Мощность множеств

Листок считается сданным, если решено не менее семи задач.
Каждый пункт учитывается как отдельная задача.
Каждая задача со звёздочкой учитывается, как две.

Задача 1. Является ли не более, чем счётным множество:

а) точек разрыва неубывающей функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

б) алгебраических чисел[1]

в) вещественных трансцендентных чисел[2]

г) биективных отображений $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$

Задача 2. Имеет ли мощность континуума множество

а) прямых на плоскости

б) отображений $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (т. е. вещественных *последовательностей*)

в) вещественных трансцендентных чисел

г) всех функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

д*) биективных функций $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$

е*) непрерывных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Задача 3. Докажите, что множество всех подмножеств множества M строго мощнее[3], чем M.

Задача 4*. Пусть заданы вложения $f : M \hookrightarrow N$ и $g : N \hookrightarrow M$. Постройте такие разбиения $M = M' \sqcup M''$ и $N = N' \sqcup N''$ множеств M и N в объединения непересекающихся подмножеств, что f биективно отображает M' на N', а g — N'' на M''.

Задача 5*. Верно ли, что при разбиении квадрата на две части хотя бы одна из них имеет мощность континуума?

Задача 6. Докажите, что:

а*) всякое замкнутое подмножество $M \subset \mathbb{R}$ без изолированных точек имеет мощность континуума

б*) произвольное замкнутое подмножество $M \subset \mathbb{R}$ либо пусто, либо конечно, либо счётно, либо имеет мощность континуума.

[1] Т. е. подмножество в $\mathbb{C}$, образованное корнями многочленов из $\mathbb{Q}[x]$.

[2] Т. е. $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \forall f \in \mathbb{Q}[x]\ f(\alpha) \neq 0\}$

[3] Т. е. M можно вложить в множество своих подмножеств, но нельзя биективно отобразить на него.