение 1.1. Убедитесь, что отображение корректно определено[1] и инъективно.

Образ вложения Сегре состоит из классов пропорциональности разложимых тензоров и называется *многообразием Сегре*. По построению, многообразие Сегре заметается n семействами проективных подпространств размерностей $m_1, \ldots, m_n$. Его размерность $\sum m_i$ обычно гораздо меньше размерности $m = \prod(m_i + 1) - 1$ объемлющего пространства. При этом многообразие Сегре не содержится ни в какой гиперплоскости, поскольку линейная оболочка множества разложимых тензоров совпадает со всем пространством $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$.

1.2.2. Линейные операторы как тензоры. Рассмотрим для векторных пространств U, W билинейное отображение $W \times U^* \to \mathrm{Hom}(U, W)$, переводящее $(w, \xi) \in W \times U^*$ в оператор

$$U \to W\,, \quad u \mapsto \xi(u) \cdot w\,, \tag{1-10}$$

[1] Т. е. тензор $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ отличен от нуля и заменяется на пропорциональный при замене векторов v_i на пропорциональные.

образ которого порождён вектором w, а ядро равно $\mathrm{Ann}(\xi)$. При ненулевых ξ, w этот оператор имеет ранг 1, и каждый оператор $F: U \to W$ ранга 1 получается таким образом из подходящих ненулевых ξ, w, однозначно с точностью до пропорциональности определяемых оператором F как аннулятор подпространства $\ker F \subset U$, имеющего коразмерность 1, и базисный вектор в одномерном подпространстве $\operatorname{im} F \subset W$. Поэтому, переходя к проективизациям, мы получаем корректно определённое *вложение Сегре*

$$s: \mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(U^*) \hookrightarrow \mathbb{P}\big(\mathrm{Hom}(U, W)\big),$$

образ которого состоит из рассматриваемых с точностью до пропорциональности линейных операторов $U \to W$ ранга 1. В силу универсального свойства тензорного произведения, существует единственное линейное отображение

$$W \otimes U^* \to \mathrm{Hom}(U, V) \tag{1-11}$$

переводящее каждый разложимый тензор $w \otimes \xi$ в оператор (1-10). Если пространства U и W конечномерны с базисами $u_1, \dots, u_n$ и $w_1, \dots, w_m$, то mn разложимых тензоров $w_j \otimes u_i^*$, где $u_1^*, \dots, u_n^* \in U^*$ это двойственный к $u_1, \dots, u_n$ базис пространства U^*, образуют базис пространства $W \otimes U^*$. Отображение (1-11) переводит тензор $w_j \otimes u_i^*$ в линейный оператор

$$U \to W, \quad u_k \mapsto \begin{cases} w_j & \text{при } k = i \\ 0 & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

матрица которого в выбранных базисах имеет единицу в клетке (i, j) и нули в остальных местах. Таким образом, стандартный базис тензорного произведения $W \otimes U^*$ переводится в стандартный базис пространства операторов, т. е. отображение (1-11) является линейным изоморфизмом. В дальнейшем мы часто будем отождествлять пространства $W \otimes U^*$ и $\mathrm{Hom}(U, W)$ при помощи изоморфизма (1-11) и обозначать оператор (1-10) через $w \otimes \xi$.

Если записывать операторы $U \to W$ их матрицами $A = (a_{ij})$ в выбранных выше базисах, то точки $w = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_m = \mathbb{P}(W)$ и $\xi = (y_0 : y_1 : \dots : y_m) \in \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(U^*)$ перейдут при вложении Сегре в $m \times n$ матрицу $A = w^t \cdot \xi$ с элементами $a_{ij} = x_i y_j$, а его образ, состоящий из матриц ранга 1, задастся однородными квадратичными уравнениями

$$\det \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{\ell j} & a_{\ell k} \end{pmatrix} = a_{ij} a_{\ell k} - a_{ik} a_{\ell j} = 0.$$

Два семейства координатных пространств $\xi \times \mathbb{P}_m$ и $\mathbb{P}_n \times w$ при этом перейдут в два семейства лежащих на многообразии Сегре проективных пространств, образованных матрицами ранга 1 с фиксированными отношениями между строками и столбцами соответственно.

