

А. Л. ГОРОДЕНЦЕВ\*

ВВЕДЕНИЕ  
В ТЕОРИЮ КАТЕГОРИЙ  
И ГОМОЛОГИЧЕСКУЮ АЛГЕБРУ

Это записки лекций, которые я читаю на факультете математики НИУ ВШЭ в осеннем семестре 2019 / 20 учебного года. Упражнения, встречающиеся в тексте существенны для его понимания и обычно используются в дальнейшем. Некоторые из них снабжены указаниями в конце книги.

Москва, 2019

---

\* e-mail: [gorod@itep.ru](mailto:gorod@itep.ru), <http://gorod.bogomolov-lab.ru/>

## Оглавление

Оглавление . . . . .	2
§1 Категории и функторы . . . . .	3
1.1 Категории . . . . .	3
1.2 Функторы . . . . .	6
1.3 Естественные преобразования . . . . .	11
1.4 Представимые функторы . . . . .	14
§2 Сопряжённые функторы и (ко)пределы . . . . .	19
2.1 Сопряжённые функторы . . . . .	19
2.2 Тензорные произведения и $\text{Hom}$ . . . . .	23
2.3 Пределы диаграмм . . . . .	26
2.4 Функториальность (ко) пределов . . . . .	35
2.5 Существование сопряжённых функторов . . . . .	40
§3 Абелевы категории . . . . .	42
3.1 Линейные категории . . . . .	42
3.2 Абелевы категории . . . . .	47
3.3 Проективные и инъективные объекты . . . . .	53
3.4 (Ко)порождающие объекты . . . . .	55
3.5 Категории модулей . . . . .	59
§4 Комплексы и когомологии . . . . .	64
4.1 Исчисление градуированных объектов . . . . .	64
4.2 Категории комплексов . . . . .	69
4.3 Комплексы Кошуля . . . . .	72
4.4 Спектральные последовательности . . . . .	76
Ответы и указания к некоторым упражнениям . . . . .	84

## §1. Категории и функторы

**1.1. Категории.** Категория  $\mathcal{C}$  это класс<sup>1</sup> объектов, обозначаемый  $\text{Ob } \mathcal{C}$ , в котором для каждой упорядоченной пары объектов  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$  задано множество морфизмов

$$\text{Hom}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

Для разных пар объектов эти множества не пересекаются. Морфизмы удобно представлять себе в виде стрелок  $\varphi : X \rightarrow Y$ . Объединение всех стрелок категории  $\mathcal{C}$  обозначается  $\text{Mor } \mathcal{C} = \bigsqcup_{X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  и тоже является классом, а не множеством.

Кроме того, для каждой тройки объектов  $X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$  имеется отображение

$$\text{Hom}(Y, Z) \times \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Z), \quad (\varphi, \psi) \mapsto \varphi \circ \psi (= \varphi\psi),$$

именуемое *композицией*<sup>2</sup> и ассоциативное в том смысле, что  $(\chi \circ \varphi) \circ \psi = \chi \circ (\varphi \circ \psi)$  всякий раз, когда эти композиции определены.

Наконец, у каждого объекта  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  есть *тождественный эндоморфизм*

$$\text{Id}_X \in \text{Hom}(X, X),$$

удовлетворяющий условиям<sup>3</sup>  $\varphi \circ \text{Id}_X = \varphi$  и  $\text{Id}_X \circ \psi = \psi$  для любых стрелок  $\varphi : X \rightarrow Y$  и  $\psi : Z \rightarrow X$ .

Подкатегория  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$  это категория, все объекты, стрелки и композиции которой наследуются из  $\mathcal{C}$ . Подкатегория называется *полной*, если для всех  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

Категория  $\mathcal{C}$  называется *малой*, если  $\text{Ob } \mathcal{C}$  это множество, а не больший класс. В этом случае  $\text{Mor } \mathcal{C}$  тоже является множеством.

