Комбинаторика

Внимание: листка № 3 нет и не будет.
Листок № 4 считается сданным, если решено не менее восьми задач.
Каждый пункт учитывается как отдельная задача.
Каждая задача, помеченная звёздочкой, учитывается как две.

Задача 1. Найдите максимальный коэффициент, возникающий после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в $(a+b+c)^5$.

Задача 2. Сколькими способами можно разбить 14 человек на пары?

Задача 3. Сколько диаграмм Юнга[1] можно уместить в прямоугольнике $m \times n$, левый верхний угол которого находится в левом верхнем углу диаграммы?

Задача 4. Есть 4 попарно отличающиеся друг от друга чашки, 4 неразличимых стакана, 10 одинаковых кусков сахара и 7 попарно разноцветных соломинок. Сколькими способами можно разложить[2] **а)** соломинки по чашкам **б)** сахар по чашкам **в)** сахар по стаканам **г*)** соломинки по стаканам.

Задача 5. Дайте чисто комбинаторные доказательства соотношений

а) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$ **б)** $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} \binom{n-r-1}{k-r} = \binom{n}{k}$.

Задача 6. Сколько имеется **а)** возрастающих **б)** неубывающих **в)** инъективных **г)** сюрьективных неубывающих **д*)** сюрьективных отображений $N \to M$ между линейно упорядоченными множествами из n и m элементов?

Задача 7. Сколько в первом миллионе натуральных чисел таких, которые не являются ни квадратом, ни кубом, ни четвертой степенью целого числа?

Задача 8. Три фигуры, площади 1 каждая, лежат внутри фигуры площади 2. Найдите минимальное значение наибольшей из площадей попарных пересечений этих трёх фигур.

Задача 9. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, где $\alpha_i, p_i \in \mathbb{N}$ и все p_i просты и попарно различны. Найдите **а)** количество всех свободных от квадратов[3] делителей **б*)** сумму всех делителей числа n.

Задача 10 (числа Каталана).

а) Установите явные биекции между следующими множествами:

(1) неубывающие пути, ведущие по линиям клетчатой бумаги из точки $(0,0)$ в точку (n,n) и лежащие не выше прямой $y = x$

(2) допустимые расстановки n пар скобок в произведении $a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$, позволяющие выполнить все n умножений последовательно

(3) бинарные корневые деревья с $n+1$ листьями[4]

(4) триангуляции выпуклого $(n+2)$-угольника не пересекающимися нигде кроме вершин диагоналями.

б*) Выразите число[5] элементов в них через подходящий биномиальный коэффициент.

---

[1] С учётом пустой диаграммы.

[2] Раскладывания, отличающиеся лишь расположением ёмкостей в пространстве, считаются одинаковыми.

[3] Т. е. не делящихся на отличные от единицы квадраты натуральных чисел.

[4] Т. е. связные графы без циклов с $n+2$ вершинами валентности 1, одна из которых отмечена, и всеми остальными вершинами валентности 3.

[5] Оно называется n-тым *числом Каталана* и обозначается c_n.