Пример 1.3 (квадрика Сегре в $\mathbb{P}_3$)
При $U = W = \Bbbk^2$ вложение Сегре задаёт биекцию между $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ и обсуждавшейся в курсе геометрии[1] квадрикой Сегре в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\left(\mathrm{Mat}_2(\Bbbk)\right)$, точками которой являются ненулевые матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ с $ad - bc = 0$, рассматриваемые с точностью до пропорциональности. Эта биекция переводит пару точек $(x_0 : x_1)$ и $(y_0 : y_1)$ в матрицу

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 y_0 & x_1 y_0 \\ x_0 y_1 & x_1 y_1 \end{pmatrix} \tag{1-12}$$

[1] См. раздел 19.4.1 на стр. 246 в http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2021/lec_19.pdf.

и отображает два семейства координатных прямых $\mathbb{P}_1 \times \{y\}$, $\{x\} \times \mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ в два семейства проективных прямых на квадрике Сегре, образованных матрицами ранга 1 с фиксированными отношениями [строка 1] : [строка 2] $= (x_0 : x_1)$ и [столбец 1] : [столбец 2] $= (y_0 : y_1)$. В каждом из семейств все прямые попарно скрещиваются, а любые две прямые из разных семейств пересекаются, при этом каждая точка квадрики Сегре является точкой пересечения ровно одной пары прямых из разных семейств, и никаких других прямых на квадрике Сегре нет.

Упражнение 1.2. Докажите все эти геометрические утверждения.

1.3. Канонические изоморфизмы. Линейные отображения $f : V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to W$ удобно задавать указанием значений $f(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)$ на разложимых тензорах, а затем по линейности продолжать f на произвольные тензоры. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$, такое продолжение единственно при условии, что оно существует. Последнее равносильно тому, что все линейные соотношения, которые имеются между разложимыми тензорами, выполняются и между их образами в W. Поскольку все эти соотношения линейно порождаются соотношениями полилинейности из форм. (1-8) на стр. 5, мы получаем следующий полезный критерий.

Лемма 1.3
Линейное отображение $f : V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to W$, $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto f(v_1, \ldots, v_n)$, существует если и только если векторы $f(v_1, \ldots, v_n) \in W$ полилинейно зависят[1] от векторов $v_i \in V_i$. □

Предложение 1.1
Имеется канонический изоморфизм $U \otimes W \simeq W \otimes U$, $u \otimes w \mapsto w \otimes u$.

Доказательство. Так как правило $u \otimes w \mapsto w \otimes u$ билинейно по u, w, оно по лем. 1.3 корректно определяет линейное отображение $U \otimes W \to W \otimes U$. Аналогично, существует линейное отображение $W \otimes U \to U \otimes W$, $w \otimes u \mapsto u \otimes w$. Оно обратно предыдущему, поскольку обе их композиции тождественно действуют на разложимых тензорах. □

Предложение 1.2
Имеются канонические изоморфизмы $V \otimes (U \otimes W) \simeq V \otimes U \otimes W \simeq (V \otimes U) \otimes W$, переводящие тензоры $v \otimes (u \otimes w)$, $v \otimes u \otimes w$ и $(v \otimes u) \otimes w$ друг в друга.

Доказательство. Поскольку тензор $v \otimes (u \otimes w) \in V \otimes (U \otimes W)$ трилинейно зависит от (v, u, w), существует линейное отображение $V \otimes U \otimes W \to V \otimes (U \otimes W)$, $v \otimes u \otimes w \mapsto v \otimes (u \otimes w)$. Обратное отображение строится в два шага. При каждом $v \in V$ тензор $v \otimes u \otimes w$ билинейно зависит от u и w. Поэтому имеется линейное отображение

$$\tau_v : U \otimes W \to V \otimes U \otimes W, \quad u \otimes w \mapsto v \otimes u \otimes w,$$

которое само по себе линейно зависит от v. Так как тензор $\tau_v(t) = v \otimes t$ билинеен по $v \in V$ и $t \in U \otimes W$, мы получаем искомое линейное отображение

$$V \otimes (U \otimes W) \to V \otimes U \otimes W, \quad v \otimes (u \otimes w) \mapsto v \otimes u \otimes w.$$

Изоморфизм $V \otimes U \otimes W \simeq (V \otimes U) \otimes W$ устанавливается аналогично. □

[1] Т. е. линейны по каждому v_i при фиксированных остальных.