**ПРИМЕР 1.1 (КАТЕГОРИИ, НЕ ЯВЛЯЮЩИЕСЯ МАЛЫМИ)**

Примеры категорий, которые *не* являются малыми, это категория  $\mathcal{S}et$  всех множеств и всех отображений, категория  $\mathcal{T}op$  топологических пространств и непрерывных отображений, категория  $\mathcal{V}ec_{\mathbb{k}}$  векторных пространств над полем  $\mathbb{k}$  и  $\mathbb{k}$ -линейных отображений и её полная подкатегория  $vec_{\mathbb{k}}$  конечномерных пространств, категории  $R\text{-Mod}$  и  $\text{Mod-}R$  левых и правых модулей над кольцом  $R$  и  $R$ -линейных отображений и их полные подкатегории  $R\text{-mod}$  и  $\text{mod-}R$  конечно представимых<sup>4</sup> модулей, категория абелевых групп  $\mathcal{A}b = \mathbb{Z}\text{-Mod}$ , категория  $\mathcal{G}rp$  всех групп и групповых гомоморфизмов, категория  $\mathcal{C}mr$  коммутативных колец с единицей и гомоморфизмов, переводящих единицу в единицу, и т. п.

<sup>1</sup> Не хотелось бы вдаваться в точную формализацию этого термина (содержательную в той же мере, как формализация арифметики и теории множеств, изучаемые в стандартном курсе математической логики). Для наших нужд достаточно, что такая формализация существует и позволяет говорить, например, о «категории множеств», объекты которой, по понятным причинам, множества не образуют.

<sup>2</sup> Значок композиции « $\circ$ », как и знак умножения, принято опускать, когда ясно, о чём речь.

<sup>3</sup> Выкладка  $\text{Id}' = \text{Id}' \circ \text{Id}'' = \text{Id}''$  показывает, что тождественный морфизм единствен.

<sup>4</sup> Модуль называется *конечно представимым*, если он изоморфен фактору свободного модуля конечного ранга по конечно порождённому подмодулю.

ПРИМЕР 1.2 (ПРЕДПОРЯДКИ, ЧУМЫ И ТОПОЛОГИИ)

Каждое множество  $M$  с предпорядком<sup>1</sup>  $\leq$  может рассматриваться как малая категория, объекты которой суть элементы  $m \in M$ , стрелки суть неравенства:

$$\text{Hom}_M(n, m) = \begin{cases} \text{одноэлементное множество, когда } n \leq m, \\ \emptyset \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

а композиция стрелок  $k \leq \ell$  и  $\ell \leq n$  это стрелка  $k \leq n$ . Наличие композиции и тождественных морфизмов обеспечиваются транзитивностью и рефлексивностью отношения  $\leq$ .

Если предпорядок  $\leq$  кососимметричен, т. е. задаёт на  $M$  (частичный) порядок, то при  $m \neq n$  как минимум одно из множеств  $\text{Hom}(m, n)$ ,  $\text{Hom}(n, m)$  пусто. Важным примером такой категории-чума<sup>2</sup> является категория  $\mathcal{U}(X)$  всех открытых подмножеств топологического пространства  $X$ , стрелками в которой являются включения:

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}(X)}(U, W) = \begin{cases} \text{вложение } U \hookrightarrow W, \text{ если } U \subseteq W \\ \text{пустое множество, когда } U \not\subseteq W. \end{cases}$$

ПРИМЕР 1.3 (МАЛЫЕ КАТЕГОРИИ И АССОЦИАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ)

