чумы – лумы – вумы

Задача 1. Убедитесь, что инъективность отображения $f : X \to Y$ эквивалентна каждому из свойств: **а)** $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$ **б)** существует такое $\pi : Y \to X$, что $\pi \circ f = \mathrm{Id}_X$.

Задача 2. Убедитесь, что **а)** отображение $f : X \to Y$ сюрьективно, если и только если $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$ **б)** существование такого отображения $\sigma : Y \to X$, что $f \circ \sigma = \mathrm{Id}_Y$, влечёт сюрьективность f.

Аксиома выбора утверждает, что верно и обратное к зад. 2 б): у каждого сюрьективного отображения $f : X \twoheadrightarrow Y$ есть *сечение*[1] — такое отображение $\sigma : Y \to X$, что $f \circ \sigma = \mathrm{Id}_Y$.

чумовая терминология (продолжение). Два чума *изоморфны*, если между ними есть сохраняющая порядок биекция. В чуме P подмножество вида $\langle p \rangle \overset{\text{def}}{=} \{x \in P \mid x < p\}$, где $p \in P$, называется *начальным интервалом* до p. Элемент p чума P называется *внешней верхней гранью* подмножества $X \subset P$, если $x < p$ для всех $x \in X$. В частности, любой $x \in P$ является внешней верхней гранью для $\varnothing \subset P$ и для $\langle x \rangle \subset P$.

Задача 3 (линейный порядок на вумах). Докажите, что любые два вума или изоморфны, или один из них изоморфен начальному интервалу другого, и эти возможности взаимно исключающие.

Задача 4 (ключевое соображение). Для произвольного чума P обозначим через $\mathcal{W}(P)$ множество всех его подмножеств, вполне упорядоченных имеющимся в P частичным порядком. Также включим в $\mathcal{W}(P)$ пустое подмножество $\varnothing \subset P$. Пусть отображение $\beta : \mathcal{W}(P) \to P$ переводит каждый вум в его внешнюю верхнюю грань. Докажем, что *такого не бывает*. Назовём вум $W \subset P$ *β-рекурсивным*, если $\forall\, x \in W\ \beta(\langle x \rangle) = x$. Каждый начальный кусок вума

$$\Big\{\beta(\varnothing),\ \beta\big(\{\beta(\varnothing)\}\big),\ \beta\Big(\big\{\beta(\varnothing),\ \beta(\{\beta(\varnothing)\})\big\}\Big),\ \dots\Big\}$$

β-рекурсивен, а сам он «продолжается вправо, пока не исчерпает всё P». Последнее формализуется так: докажите, что **а)** если β-рекурсивные вумы U, W имеют общий минимальный элемент, то $U \subset W$ или $W \subset U$ **б)** объединение $\mathcal{U}$ всех β-рекурсивных вумов с минимальным элементом $\beta(\varnothing)$ является β-рекурсивным вумом. **в)** Рассмотрите вум $\mathcal{U} \cup \beta(\mathcal{U})$ и получите противоречие.

Задача 5 (лемма Цорна). Докажите, что если каждый вум в чуме P имеет верхнюю[2] грань, то в P есть максимальный элемент[3]. Более слабое утверждение: *в каждом полном* чуме P *есть максимальный элемент*[4], известно как *лемма Цорна*.

Задача 6 (лемма Бурбаки – Витта о неподвижной точке). Пусть отображение $f : P \to P$ полного чума P в себя таково, что $f(x) \geqslant x$ для всех $x \in X$. Покажите, что $f(p) = p$ для некоторого $p \in P$.

Задача 7. Выведите из леммы Цорна **а)** *теорему Хаусдорфа о цепях*: в любом чуме каждый лум содержится в некотором максимальном по включению луме[5] **б)** аксиому выбора[6] **в)** *лемму о замене*: пусть в векторном пространстве V множество векторов $I \subset V$ линейно независимо, а множество $G \subset V$ линейно порождает V; тогда существует такое инъективное отображение $\iota : I \hookrightarrow G$, что множество векторов $I \cup (G \smallsetminus \operatorname{im} \iota)$ тоже линейно порождает V.

Задача 8 (теорема Цермело). Докажите, что каждое множество X можно вполне упорядочить[7].

---

[1]Иначе говоря, во всех непустых слоях любого отображения можно одновременно выбрать по элементу.

[2]Не обязательно внешнюю!

[3]Подсказка: предположите противное и при помощи аксиомы выбора постройте отображение $\beta : \mathcal{W}(P) \to P$, которого не бывает по зад. 4.

[4]Напомним, что чум называется *полным*, если в нём каждый лум имеет верхнюю грань. Элемент $p^* \in P$ называется *максимальным*, если неравенство $p^* \leqslant p$ выполняется только для $p = p^*$.

[5]Подсказка: все лумы, содержащие данный, образуют полный чум по включению.

[6]Подсказка: рассмотрите максимальный элемент полного чума, образованного парами (U, g), где $U \subset Y$ и $g : U \to X$ — такое отображение, что $fg = \mathrm{Id}_U$, а $(U, g) \leqslant (W, h)$, означает, что $U \subset W$ и $g = h|_U$.

[7]Подсказка: рассмотрите множество $\mathcal{S}(X)$ всех непустых подмножеств в X, включая само X, и при помощи аксиомы выбора постройте такое отображение $\mu : \mathcal{S}(X) \to X$, что $\mu(Y) \in Y$ для всех $Y \in \mathcal{S}(X)$; назовём подмножество $W \subset X$ *μ-рекурсивным*, если его можно вполне упорядочить так, что $\mu(X \smallsetminus \langle w \rangle) = w$ для всех $w \in W$; используя «зеркальную версию» ключевого соображения из зад. 4, убедитесь, что вум $\Big\{\mu(X),\ \mu\big(X \smallsetminus \{\mu(X)\}\big),\ \mu\Big(\big\{\mu(X),\ \mu\big(X \smallsetminus \{\mu(X)\}\big)\big\}\Big),\ \dots\Big\}$ μ-рекурсивен и продолжается вправо пока не исчерпает весь X. Также теорему Цермело можно вывести из леммы Цорна в духе зад. 7.