Предложение 1.3

Имеются канонические изоморфизмы

$$V \otimes (U \oplus W) \simeq (V \otimes U) \oplus (V \otimes W) \quad \text{и} \quad (U \oplus W) \otimes V \simeq (U \otimes V) \oplus (W \otimes V)\,,$$

действующие на разложимые тензоры по правилам:

$$v \otimes (u \dotplus w) \leftrightarrows (v \otimes u) \dotplus (v \otimes w) \quad \text{и} \quad (u \dotplus w) \otimes v \leftrightarrows (u \otimes v) \dotplus (w \otimes v)$$

где $a \dotplus b$ для $a \in A$ и $b \in B$ означает сумму элементов $(a, 0)$ и $(0, b)$ в $A \oplus B$.

Доказательство. Достаточно построить первый изоморфизм, второй получится из него применением предл. 1.1. Отображение

$$V \otimes (U \oplus W) \to (V \otimes U) \oplus (V \otimes W)\,, \quad v \otimes (u \dotplus w) \mapsto (v \otimes u) \dotplus (v \otimes w)\,, \tag{1-13}$$

существует, поскольку $(v \otimes u) \dotplus (v \otimes w)$ билинеен по v и $u \dotplus w$. Обратное отображение снова строится в два шага: сначала строим линейные отображения

$$f_1 : V \otimes U \to V \otimes (U \oplus W)\,, \quad v \otimes u \mapsto v \otimes (u \dotplus 0)\,,$$
$$f_2 : V \otimes W \to V \otimes (U \oplus W)\,, \quad v \otimes w \mapsto v \otimes (0 \dotplus w)\,,$$

затем складываем их в отображение

$$f : (V \otimes U) \oplus (V \otimes W) \to V \otimes (U \oplus W)\,, \quad a \dotplus b \mapsto f_1(a) + f_2(b)\,,$$

очевидно, линейное и обратное к (1-13). □

1.4. Тензорные степени. Тензорное произведение n экземпляров векторного пространства V с самим собой называется n-той *тензорной степенью* пространства V и обозначается

$$V^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} V \otimes \ldots \otimes V\,.$$

Мы полагаем $V^{\otimes 0} \stackrel{\text{def}}{=} \Bbbk$ и $V^{\otimes 1} \stackrel{\text{def}}{=} V$. Тензорное умножение векторов задаёт на прямой сумме

$$TV \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus\nolimits_{n \geqslant 0} V^{\otimes n}$$

структуру (некоммутативной) ассоциативной градуированной[1] $\Bbbk$-алгебры. Если зафиксировать в V базис $E \subset V$, то по теор. 1.1 на стр. 6 моном $1 \in V^0$ и всевозможные тензорные мономы

$$e_1 \otimes \ldots \otimes e_m\,, \quad e_i \in E\,,\ m \in \mathbb{N}\,, \tag{1-14}$$

составят базис векторного пространства TV. Умножение мономов (1-14) заключается в приписывании их друг к другу через знак $\otimes$, моном 1 служит единицей. Таким образом, фиксация базиса E в V позволяет отождествить алгебру TV с алгеброй многочленов от *не коммутативных* переменных $e \in E$. Каждое прямое слагаемое $V^{\otimes n} \subset TV$ является пространством однородных многочленов степени n. Алгебра TV называется *тензорной алгеброй* пространства V или *свободной ассоциативной* $\Bbbk$-*алгеброй*, порождённой пространством V. Вложение $\iota : V \hookrightarrow TV$ в качестве подпространства $V^{\otimes 1}$ обладает следующим универсальным свойством.

[1]Алгебра A над полем $\Bbbk$ называется *градуированной*, если она является прямой суммой векторных пространств $A = \bigoplus_{k \geqslant 0} A_k$, которые перемножаются так, что $A_k A_m \subset A_{k+m}$ для всех k, m.

