

Комбинаторика

Задача 1. Сколько существует различных

- а) диагоналей в выпуклом n -угольнике
- б) треугольников с вершинами в n данных точках общего положения
- в) последовательностей длины n из нулей и единиц
- г) отображений из n -элементного множества в m -элементное
- д) n -элементных подмножеств в m -элементном множестве
- е) неубывающих путей¹, ведущих по линиям клетчатой бумаги из точки $(0, 0)$ в точку (n, m)
- ж) мономов степени ровно m от n переменных
- з) мономов степени не выше m от n переменных
- и) пятизначных чисел, цифры которых строго убывают слева направо
- к) делителей числа $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, где p_1, \dots, p_k — попарно различные простые
- л) укладываний пяти неразличимых пластиковых стаканчиков в не более, чем три стопки²
- м) разбиений n -элементного множества на непересекающиеся подмножества, m_i из которых состоят из i элементов³
- н) слов⁴, возникающих при перестановке букв в словах:

(1) шнурок (2) курок (3) колобок (4) $\underbrace{b_1 \dots b_1}_{\beta_1} \underbrace{b_2 \dots b_2}_{\beta_2} \dots \underbrace{b_m \dots b_m}_{\beta_m} ?$

Задача 2. Найдите коэффициент при $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ в многочлене $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^m$. При каких m_1, m_2, \dots, m_n он ненулевой? Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые у $(a + b + c)^3$ и $(a + b + c)^4$.

Задача 3. Докажите тождества а) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ б) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ в) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ чисто комбинаторно и при помощи разложения бинома $(x + y)^n$.

Задача 4. Вычислите а) $\sum_{i=0}^n \binom{m+i}{i}$ б) $\sum_{i=0}^n \binom{m+i}{m}$ в) сумму всех чисел треугольника Паскаля, заполняющих параллелограмм с противоположными вершинами в $\binom{0}{0}, \binom{n}{k}$ и сторонами, параллельными сторонам треугольника.

Задача 5. Каждый старшекурсник матфака тащится от АлГема или УрЧП. Сколько на матфаке старшекурсников, если от АлГема тащатся 179 из них, от УрЧП — 91, а от обоих — 57?

Задача 6 *. Когда комплексный обед в столовой матфака подешевел до 100 руб, на раздаче собралось $2n$ человек, половина из которых имела только банкноту в 100 руб, другая половина — только банкноту в 200 руб, а в кассе не осталось сдачи. Сколькими способами можно выстроить очередь так, чтобы никому не пришлось ждать сдачи?

¹Т. е. таких, что при движении по ним обе координаты не убывают.
²Укладывания, различающиеся лишь расположением стопок на столе, считаются одинаковыми.
³Целые неотрицательные числа m_1, m_2, \dots, m_n с $\sum_{i=1}^n i \cdot m_i = n$ заданы.
⁴Не обязательно осмысленных.