Всякую ассоциативную алгебру<sup>3</sup>  $A$  с единицей можно рассматривать как малую категорию с одним объектом  $*$  и множеством стрелок  $\text{Hom}(*, *) = A$ , композиция на котором задаётся умножением в этой алгебре. Наоборот, со всякой малой категорией  $\mathcal{C}$  и коммутативным кольцом  $K$  с единицей можно связать алгебру стрелок  $K[\mathcal{C}]$ , состоящую из формальных конечных линейных комбинаций стрелок категории  $\mathcal{C}$  с коэффициентами в  $K$ . Условимся для заданного множества  $M$  обозначать через  $K \otimes M$  свободный  $K$ -модуль с базисом  $M$ , образованный всеми конечными формальными линейными комбинациями элементов множества  $M$  с коэффициентами из  $K$ . Тогда

$$K[\mathcal{C}] \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{X, Y \in \text{Об } \mathcal{C}} K \otimes \text{Hom}(X, Y) = \left\{ \sum x_i \varphi_i \mid x_i \in K, \varphi_i \in \text{Mor}(\mathcal{C}) \right\}.$$

Умножение стрелок в алгебре  $K[\mathcal{C}]$  определяется их композицией в категории  $\mathcal{C}$

$$\varphi \psi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \varphi \circ \psi & \text{если конец } \psi \text{ совпадает с началом } \varphi \\ 0 & \text{во всех прочих случаях} \end{cases}$$

и по дистрибутивности распространяется на произвольные конечные линейные комбинации стрелок. Алгебру  $K[\mathcal{C}]$  можно представлять себе как алгебру финитных квадратных матриц<sup>4</sup>, строки и столбцы которых занумерованы объектами категории, и в каждой клетке  $(Y, X)$  стоят элементы из своего  $K$ -модуля  $K \otimes \text{Hom}(X, Y)$ . Эта алгебра, вообще говоря, некоммутативна и без единицы, однако, для всякого  $f \in K[\mathcal{C}]$  существует идемпотент  $e_f = e_f^2$  со свойствами  $e_f \circ f = f \circ e_f = f$ . В качестве такового можно взять сумму тождественных эндоморфизмов  $\text{Id}_X$  всех объектов  $X$ , служащих началами или концами стрелок, линейной комбинацией которых является стрелка  $f$ .

<sup>1</sup>Т. е. рефлексивным и транзитивным бинарным отношением.

<sup>2</sup>Т. е. частично упорядоченного множества.

<sup>3</sup>Более общим образом — любой ассоциативный моноид, т. е. полугруппу с единицей.

<sup>4</sup>Возможно, бесконечного размера, но с конечным числом ненулевых элементов.

**1.1.1. Мономорфизмы, эпиморфизмы и изоморфизмы.** Стрелка  $\varphi$  называется *мономорфизмом*<sup>1</sup> (соотв. *эпиморфизмом*<sup>2</sup>), если на неё можно сокращать слева (соотв. справа), т. е. когда  $\varphi\alpha = \varphi\beta \Rightarrow \alpha = \beta$  (соотв.  $\alpha\varphi = \beta\varphi \Rightarrow \alpha = \beta$ ). По умолчанию мы используем стрелки  $\hookrightarrow$  для обозначения мономорфизмов, и стрелки  $\twoheadrightarrow$  для эпиморфизмов. Стрелка  $\varphi : X \rightarrow Y$  называется *изоморфизмом* (или *обратимой стрелкой*) и обозначается  $\cong$ , если существует такая стрелка  $\psi : Y \rightarrow X$ , что  $\varphi\psi = \text{Id}_Y$  и  $\psi\varphi = \text{Id}_X$ . В этой ситуации объекты  $X$  и  $Y$  называются *изоморфными*, а морфизмы  $\varphi$  и  $\psi$  — *обратными* друг к другу. Например, в предпорядоченном множестве  $M$ , рассматриваемом как категория<sup>3</sup>, изоморфность элементов  $m$  и  $n$  означает, что  $m \leq n$  и  $n \leq m$ , т. е.  $m$  и  $n$  принадлежат одному классу эквивалентности, ассоциированному с предпорядком.