Предложение 1.4 (универсальное свойство тензорной алгебры)
Для любого линейного отображения $f : V \to A$ в произвольную ассоциативную $\Bbbk$-алгебру A существует единственный такой гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\alpha : TV \to A$, что $f = \alpha \circ \iota$. Другими словами, гомоморфизмы $\Bbbk$-алгебр $TV \to A$ находятся в канонической биекции с линейными отображениям $V \to A$.

Доказательство. Искомый гомоморфизм α должен переводить каждый разложимый тензор

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in TV$$

в произведение $f(v_1)\dots f(v_n) \in A$. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают алгебру TV, гомоморфизм α единствен, если существует. Так как для любого линейного отображения $f : V \to A$ произведение $f(v_1)\dots f(v_n) \in A$ полилинейно по v_i, по лем. 1.3 на стр. 8 для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует линейное отображение $\alpha_n : V^{\otimes n} \to A$, $v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto f(v_1)\dots f(v_n)$. Нужный нам гомоморфизм $\alpha : TV \to A$ переводит конечную сумму $\sum_k t_k$ однородных тензоров $t_k \in V^{\otimes k}$ в сумму $\sum_k \alpha_k(t_k) \in A$, где $\alpha_0 : V^0 \to A$ переводит единицу в единицу. □

Упражнение 1.3. Убедитесь, что $\Bbbk$-алгебра TV вместе с вложением $\iota : V \hookrightarrow TV$ определяются своим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма $\Bbbk$-алгебр, перестановочного с вложением ι.

1.5. Свёртки. Для двойственных векторных пространств V, V^* над полем $\Bbbk$ и пары разложимых тензоров одинаковой степени $t = v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ и $\vartheta = \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ число

$$\langle\, t\,,\, \vartheta\,\rangle \overset{\text{def}}{=} \prod\nolimits_{i=1}^{n} \xi_i(v_i) = \prod\nolimits_{i=1}^{n} \langle\, v_i\,,\, \xi_i\,\rangle \in \Bbbk \tag{1-15}$$

называется *полной свёрткой* тензоров t и ϑ. Поскольку при каждом $\vartheta \in V^{*\otimes n}$ число (1-15) полилинейно по векторам v_i, существует единственный ковектор $c_\vartheta \in V^{\otimes n*}$

$$c_\vartheta : V^{\otimes n} \to \Bbbk\,, \quad v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto \langle\, v_1 \otimes \dots \otimes v_n\,,\, \vartheta\,\rangle\,,$$

и этот ковектор полилинеен по сомножителям $\xi_1, \dots, \xi_n$ разложимого тензора ϑ. Поэтому существует единственное линейное отображение

$$V^{*\otimes n} \to V^{\otimes n*}\,, \quad \vartheta \mapsto c_\vartheta\,. \tag{1-16}$$

Иначе говоря, полная свёртка (1-15) корректно задаёт билинейное спаривание[1]

$$V^{\otimes n} \times V^{*\otimes n} \to \Bbbk\,, \quad (t, \vartheta) \mapsto \langle\, t\,,\, \vartheta\,\rangle\,. \tag{1-17}$$

Предложение 1.5
Для конечномерного пространства V спаривание (1-17) совершенно, т. е. линейное отображение (1-16) является изоморфизмом.

Доказательство. Тензорные мономы $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$ и $e_1^* \otimes \dots \otimes e_n^*$, составленные из векторов $e_i \in E$ и ковекторов $e_i^* \in E^*$ двойственных друг другу базисов E и E^* пространств V и V^* образуют двойственные базисы в $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n}$. □

[1] См. раздел 7.2 части I

Следствие 1.2

Сопоставление разложимому тензору $\xi = \xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ полилинейной формы

$$\xi : V \times \ldots \times V \to \Bbbk, \quad \xi(v_1, \ldots, v_n) = \prod_{i=1}^{n} \xi_i(v_i),$$

