Индукция и т. п.

Задача 1. Докажите от противного, что а) число $\sqrt{2}$ иррационально б) простых чисел бесконечно много.

Задача 2. Вычислите суммы, представив каждое слагаемое в виде подходящей разности, и проверьте результат по индукции

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$

б) $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)n$

в) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!$

г) $2\sin(x/2)\cdot(\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx)$.

Задача 3. Числа Фибоначчи F_n определяются условиями $F_1=F_2=1$ и $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ при $n>2$. а) Вычислите сумму $F_1+F_2+\cdots+F_n$. б) Верно ли, что $(3/2)^n<F_{n+2}<2^n$ при всех $n\geq 1$?

Задача 4. Верно ли, что при любом $n\in\mathbb{N}$ сумма $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ меньше, чем а) 2 б) $2-\frac{1}{n}$?

Задача 5. Верно ли, что при любом $n\in\mathbb{N}$ сумма $11^{n+1}+12^{2n-1}$ делится на 133?

Задача 6. Верно ли, что $\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}_{n}<2$ при любом $n\in\mathbb{N}$?

Задача 7. Верно ли, что для любого $n\geqslant 3$ единицу можно представить в виде суммы n различных дробей вида[1] $1/q$ с $q\in\mathbb{N}$?

Задача 8. На сколько частей разбивают плоскость n попарно пересекающихся окружностей, каждые две из которых пересекаются по паре различных точек, но пересечение любых трёх пусто?

Задача 9. На сколько частей разбивают пространство n плоскостей, никакие две из которых не параллельны, никакие три не пересекаются по одной прямой, и никакие четыре не пересекаются в одной точке?

Задача 10. На доске написана последовательность из ста плюсов и минусов. В этой последовательности разрешается заменять на противоположный или самый левый знак или знак, стоящий справа от самого левого плюса. Например, в последовательности $--++--+\cdots$ можно поменять на противоположный первый или четвёртый слева знак. Можно ли при помощи таких замен получить из любой последовательности любую другую?

Задача 11. Нет ли ошибки в идущем ниже тексте?

Теорема. Если треугольник разбит отрезками на треугольники, то хотя бы один из треугольников разбиения не остроугольный.

Доказательство. Если треугольник разбит отрезком на два треугольника, то один из них очевидно не остроугольный. Применим индукцию. Рассмотрим треугольник, разбитый на n треугольников. Проведём ещё один отрезок, разбив один из маленьких треугольников на два. Получим разбиение на $n+1$ треугольник, причём один из двух новых треугольников будет не остроугольный. По индукции теорема доказана.

[1] Например, для $n=3$ имеем $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$.

Персональный табель ____ . **Семинар № 3 (20.IX.2018)**
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	**дата**	**кто принял**	**подпись**
1а			
б			
2а			
б			
в			
г			
3а			
б			
4а			
б			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			