**1.1.2. Подобъекты и фактор объекты.** Класс инъективной стрелки с концом в  $X$  по модулю её умножения справа на обратимые стрелки называется *подобъектом* объекта  $X$ , а класс сюръективной стрелки с началом в  $X$  по модулю левого умножения на обратимые стрелки — *фактор объектом* объекта  $X$ . Категория называется *умеренно мощной*<sup>4</sup>, если подобъекты любого её объекта образуют множество. Все категории из *прим. 1.3* умеренно мощны.

**УПРАЖНЕНИЕ 1.1** (частичный порядок на под- и фактор объектах). Проверьте, что в умеренно мощной категории отношение  $\varphi \subseteq \psi$ , означающее, что существует такая стрелка  $\xi$ , что  $\varphi = \psi\xi$ , задаёт частичный порядок на множестве подобъектов, а отношение  $\varphi \supseteq \psi$ , означающее наличие такой стрелки  $\xi$ , что  $\varphi = \xi\psi$ , задаёт частичный порядок на множестве фактор объектов.

**ПРИМЕР 1.4** (конечные упорядоченные множества и комбинаторные симплексы) Обозначим через  $\Delta_{\text{big}}$  категорию, объектами которой являются конечные упорядоченные множества  $X$ , а морфизмами — сохраняющие порядок<sup>5</sup> отображения. Категория  $\Delta_{\text{big}}$  не является малой<sup>6</sup>, но содержит полную малую подкатеорию  $\Delta \subset \Delta_{\text{big}}$ , объектами которой являются конечные подмножества в  $\mathbb{Z}$  вида

$$[n] \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, \dots, n\}, \quad n \geq 0, \quad (1-1)$$

со стандартным порядком. Множество (1-1) называется *n-мерным комбинаторным симплексом*, а категория  $\Delta$  — *симплициальной категорией*. Для любого  $X \in \text{Ob } \Delta_{\text{big}}$  имеется *единственный* изоморфизм  $n_X : X \cong [n]$  с *единственным*  $[n] \in \text{Ob } \Delta$ , а именно нумерация элементов  $X$  в порядке возрастания.

**УПРАЖНЕНИЕ 1.2.** Сколько всего стрелок в множестве  $\text{Hom}_{\Delta}([n], [m])$ ? Сколько среди них инъективных? Сколько сюръективных? Покажите, что алгебра стрелок  $\mathbb{Z}[\Delta]$ ,

<sup>1</sup>А также *вложением* или *инъективным морфизмом*.

<sup>2</sup>А также *наложением* или *сюръективным морфизмом*.

<sup>3</sup>См. *прим. 1.2* на стр. 4.

<sup>4</sup>По-английски: *well powered*.

<sup>5</sup>Т. е. такие отображения  $\varphi : X \rightarrow Y$ , что  $x_1 \leq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$  для всех  $x_1, x_2 \in X$ .

<sup>6</sup>По упомянутым выше логическим причинам, см. сноску на стр. 3.

как абстрактная ассоциативная алгебра, порождается стрелками

$$e_n = \text{Id}_{[n]} \quad (\text{тождественное отображение}) \quad (1-2)$$

$$\partial_n^{(i)} : [n-1] \hookrightarrow [n] \quad (\text{вложение, образ которого не содержит } i) \quad (1-3)$$

$$s_n^{(i)} : [n] \rightarrow [n-1] \quad (\text{наложение, склеивающее } i \text{ с } (i+1)) \quad (1-4)$$

и опишите образующие идеала соотношений между этими стрелками.

**1.1.3. Обращение стрелок.** С каждой категорией  $\mathcal{C}$  связана *противоположная* категория  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  с теми же объектами, но с обращённым направлением всех стрелок:

$$\text{Ob } \mathcal{C}^{\text{op}} = \text{Ob } \mathcal{C}, \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X), \quad \varphi^{\text{op}} \circ \psi^{\text{op}} = (\psi \circ \varphi)^{\text{op}}.$$

На языке алгебр такое обращение стрелок означает переход от алгебры  $\mathcal{C} = K[\mathcal{C}]$  к противоположной алгебре  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  из тех же элементов, но с происходящим в противоположном порядке умножением. Мономорфизмы и подобъекты категории  $\mathcal{C}$  являются эпиморфизмами и фактор объектами категории  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  и наоборот.

