Обращение Мёбиуса

Задача 1. Найдите обратную матрицу к матрице $A = (a_{ij})$ с $a_{ij} = 1$ при $i \leqslant j$ и $a_{ij} = 0$ при $i > j$.

Задача 2. Напишите явное выражение для элемента[1] b_{ij} матрицы B, обратной к произвольной верхней унитреугольной[2] матрице $A = (a_{ij})$.

Задача 3 (алгебра инцидентности локально конечного чума). Рассмотрим чум P с отношением $\leqslant$, имеющий нижнюю грань[3] p_* и такой, что $\forall\, p \in P$ начальный отрезок $[p_*, p] \overset{\text{def}}{=} \{x \in P \mid x \leqslant p\}$ конечен[4]. Обозначим через $A(P)$ множество всех функций $f : P \times P \to \mathbb{C}$, таких что $f(x, y) \neq 0 \Rightarrow x \leqslant y$. Убедитесь, что:

а) множество $\mathbb{N}$ с отношением $n \mid m$ и множество $\mathcal{S}(M)$ всех конечных подмножеств любого множества M с отношением $X \subseteq Y$ суть локально конечные чумы

б) сумма $f_1 + f_2 : (x, y) \mapsto f_1(x, y) + f_2(x, y)$ и *свёртка* $f_1 \star f_2 : (x, y) \mapsto \sum_{x \leqslant z \leqslant y} f_1(x, z) f_2(z, y)$ задают на $A(P)$ структуру ассоциативного (но не коммутативного) кольца с единицей

в) $f \in A(P)$ обратим относительно свёртки , если и только если $f(x, x) \neq 0$ для всех $x \in P$.

Задача 4 (функция Мёбиуса). Элемент $\boldsymbol{\mu} \in A(P)$, обратный к функции, равной 1 при $x \leqslant y$ и нулю в остальных случаях, называется *функцией Мёбиуса* чума P. Покажите, что:

а) $\boldsymbol{\mu}(x, y) = -\sum_{x \leqslant z < y} \boldsymbol{\mu}(x, z) = -\sum_{x < z \leqslant y} \boldsymbol{\mu}(z, y)$ и $\boldsymbol{\mu}(x, x) = 1$ для всех $x, y \in P$

б) **(формула обращения)** если для функции $g : P \to \mathbb{C}$ известны все суммы $\sigma_g(x) = \sum_{y \leqslant x} g(y)$, то функция g восстанавливается из них по *формуле Мёбиуса*: $g(x) = \sum_{y \leqslant x} \sigma_g(y) \cdot \boldsymbol{\mu}(y, x)$.

в) Найдите функцию Мёбиуса линейно упорядоченного множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Как в этом случае выглядит формула обращения для функции $g(x) = x$?

г) Найдите функцию Мёбиуса чума $\mathcal{S}(M)$ всех конечных подмножеств множества M. Как в этом случае выглядит формула обращения для функции $g(X) = |X|$?

д) Для произвольного множества $\mathcal{A}$ конечных множеств положим $A = \bigcup_{S \in \mathcal{A}} S$ и рассмотрим на чуме $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ функцию $f(X) = \left| \left(\bigcap_{S \in X} S \right) \cap \left(\bigcap_{S \notin X} A \smallsetminus S \right) \right|$. Что получится, если применить к ней формулу обращения?

е) Убедитесь, что для чума $\mathbb{N}$ с отношением $n|m$ функция $\boldsymbol{\mu}(n, m) = \mu(m/n)$, где $\mu : \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ это *арифметическая функция Мёбиуса*: $\mu(k) = 0$, если если k делится на квадрат простого числа, а в остальных случаях $\mu(k) = (-1)^s$, где s — число всех простых натуральных делителей числа k.

Задача 5. Выразите функцию Эйлера $\varphi(m)$ через $m = \sum_{d|m} \varphi(d)$ по формуле обращения.

Задача 6. Приведённый многочлен $\Phi_n \in \mathbb{C}[x]$, корнями которого являются все первообразные корни $\sqrt[n]{1} \in \mathbb{C}$ и только они, называется n-тым *круговым многочленом*. Найдите $\deg \Phi_n$. Покажите, что $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ и $\Phi_n(x) = \prod_{d|n} (x^{n/d} - 1)^{\mu(d)}$.

Задача 7. Докажите, что в мультипликативной группе $\mathbb{F}_q^*$ конечного поля из q элементов порядок любого элемента делит $q - 1$, и для каждого $d \mid (q - 1)$ найдите число элементов порядка d. В частности, убедитесь, что в $\mathbb{F}_q^*$ есть элементы порядка[5] $(q - 1)$, и выясните, какова их степень над простым подполем $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_q$.

Задача 8*. Докажите в $\mathbb{Q}[[t]]$ равенство $(1 - pt)^{-1} = \prod_{m \in \mathbb{N}} (1 - t^m)^{-i_m}$, где i_m — число неприводимых приведённых многочленов степени m в $\mathbb{F}_p[x]$.

Задача 9*. Верно ли, что в $\mathbb{F}_p[x]$ ровно $\frac{1}{n} \sum_{d|n} p^d \mu(n/d)$ многочленов степени n неприводимы?

---

[1]При маленьких i, j оно имеет вид: $b_{12} = -a_{12}$, $b_{13} = -a_{13} + a_{12}a_{23}$, $b_{14} = -a_{14} + a_{12}a_{24} + a_{13}a_{34} - a_{12}a_{23}a_{34}$, $b_{23} = -a_{23}$, $b_{24} = -a_{24} + a_{23}a_{34}$ и т. д.

[2]Это означает, что $a_{ii} = 1$ при всех i и $a_{ij} = 0$ при всех $i > j$.

[3]Т. е. такой элемент $p_* \in P$, что $p_* \leqslant p$ для всех $p \in P$.

[4]Такие чумы называются *локально конечными*.

[5]Среди прочего, это означает, что группа $\mathbb{F}_q^*$ циклическая.