Арифметика

Задача 1. Существует ли степень тройки, заканчивающаяся на 0001?

Задача 2 (геометрическое доказательство малой теоремы Ферма). Пусть $a, p \in \mathbb{N}$ и $p > 2$ просто. Сколькими способами можно раскрасить вершины правильного плоского p-угольника[1] в a цветов?

Задача 3 (алгебраическое доказательство малой теоремы Ферма). Верно ли, что $\binom{p}{k}$ при простом p делится на p при всех $k \neq 0, p$? Как выглядит формула для раскрытия бинома $(x+y)^p$ в поле $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$? Вычислите с её помощью $a^p = (\underbrace{1+1+\dots+1}_{a})^p$ для $a \in \mathbb{F}_p$.

Задача 4. Докажите, что для простого $p > 5$ сравнение $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod p$ может быть разрешимо только при $p \equiv 1 \pmod 5$, и выведите отсюда, что простых чисел вида $5n+1$ бесконечно много.

Задача 5. Вычислите сумму всех элементов в кольце вычетов $\mathbb{Z}/(n)$.

Задача 6. Делится ли на 29 сумма $1^3 + 2^3 + \dots + 28^3$?

Задача 7. Найдите наименьшее натуральное число, дающее остатки 2, 7 и 43 от деления на 57, 91 и 179 соответственно.

Задача 8 (функция Эйлера). Число $\varphi(n)$ обратимых элементов в кольце вычетов $\mathbb{Z}/(n)$ называется *функцией Эйлера* числа n. Зафиксируем обратимый элемент $a \in \mathbb{Z}/(n)$ и из каждого $x \in \mathbb{Z}/(n)$ проведём стрелку в ax. Докажите, что:

а) на полученной картинке движение по стрелкам распадается на не пересекающиеся циклы

б) каждый цикл, содержащий хоть один обратимый элемент, весь состоит только из обратимых элементов

в) все циклы, состоящие из обратимых элементов, имеют одинаковую длину.

г) **(теорема Эйлера)** Для взаимно простых $m, n \in \mathbb{N}$ вычислите класс $m^{\varphi(n)}$ в $\mathbb{Z}/(n)$.

д) Верно ли, что $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ для взаимно простых m и n?

Задача 9. Вычислите $\varphi(n)$ для

а) $n = 36$

б) $n = p^k$, где p — простое

в) $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s}$, где $p_1, p_2, \dots, p_s$ — попарно разные простые.

Задача 10. Для каких n выполняются равенства: а) $\varphi(n) = n - 1$ б) $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$?

[1] Две раскраски считаются одинаковыми , если и только если одна получается из другой поворотом многоугольника.