**1.2. Функторы.** Функтор<sup>1</sup>  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  из категории  $\mathcal{C}$  в категорию  $\mathcal{D}$  это отображение классов  $\text{Ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{D}$ ,  $X \mapsto F(X)$ , и набор таких отображений множеств<sup>2</sup>

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)), \quad \varphi \mapsto F(\varphi), \quad (1-5)$$

что  $F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)}$  для всех  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  и  $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$  всякий раз, когда композиция  $\varphi \circ \psi$  определена. На языке ассоциативных алгебр, каждый функтор  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  задаёт *гомоморфизм* алгебр стрелок  $F : K[\mathcal{C}] \rightarrow K[\mathcal{D}]$ . Если все отображения (1-5) сюръективны, функтор  $F$  называется *полным*<sup>3</sup>. Образ такого функтора является полной подкатегорией. Если все отображения (1-5) инъективны, функтор  $F$  называется *строгим*<sup>4</sup>. Такой функтор задаёт вложение алгебр стрелок. Полные строгие функторы иначе называются *вполне строгими*.

Простейшие функторы — это *тождественный функтор*  $\text{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , тождественно действующий на объектах и морфизмах, и *забывающие функторы*, действующие из какой-либо категории множеств с дополнительной структурой<sup>5</sup>, морфизмы в которой суть сохраняющие эту структуру отображения множеств, в категорию *Set* всех множеств — такие функторы просто забывают о структуре. Забывающий функтор не строг, если имеются различные морфизмы структур, одинаково действующие на подлежащих множествах, и не полон, если не всякое отображение множеств сохраняет рассматриваемую структуру.

<sup>1</sup>Иногда вместо «функтор» говорят *ковариантный функтор*.

<sup>2</sup>По одному отображению для каждой упорядоченной пары объектов  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ .

<sup>3</sup>По-английски: *full*.

<sup>4</sup>По-английски: *faithful*.

<sup>5</sup>Например, геометрической — такой, как топология или структура гладкого многообразия, или алгебраической — такой, как структура группы, кольца или модуля.

ПРИМЕР 1.5 (ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ КОМБИНАТОРНЫХ СИМПЛЕКСОВ)

Зададим функтор  $\Delta \rightarrow \mathcal{T}op$  из категории комбинаторных симплексов в категорию топологических пространств, сопоставляя  $n$ -мерному комбинаторному симплексу  $[n]$  стандартный  $n$ -мерный симплекс<sup>1</sup>

$$\Delta^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_\nu = 1, x_\nu \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad (1-6)$$

а стрелке  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$  — единственное аффинное отображение  $\varphi_* : \Delta^n \rightarrow \Delta^m$ , действующее на базисные векторы по правилу  $e_\nu \mapsto e_{\varphi(\nu)}$ . Это строгий, но не полный функтор. Образующие элементы (1-3) и (1-4) алгебры стрелок категории  $\Delta$  переводятся этим функтором, соответственно, во вложение  $i$ -той грани  $\Delta^{(n-1)} \hookrightarrow \Delta^n$  и в вырождение вдоль  $i$ -того ребра<sup>2</sup>  $\Delta^n \twoheadrightarrow \Delta^{(n-1)}$ .

**1.2.1. Предпучки.** Функтор  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$  называется *контравариантным функтором* из  $\mathcal{C}$  в  $\mathcal{D}$  или *предпучком*<sup>3</sup> объектов категории  $\mathcal{D}$  на категории  $\mathcal{C}$ . Такой функтор оборачивает композицию:  $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$  и на языке ассоциативных алгебр является *антигомоморфизмом* алгебр стрелок.