задаёт для любого конечномерного пространства V изоморфизм

$$V^{*\otimes n} \simeq \mathrm{Hom}(V, \ldots, V;\ \Bbbk). \tag{1-18}$$

Доказательство. В силу универсального свойства тензорного произведения пространство $V^{\otimes n*}$ линейных отображений $V^{\otimes n} \to \Bbbk$ изоморфно пространству n-линейных форм $V \times \ldots \times V \to \Bbbk$. Изоморфизм (1-18) является композицией этого изоморфизма с изоморфизмом (1-16). □

1.5.1. Частичные свертки. Пара инъективных (возможно не монотонных) отображений

$$\{1, \ldots, p\} \xleftarrow{I} \{1, \ldots, m\} \xrightarrow{J} \{1, \ldots, q\}$$

задаёт два слова $I = (i_1, \ldots, i_m)$, $J = (j_1, \ldots, j_m)$ одинаковой длины m, состоящие из не повторяющихся в пределах каждого слова индексов $i_\nu = I(\nu)$ и $j_\nu = J(\nu)$. Линейный оператор

$$\begin{gathered} c^I_J : V^{*\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \to V^{*\otimes(p-m)} \otimes V^{\otimes(q-m)}, \\ \xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_p \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_q \mapsto \prod_{\nu=1}^{m} \xi_{i_\nu}(v_{j_\nu}) \cdot \bigotimes_{i \notin I} \xi_i \otimes \bigotimes_{j \notin J} v_j, \end{gathered} \tag{1-19}$$

который для каждого $\nu = 1, \ldots, m$ сворачивает i_ν-й сомножитель произведения $V^{*\otimes p}$ с j_ν-м сомножителем произведения $V^{\otimes q}$, оставляя все остальные тензорные сомножители в их первоначальном порядке, называется *частичной сверткой* по индексам I и J. Отметим, что разные пары отображений I, J могут приводить к *разным* отображениям свёртки даже в тех случаях, когда они имеют одинаковые пары теоретико-множественных образов и отличаются только порядком элементов в этих образах.

Пример 1.4 (свёртка вектора с полилинейной формой)

Посредством изоморфизма из сл. 1.2 интерпретируем n-линейную форму $\varphi : V \times \ldots \times V \to \Bbbk$ как тензор $\varphi \in V^{*\otimes n}$. Его свёртка с произвольно выбранным вектором $v \in V$ по первому тензорному сомножителю лежит в $V^{*\otimes(n-1)}$ и является $(n-1)$-линейной формой на V. Эта форма называется *внутренним произведением* v и φ и обозначается $v \llcorner \varphi$ или $i_v\varphi$. Поскольку для разложимой формы $\varphi = \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n$ выполняется равенство

$$i_v\varphi(w_1, \ldots, w_{n-1}) = \varphi_1(v)\varphi_2(w_1) \ldots \varphi_n(w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, \ldots, w_{n-1}), \tag{1-20}$$

левая и правая части которого линейны по φ, левая часть равна правой для всех, в том числе и неразложимых, полилинейных форм φ, т. е. внутреннее умножение формы на вектор означает фиксацию этого вектора в качестве первого аргумента формы.

1.5.2. Линейный носитель тензора. Для заданного тензора $t \in V^{\otimes n}$ пересечение всех таких векторных подпространств $U \subset V$, что $t \in U^{\otimes n}$, называется *линейным носителем* тензора t и обозначается $\mathrm{supp}(t) \subset V$. Иначе носитель можно охарактеризовать как такое наименьшее по включению или же по размерности подпространство $U \subset V$, что $t \in U^{\otimes n}$. Эквивалентность всех приведённых описаний вытекает из равенства $U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n} = (U \cap W)^{\otimes n}$.

Упражнение 1.4. Докажите это равенство.

Размерность носителя называется *рангом* тензора и обозначается $\operatorname{rk} t \stackrel{\text{def}}{=} \dim \operatorname{supp}(t)$. Тензор t называется *вырожденным*, если его носитель $\operatorname{supp}(t) \subsetneq V$ имеет положительную коразмерность. Это означает, что некоммутативный многочлен t «эффективно зависит» от меньшего, чем $\dim V$, числа переменных, и при помощи линейной замены базиса можно убрать часть переменных из t. Например, если $\dim \operatorname{supp}(t) = 1$, то $t = c \cdot v^{\otimes n}$ для некоторых $c \in \Bbbk$ и $v \in V$.

