Элементы логики

Задача 1. Запишите формулами: **а)** x кратно двум или кратно трём **б)** целое число y меньше тринадцати, но больше единицы **в)** если t рационально, то $2t+3$ иррационально.

Задача 2. Докажите, что следующие формулы являются тавтологиями: **а)** $r \vee \neg r$ **б)** $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$.

Задача 3. Докажите*формулы де Моргана*: $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$ и $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$. В других обозначениях: $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$ и $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$.

Задача 4. Запишите отрицание формулы $r \Rightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$, используя только операции $\vee$ и $\wedge$.

Задача 5. Составьте таблицу истинности функции

$$g(p,q,r) = (p \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge \overline{r}) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}).$$

Задача 6. Дана булева функция трех переменных

а)

p	q	r	$f(p,q,r)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1

б)

p	q	r	$f(p,q,r)$
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Выразите ее через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. **в)** Более общо, зная значения булевой функции $f(x_1, \cdots x_n)$ на всех возможных 2^n наборах переменных, выпишите формулу для f с использованием операций $\wedge, \vee, \neg$ (дизъюнктивная нормальная форма).

Задача 7. Запишите предложение $(\exists!\, x)\varphi(x)$ с помощью кванторов $\exists$ и $\forall$.

Задача 8. Верны ли следствия (докажите, либо приведите контрпример): **а)** $(\forall x)\varphi(x) \Rightarrow (\exists x)\varphi(x)$ **б)** $(\exists x)\varphi(x) \Rightarrow (\forall x)\varphi(x)$?

Задача 9. Напишите отрицание следующих утверждений, не используя явно отрицательных оборотов: **а)** В любой электричке Одинцово – Москва хотя бы в одном из вагонов все пассажиры-безбилетники **б)** В любой электричке Одинцово – Москва хотя бы в одном из вагонов есть безбилетник.

Задача 10. Не используя символа отрицания, постройте отрицания следующих предложений и для каждого из них выясните, верно ли оно или его отрицание:

а) $\exists a \in [1;2] \quad \forall b \in [5;7] \quad 3a > b$

б) $\forall x \in \mathbb{Q} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow y^2 x \in \mathbb{Z}$.

Задача 11. Пусть $\{a_n\}$ - последовательность вещественных чисел. Что означают высказывания:

а) $\forall s > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ |a_n - a| < s$?

б) $\forall s > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N\ |a_n - a| < s$?

в) $\forall s > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N\ |a_n - a| > s$?

Задача 12. **а)** Сколько всего существует бинарных логических операций? Сколько существует бинарных логических операций $*$, таких что $p*q$ не зависит от p? **б)** Сколько существует бинарных операций $\star$, для которых $r \star r = \neg r$? **в)** Каково количество булевых функций от n пременных? **г)** Каково количество симметрических булевых функций от n переменных?

Задача 13.

а) Всякая ли булева функция является многочленом относительно операций сложения по модулю два и конъюнкции?

б) Покажите, что непостоянная функция от нескольких переменных, задаваемая формулой, в которой участвуют только знаки $\oplus$ (плюс по модулю 2), принимает значения 0 и 1 одинаковое число раз.

в*) Сформулируйте обратное утверждение. Верно ли оно?