ПРИМЕР 1.6 (ТРИАНГУЛИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА)

Обозначим через  $\Delta_s \subset \Delta$  неполную подкатегорию, объектами которой тоже являются комбинаторные симплексы,  $Ob \Delta_s = Ob \Delta$ , но в качестве морфизмов допускаются только *строго возрастающие*<sup>4</sup> отображения. Категория  $\Delta_s$  называется *полусимплициальной категорией*.

УПРАЖНЕНИЕ 1.3. Убедитесь, что алгебра стрелок  $\mathbb{Z}[\Delta_s]$  порождается тождественными стрелками  $e_n = Id_{[n]}$  и отображениями вложения граней  $\partial_n^{(i)}$  из (1-3).

Предпучок множеств  $X : \Delta_s^{op} \rightarrow \mathcal{S}et$  на полусимплициальной категории  $\Delta_s$  называется *полусимплициальным множеством* и является ни чем иным, как комбинаторным описанием *триангулированного топологического пространства*  $|X|$ , которое называется *геометрической реализацией* полусимплициального множества  $X$ . В самом деле, функтор  $X$  задаёт для каждого целого неотрицательного  $n$  множество  $X_n = X([n])$ , каждый элемент которого мы будем воспринимать как стандартный  $n$ -мерный симплекс (1-6). Таким образом, каждое множество  $X_n$  представляет собою набор одинаковых  $n$ -мерных симплексов  $\Delta^n$ . Пространство  $|X|$  склеивается из них так. Стрелки  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$  категории  $\Delta_s$  биективно соответствуют  $n$ -мерным граням  $m$ -мерного симплекса  $\Delta^m$ . Будем воспринимать отображение  $X(\varphi) : X_m \rightarrow X_n$ , которое функтор  $X$  сопоставляет стрелке  $\varphi$ , как *правило склейки*: оно указывает каждому  $m$ -мерному симплексу  $x \in X_m$ , какой именно  $n$ -мерный симплекс  $X(\varphi)x \in X_n$  надлежит приклеить к  $x$  в качестве  $\varphi$ -той  $n$ -мерной грани.

Так, на рис. 1♦1 показана стандартная триангуляция двумерного тора, склеенного из прямоугольника, изображённого на рис. 1♦2. Эта триангуляция состоит из одного 0-мерного симплекса, в который склеятся все вершины прямоугольника, трёх 1-

<sup>1</sup>Т. е. выпуклую оболочку концов стандартных базисных векторов  $e_0, e_1, \dots, e_n$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

<sup>2</sup>Т. е. в проекцию симплекса на грань вдоль ребра, соединяющего  $i$ -тую вершину с  $(i+1)$ -й.

<sup>3</sup>Термин «предпучок» употребляется чаще в ситуациях, когда категория  $\mathcal{C}$  мала.

<sup>4</sup>Т. е. сохраняющие порядок и инъективные.

мерных симплексов, в которые склеятся, соответственно, две горизонтальных стороны, две вертикальных стороны, и диагональ прямоугольника, а также пары 2-мерных симплексов, на которые прямоугольник разрезается диагональю. Стрелки на рис. 1◊2 изображают порядок на множестве вершин каждого симплекса и направлены от меньших вершин к большим. Вертикальные рёбра  $e_2$  с рис. 1◊2 изображаются на рис. 1◊1 меридианом тора, а горизонтальные рёбра  $e_1$  — экватором тора. Соответствующее полусимплициальное множество  $X$  имеет  $X_0 = \{v\}$ ,  $X_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $X_2 = \{f_1, f_2\}$ , и  $X_i = \emptyset$  для всех  $i \geq 3$ , а отображения склейки  $X(\varphi)$  действуют по правилам

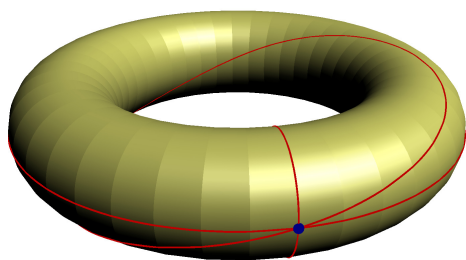


Рис. 1◊1. Триангуляция тора.

