

Домашнее задание № 7

Все задачи сдаются письменно.

Задача засчитывается, если сданы все её пункты.

Задача 1. Сколько бинарных отношений имеется на m -элементном множестве?

Задача 2. Покажите, что $R \circ R \subseteq R$ для любого транзитивного бинарного отношения R . Может ли это включение быть строгим?

Задача 3. Рассмотрим на множестве \mathbb{Z}^2 бинарное отношение $(k, \ell) \sim (m, n)$, означающее, что $m + n - k - \ell$ делится 3. Является ли оно эквивалентностью? Нарисуйте на клетчатой бумаге все такие точки (m, n) с $0 \leq m, n \leq 10$, что $(m, n) \sim (0, 0)$. Найдите максимальное число попарно несравнимых друг с другом точек.

Задача 4. Покажите, что отношение $x \equiv y \pmod{\mathbb{Z}}$, означающее, что $x - y \in \mathbb{Z}$, задаёт эквивалентность на множестве вещественных чисел \mathbb{R} , и постройте явную биекцию между фактормножеством \mathbb{R}/\mathbb{Z} и единичной окружностью $S^1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ в \mathbb{R}^2 . Индуцирует ли стандартный порядок на \mathbb{R} какой-либо порядок на \mathbb{R}/\mathbb{Z} ? Установите явную биекцию между функциями $S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ и периодическими функциями $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ периода 1.