Отношения

Определения. *Бинарным отношением* между множествами M и N называется подмножество $R \subset M \times N$. Элементы $m \in M$, $n \in N$ называются *R-сравнимыми*, если $(m,n) \in R$, что обычно обозначается как $m\,R\,n$. Отношение $R^{\text{opp}} \overset{\text{def}}{=} \{(n,m) \in N \times M \mid (m,n) \in R\} \subset N \times M$ называется *противоположным* отношению $R \subset M \times N$. *Композицией* отношений $R \subset M \times N$ и $S \subset L \times M$ называется отношение $R \circ S \subset L \times N$, определённое как

$$R \circ S \overset{\text{def}}{=} \{(\ell,n) \in L \times N \mid \exists\, m \in M \,:\, (\ell,m) \in S \wedge (m,n) \in R\}\,.$$

Бинарное отношение $R \subset M \times M$ называется *отношением на M*. Такое отношение называется *рефлексивным*, если $x\,R\,x$ для всех $x \in M$, *транзитивным* — если для всех $x,y,z \in M$ из $x\,R\,y$ и $y\,R\,z$ следует, что $x\,R\,z$, *симметричным* — если $x\,R\,y \iff y\,R\,x$, и *антисимметричным* — если $x\,R\,y$ и $y\,R\,x$ только при $x = y$. Рефлексивное, транзитивное и симметричное (соотв. антисимметричное) бинарное отношение на M называется *эквивалентностью* (соотв. *частичным порядком*).

Задача 1. Обладают ли перечисленные ниже отношения свойствами рефлексивности, транзитивности, (анти)симметричности, эквивалентности или частичного порядка:

а) $x \leqslant y$ (x не больше y) на множестве $\mathbb{Q}$ **б)** «x не раньше[1] y» на циферблате часов
в) «A не проиграл B» на множестве шахматистов, проведших однокруговой турнир[2]
г) $x \equiv y \pmod{\mathbb{Z}}$, т. е. $x - y \in \mathbb{Z}$, на множестве $\mathbb{Q}$ **д)** $x \mid y$, т. е. x делит y, на множестве $\mathbb{Z}$
е) $x \equiv y \pmod{n}$, т. е. $x - y$ кратно n, на множестве $\mathbb{Z}$
ж) $X \subseteq Y$ (включение) **з)** $X \simeq Y$ ($\exists$ биекция) на множестве подмножеств множества M
и) $\ell_1 || \ell_2$ **к)** $\ell_1 \perp \ell_2$ на множестве прямых на плоскости
л) пропорциональность[3] над полем $\Bbbk$ на множестве ненулевых векторов в $\Bbbk^2$
м) пропорциональность над кольцом $\mathbb{Z}$ на множестве ненулевых векторов в $\mathbb{Z}^2$
н) линейная зависимость над кольцом $\mathbb{Z}$ на множестве ненулевых векторов в $\mathbb{Z}^2$

Задача 2. Для отображения $f: X \to Y$ обозначим через $\Gamma_f \overset{\text{def}}{=} \{(x,y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \subset X \times Y$ его график. Верно ли, что $\Gamma_f \circ \Gamma_g = \Gamma_{f \circ g}$ для любой пары отображений $f: Y \to Z$ и $g: X \to Y$?

Задача 3. Покажите, что следующие свойства отношения S на множестве M равносильны: **а)** S является эквивалентностью **б)** $S \supset \Delta_M \overset{\text{def}}{=} \{(m,m) \mid m \in M\}$, $S \circ S \subset S$ и $S^{\text{opp}} = S$ **в)** существуют такие множество[4] F и сюрьекция $\pi: M \twoheadrightarrow F$, что $x\,S\,y \iff \pi(x) = \pi(y)$.

Задача 4. Покажите, что: **а)** пересечение эквивалентностей является эквивалентностью **б)** для любого отношения $R \subset M \times M$ существует единственная наименьшая по включению эквивалентность[5] $\overline{R} \supseteq R$ **в)** $x\,\overline{R}\,y$, если и только если $x = y$ или в M найдётся конечная цепочка элементов $x = z_0, z_1, z_2, \dots, z_{k-1}, z_k = y$, в которой $z_i\,R\,z_{i-1}$ или $z_{i-1}\,R\,z_i$ при всех $1 \leqslant i \leqslant k$.

Задача 5. Опишите фактор множества вершин ориентированного графа по эквивалентности, порождённой отношением: «из x в y ведёт ребро».

Задача 6. Опишите эквивалентность, порождённую отношением из зад. 1 м), и фактор множество по этой эквивалентности.

Задача 7. Дробью p/q называется класс пары $(p,q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\})$ по наименьшей эквивалентности на $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\})$, обеспечивающей для всех $z \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ равенства $p/q = (pz)/(qz)$. Опишите эту эквивалентность явно и выясните, задаёт ли формула **а)** $(a/b) + (c/d) \overset{\text{def}}{=} (ad + bc)/(bd)$ **б)** $(a/b) + (c/d) \overset{\text{def}}{=} (a + c)/(b + d)$ **в)** $(a/b) \cdot (c/d) \overset{\text{def}}{=} (ac)/(bd)$ корректную операцию над дробями.

Задача 8. Нет ли ошибки в следующем рассуждении:

Теорема. Всякое симметричное и транзитивное бинарное отношение рефлексивно.

Доказательство. Для любого x рассмотрим какой-нибудь y, такой что $x\,R\,y$. Тогда, в силу симметричности, $y\,R\,x$, а значит, по транзитивности, $x\,R\,x$.

---

[1] Т. е. кратчайшая дуга из x в y идёт против часовой стрелки.
[2] Это означает, что каждый сыграл с каждым ровно по одному разу.
[3] Вектор w пропорционален вектору u над $\Bbbk$, если $w = \lambda u$ для некоторого ненулевого $\lambda \in \Bbbk$.
[4] Оно называется *фактор множеством M* по эквивалентности S и обозначается M/S.
[5] Она называется *эквивалентностью, порождённой отношением R*.