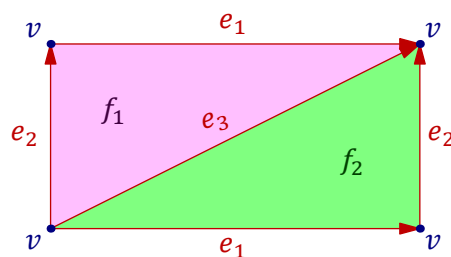


Рис. 1◊2. Симплексы триангуляции.

$$\begin{aligned}
 X(\partial_1^0) = X(\partial_1^1) : X_1 &\rightarrow X_0, & e_i &\mapsto v \text{ для всех } i = 1, 2, 3 \\
 X(\partial_2^0) : X_2 &\rightarrow X_1, & f_1 &\mapsto e_1, f_2 \mapsto e_2, \\
 X(\partial_2^1) : X_2 &\rightarrow X_1, & f_1 &\mapsto e_3, f_2 \mapsto e_3, \\
 X(\partial_2^2) : X_2 &\rightarrow X_1, & f_1 &\mapsto e_2, f_2 \mapsto e_1.
 \end{aligned}
 \tag{1-7}$$

**УПРАЖНЕНИЕ 1.4.** Существует ли триангуляция окружности  $S^1$  а) тремя 0-мерными и тремя 1-мерными симплексами<sup>1</sup> б) одним 0-мерным и одним 1-мерным симплексом? Существует ли триангуляция двумерной сферы  $S^2$  в) четырьмя 0-мерными, шестью 1-мерными и четырьмя 2-мерными симплексами г) двумя 0-мерными, одним 1-мерным и одним 2-мерным симплексом? Если да, задайте все отображения  $X(\varphi)$  явно, если нет, объясните почему.

**ПРИМЕР 1.7 (СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА)**

Предпучок множеств  $X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$  на всей симплициальной категории называется *симплициальным множеством*. Из каждого симплициального множества  $X$  также, как и в предыдущем примере, можно изготовить топологическое пространство  $|X|$ , называемое его *геометрической реализацией*. Для этого, как и выше, сопоставим каждой точке  $x \in X_n$  стандартный  $n$ -мерный симплекс  $\Delta_x^n$  и обозначим через  $\varphi^* \stackrel{\text{def}}{=} X(\varphi)$  отображение  $X_m \rightarrow X_n$ , которое функтор  $X$  сопоставляет каждому неубывающему отображению  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$  из категории  $\Delta$ , а через  $\varphi_* : \Delta^n \rightarrow \Delta^m$  — аффинное отображение симплексов, переводящее вершины симплекса  $\Delta^n$  в вершины симплекса  $\Delta^m$  так, как предписывает  $\varphi$ . После чего для каждого  $m$ , каждого  $x \in X_m$  и каждой стрелки  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$  склеим каждую точку  $s \in \Delta_{\varphi^*(x)}^n$  с точкой  $\varphi_*(s) \in \Delta_x^m$ . На языке формул результат такой склейки описывается как топологическое фактор пространство

<sup>1</sup>Т. е. можно ли получить окружность в качестве геометрической реализации полусимплициального множества  $X$ , у которого  $X_0$  и  $X_1$  состоят из трёх элементов, а все остальные  $X_i$  пусты.



дизъюнктного объединения<sup>1</sup>  $\bigsqcup_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n$  по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему отождествления  $(\varphi^* x, s) \simeq (x, \varphi_* s)$  для всех точек  $x \in X_m$ ,  $s \in \Delta^n$  и стрелок  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ .

