Арифметика

Листок считается сданным, если решено не менее восьми задач.
Каждый пункт учитывается как отдельная задача.
Каждая задача со звёздочкой учитывается как две.

Задача 1. Верно ли, что 101-я степень любого натурального числа, взаимно простого с десяткой, оканчивается теми же тремя цифрами, что и само число[1]?

Задача 2. Верно ли, что при нечётном простом p любой простой делитель числа $2^p - 1$ имеет вид $2kp + 1$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$?

Задача 3. Верно ли, что для $n = p^k m$, где простое p не делит m, биномиальный коэффициент[2]

$$\binom{n}{p^k} \equiv m \pmod{p}\,, ?$$

Задача 4. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ вычислите сумму $\sum\limits_{d|n} \varphi(d)$, где φ — функция Эйлера.

Задача 5. В кольце вычетов $\mathbb{Z}/(360)$ найдите все решения уравнения $x^2 = 1$.

Задача 6 (поле $\mathbb{F}_p$). Пусть $p \in \mathbb{N}$ просто.

а) Решите в поле $\mathbb{F}_p$ уравнение $x^2 = 1$ и вычислите произведение всех ненулевых элементов поля $\mathbb{F}_p$.

б) (теорема Вильсона) Верно ли, что натуральное $m \geqslant 2$ просто, если и только если $(m-1)! + 1$ делится на m?

в) Опишите множество значений многочленов $x^p - x$, x^{p-1} и $x^{\frac{p-1}{2}}$ на всём поле $\mathbb{F}_p$ и на множестве квадратов в $\mathbb{F}_p$.

г) Сколько в $\mathbb{F}_p$ ненулевых квадратов?

д) Всегда ли в $\mathbb{F}_p$ разрешимо уравнение $x^2 + y^2 = -1$?

е*) (лемма Гаусса) Выпишем $\mathbb{F}_p$ в виде: $-(p-1)/2\,,\ \dots\,,\ -1\,,\ 0\,,\ 1\,,\ \dots\,,\ (p-1)/2$. Докажите, что число $a \in \mathbb{F}_p$ тогда и только тогда является квадратом, когда количество «положительных» чисел этой записи, становящихся «отрицательными» от умножения на a, чётно.

Задача 7. При каких p в $\mathbb{F}_p$ разрешимы уравнения[3] **а)** $x^2 = -1$ **б)** $x^2 = 2$

Задача 8*. Найдите все $n \in \mathbb{N}$, делящиеся на все натуральные числа, не превосходящие $\sqrt{n}$.

---

[1] Скажем, оканчивается ли 1233^{101} на 233, а 37^{101} — на 037?

[2] Подсказка: рассмотрите бином $(1+x)^n$ над полем $\mathbb{F}_p$.

[3] ответы: в (а) — $p = 2$ и $p \equiv 1 \pmod 4$; в (б) — когда $(p^2-1)/8$ чётно