Мощность множеств

Определения. Множества X и Y называются *равномощными*, если между ними существует биекция. Мы пишем $X \simeq Y$, если X и Y равномощны. Множество, равномощное $\mathbb{N}$, называется *счётным*. Непустое множество называется *не более, чем счётным*, если оно конечно или счётно. Бесконечное множество, не равномощное $\mathbb{N}$, называется *несчётным*. Про множество, равномощное $\mathbb{R}$, говорят, что оно имеет *мощность континуума*. Объединение двух непересекающихся множеств X, Y называется *дизъюнктным* и обозначается $X \sqcup Y$.

Задача 1. Явно установите взаимно однозначное соответствие между

а) множеством бесконечных последовательностей из нулей и единиц и множеством всех подмножеств в $\mathbb{N}$

б) множествами бесконечных последовательностей из букв а, б и из букв а, б, в

в) множествами бесконечных последовательностей из нулей и единиц и интервалом $(0, 1)$

г) интервалом $(0, 1)$ и промежутками: $(0, 2)$, $(0, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$, $[0, 1)$

д) бесконечным множеством M и множеством $M \sqcup \mathbb{N}$.

Задача 2. Верно ли, что:

а) любое непустое подмножество счётного множества не более, чем счётно

б) каждое бесконечное множество содержит счётное подмножество

в) объединение не более, чем счётного множества счётных множеств счётно

г) произведение не более, чем счётного множества счётных множеств счётно

д) квадрат равномощен отрезку

е) $M^n = M \times M \times \ldots \times M$ равномощно M для любого бесконечного множества M

ж) произведение континуального множества континуумов имеет мощность континуума

з) на плоскости можно нарисовать несчётное множество попарно не пересекающихся букв «Т»?

Задача 3* (теорема Кантора – Бернштейна). Убедитесь, что отношение $|X| \leqslant |Y|$, означающее, что существует вложение $X \hookrightarrow Y$, задаёт предпорядок[1] на совокупности всех множеств[2], и покажите, что ассоциированная с ним эквивалентность $X \sim Y$, означающая, что одновременно $|X| \leqslant |Y|$ и $|Y| \leqslant |X|$, совпадает с равномощностью.

Задача 4. Покажите, что любая плоская фигура, содержащая интервал или дугу окружности, имеет мощность континуума.

Задача 5. При помощи теоремы Кантора – Бернштейна установите равномощность множеств из зад. 1 в – д) и зад. 2 д), не прибегая к построению явной биекции между ними.

Задача 6*. Покажите, что совокупность а) всех множеств б) всех конечных множеств не является множеством.

[1] Т. е. рефлексивно и транзитивно.

[2] Внимание: эта совокупность *не является множеством*, см. зад. 6.