Явно указать векторы, линейно порождающие $\operatorname{supp}(t)$ над $\Bbbk$ можно при помощи свёрток. Для любой последовательности $J = j_1, \dots, j_{n-1}$ из $n-1$ неповторяющихся индексов[1] $1 \leqslant j_\nu \leqslant n$ обозначим через

$$t_J : V^{*\otimes(n-1)} \to V, \quad \xi \mapsto c^{1,\dots,(n-1)}_{j_1,\dots,j_{n-1}}(\xi \otimes t), \tag{1-21}$$

полную свёртку с тензором t, которая спаривает ν-й сомножитель произведения $V^{*\otimes(n-1)}$ с j_ν-м сомножителем тензора t для всех $1 \leqslant \nu \leqslant (n-1)$. Если записать t в виде суммы разложимых тензоров вида $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$, то результатом такой свёртки будет линейная комбинация векторов v_i с $i \notin J$. Очевидно, что она лежит в $\operatorname{supp}(t)$.

Теорема 1.2
Пространство $\operatorname{supp}(t)$ линейно порождается образами всех свёрток (1-21).

Доказательство. Обозначим $\operatorname{supp}(t)$ через $W \subset V$. Достаточно доказать, каждая линейная форма $\xi \in V^*$, аннулирующая образы всех свёрток (1-21), аннулирует подпространство W. Предположим противное: пусть ковектор $\xi \in V^*$ имеет ненулевое ограничение на W, но аннулирует $t_J\left(V^{*\otimes(n-1)}\right)$ для всех J. Выберем в V^* базис $\xi_1, \dots, \xi_d$, в котором $\xi_1 = \xi$ и ограничения ковекторов $\xi_1, \dots, \xi_k$ на W образуют базис в W^*. Обозначим через $w_1, \dots, w_k$ двойственный базис пространства W и разложим t по этому базису. Значение $\xi\left(t_J(\xi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \xi_{i_{n-1}})\right)$ равно полной свёртке тензора t с базисным тензорным мономом $\xi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \xi_{i_{n-1}} \otimes \xi_1$ по всем n тензорным сомножителям в том порядке, который предписан последовательностью[2] J. Получающееся в результате этой свёртки число равно коэффициенту, с которым соответствующий двойственный тензорный моном[3] от базисных векторов w_i входит в разложение t. Подбирая надлежащие J, можно получить коэффициент при любом содержащем w_1 мономе, входящем в разложение t. Тем самым, все они нулевые, т. е. $w_1 \notin \operatorname{supp}(t)$ вопреки нашему выбору. □

---

[1] Подчеркнём, что индексы в последовательности не обязаны возрастать или убывать.

[2] Т. е. j_ν-й сомножитель тензора t сворачивается с ξ_{i_ν} при $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$, а оставшийся в t сомножитель с номером $\{1, \dots, n\} \smallsetminus J$ сворачивается с ξ_1.

[3] j_ν-й множитель этого монома равен w_{i_ν} при $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$, а оставшийся сомножитель с номером $\{1, \dots, n\} \smallsetminus J$ равен w_1.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.2. В силу биективности отображения Сегре, соотношения инцидентности между прямыми на квадрике Сегре такие же, как между координатными прямыми на $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. Так как всякая проходящая через заданную точку p прямая, целиком лежащая на квадрике Сегре S, лежит в пересечении $S \cap T_pS$ этой квадрики с её касательной плоскостью в точке p, и плоская коника $S \cap T_pS$ уже полностью исчерпывается парой пересекающихся в точке p прямых из разных семейств, никаких других прямых на квадрике Сегре нет.

Упр. 1.3. Это делается дословно также, как в лем. 1.1 на стр. 4.

Упр. 1.4. Выберем базис E в $U \cap W$, дополним его множествами E' и E'' до базисов в U и W соответственно, и зафиксируем в V базис вида $E \sqcup E' \sqcup E'' \sqcup E'''$. Пространство $U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n}$ состоит из линейных комбинаций тензорных мономов, составленных из базисных векторов, лежащих в E, и стало быть, совпадает с $(U \cap W)^{\otimes n}$.