Ext и Tor

ГА6⋄1. Пусть $M = \mathbb{C}[x,y]/(x,y)$, $N = \mathbb{C}[x,y]/(x-2)$, $K = \mathbb{C}[x,y]/\big((x-1)^2+y^2-1\big)$. В категории $\mathbb{C}[x,y]$-модулей вычислите все Ext^ν и все Tor_ν между всеми девятью парами модулей M, N, K.

ГА6⋄2. Покажите, что $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}[p^{-1}],\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}_p$ — целые p-адические числа.

ГА6⋄3. Вычислите все $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}/(n)}(\mathbb{Z}/(p),\mathbb{Z}/(p))$ для всех $n \,\vdots\, p^2$.

ГА6⋄4. Для двусторонних идеалов $I, J \subset R$ докажите, что $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, R/J) \simeq (I \cap J)/(IJ)$.

ГА6⋄5. Для идеала I в коммутативном кольце K докажите, что $\mathrm{Ext}^1_K(K/I, K/I) \simeq \mathrm{Hom}_K(I/I^2, K/I)$.

ГА6⋄6. Для левого R-модуля L и правых R-модулей M, N определите несколькими способами[1] произведение $\mathrm{Ext}^\alpha_R(N,M) \otimes \mathrm{Tor}^R_\beta(N,L) \to \mathrm{Tor}^R_{\beta-\alpha}(M,L)$, убедитесь, что все эти способы приводят к одному результату, и для любых $\xi \in \mathrm{Ext}(X,Y)$, $\zeta \in \mathrm{Ext}(Y,Z)$, $\eta \in \mathrm{Tor}(X,A)$, $\alpha \in \mathrm{Ext}(A,B)$, $\gamma \in \mathrm{Ext}(B,C)$ докажите равенства $(\zeta\xi)\eta = \zeta(\xi\eta)$ в $\mathrm{Tor}(Z,A)$, $(\gamma\alpha)\eta = \gamma(\alpha\eta)$ в $\mathrm{Tor}(X,C)$, $\xi(\alpha\eta) = (-1)^{|\alpha||\xi|}\alpha(\xi\eta)$ в $\mathrm{Tor}(Y,B)$.

ГА6⋄7. Назовём *классом* точной тройки $0 \to M \to X \to N \to 0$ образ $\vartheta = \delta_M(\mathrm{Id}_M) \in \mathrm{Ext}^1(N,M)$ при связывающем гомоморфизме $\delta_M : \mathrm{Hom}(M,M) \to \mathrm{Ext}^1(N,M)$ последовательности Ext'ов, возникающей от применения к этой тройке функтора $h_M = \mathrm{Hom}(\ast, M)$. Докажите, что

а) этот же класс $\vartheta = \delta^N(\mathrm{Id}_N)$ при связывающем гомоморфизме $\delta^N : \mathrm{Hom}(N,N) \to \mathrm{Ext}^1(N,M)$ последовательности Ext'ов, возникающей от применения к тройке функтора $h^N = \mathrm{Hom}(N, \ast)$.

б) каждый класс $\vartheta \in \mathrm{Ext}^1(N,M)$ реализуется точной тройкой

в) две тройки имеют равные классы если и только если между их средними элементами имеется изоморфизм, тождественно действующий на крайних элементах

г) связывающий гомоморфизм $\mathrm{Ext}^k(L,N) \to \mathrm{Ext}^{k+1}(L,M)$ задаётся левым умножением на ϑ

д) связывающий гомоморфизм $\mathrm{Ext}^k(M,L) \to \mathrm{Ext}^{k+1}(N,L)$ задаётся правым умножением на $(-1)^k\vartheta$

е) связывающий гомоморфизм $\mathrm{Tor}_k(N,L) \to \mathrm{Tor}_{k-1}(M,L)$ задаётся умножением на ϑ в смысле зад. ГА6⋄6.

ж) Какой тройкой реализуется сумма классов $\vartheta_1 + \vartheta_2 \in \mathrm{Ext}^1(N,M)$ двух данных троек?

з) Вычислите класс расщепимой тройки.

ГА6⋄8 (формула Кюннета).

а) Для любого комплекса левых R-модулей Q и такого комплекса правых R-модулей P, у которого все модули P_n и dP_n плоские, постройте точную тройку

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_p(P) \otimes H_q(Q) \to H_n(P \underset{R}{\otimes} Q) \to \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R\big(H_p(P), H_q(Q)\big) \to 0\,.$$

б) Покажите, что для коммутативного кольца главных идеалов R и комплекса свободных модулей P эта тройка (неканонически) расщепляется.

ГА6⋄9 (теорема Гильберта о сизигиях). Рассмотрим градуированную $\Bbbk$-алгебру $S = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Покажите, что **а)** каждый конечно порождённый градуированный S-модуль M обладает такой свободной резольвентой $\cdots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$, где $F_p = \bigoplus_q W_{p,q} \underset{\Bbbk}{\otimes} S[-q]$, $W_{p,q}$ — векторные пространства, что дифференциал $d : F_p \to F_{p-1}$ аннулируется тензорным умножением на тривиальный S-модуль[2] $\Bbbk = S/(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **б)** размерности $\dim W_{p,q}$ не зависят от выбора минимальной резольвенты **в)** длина минимальной резольвенты не превышает $n+1$.

ГА6⋄10. Пусть $U = \mathbb{C}^2$. Постройте минимальную резольвенту однородного идеала кривой[3] Веронезе

а) $C_3 = \{\psi^3 \mid \psi \in U\}$ в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\left(S^3 U\right)$

б*) $C_d = \{\psi^d \mid \psi \in U\}$ в $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}\left(S^d U\right)$.

[1] Комбинируя различные сочетания инъективных и проективных резольвент.

[2] Резольвенты с этим свойством называются *минимальными*.

[3] Т. е. идеала, порождённого всеми однородными многочленами, зануляющимися на этой кривой.

Персональный табель ______________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 6 (21.11.2018)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
з			
8а			
б			
9а			
б			
в			
10а			
б			