Если стрелка  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$  является композицией наложения  $\sigma : [n] \rightarrow [k]$  и вложения  $\delta : [k] \hookrightarrow [m]$ , то каждый  $n$ -мерный симплекс  $\Delta_z^n$ , лежащий в образе  $\varphi^*$  и помеченный точкой  $z = \sigma^* y = \sigma^* \delta^* x$ , вклеится в пространство  $|X|$  в виде  $k$ -мерного симплекса  $\Delta_y^k = \sigma_* \Delta_z^n$ , полученного из  $\Delta_z^n$  аффинно линейной проекцией  $\sigma_* : \Delta^n \rightarrow \Delta^k$ . При этом он окажется  $\delta$ -той  $k$ -мерной гранью  $m$ -мерного симплекса  $\Delta_x^m$ . Таким образом, каждый симплекс  $z \in X_n$ , лежащий в образе отображения  $\sigma^*$ , отвечающего какой-нибудь стрелке  $\sigma : [n] \rightarrow [k]$  с  $k < n$ , виден в итоговом пространстве  $|X|$  как симплекс меньшей, чем  $n$  размерности. Такие симплексы называются *вырожденными*. Их использование позволяет описывать более общие клеточные структуры, чем стандартные триангуляции. Платой за это является громоздкость получающегося описания: для любого функтора  $X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}et$  каждое из множеств  $X_n$  непусто.

Например,  $n$ -мерная сфера  $S^n$  гомеоморфна топологическому фактору стандартного  $n$ -мерного симплекса по его границе<sup>2</sup>  $S^n \simeq \Delta^n / \partial \Delta^n$ . Этот гомеоморфизм задаёт на сфере  $S^n$  клеточную структуру, состоящую из одной нульмерной вершины, в которую склеится граница симплекса, и одной  $n$ -мерной клетки, в которую превратится весь симплекс. Она описывается предпучком  $X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}et$ , у которого при всех  $k$  множество  $X_k = X([k])$  получается из множества  $\text{Hom}_{\Delta}([k], [n])$  отождествлением всех неэпиморфных стрелок в один элемент, а правило склейки  $\varphi^* : X_m \rightarrow X_k$ , отвечающее неубывающему отображению  $\varphi : [k] \rightarrow [m]$ , переводит класс стрелки  $\zeta : [m] \rightarrow [n]$  в класс стрелки  $\zeta \varphi : [k] \rightarrow [n]$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 1.5.** Убедитесь, что это описание корректно задаёт предпучок  $X$  с геометрической реализацией  $|X| \simeq S^n$ , и найдите количество элементов в каждом множестве  $X_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

**ПРИМЕР 1.8 (ПРЕДПУЧКИ И ПУЧКИ НА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ)**

Исторически, термин «предпучок» впервые возник в контексте категории  $\mathcal{C} = \mathcal{U}(X)$  всех открытых подмножеств  $U \subset X$  заданного топологического пространства  $X$ . Предпучок  $F : \mathcal{U}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$  сопоставляет каждому открытому множеству  $U \subset X$  объект  $F(U) \in \text{Ob } \mathcal{D}$ , который называется *сечениями* предпучка  $F$  над  $U$ . В зависимости от категории  $\mathcal{D}$  сечения могут образовывать множество, кольцо, алгебру, векторное или топологическое пространство и т. п. Морфизм  $F(W) \rightarrow F(U)$ , отвечающий включению  $U \subset W$ , называется *ограничением сечений*, определённых над  $W$ , на подмножество  $U$ , а результат его применения к сечению  $s \in F(W)$  обозначается через  $s|_U$ . Вот несколько типичных примеров таких предпучков:

- 1) предпучок  $\Gamma_E$  локальных сечений непрерывного отображения  $p : E \rightarrow X$  имеет в качестве  $\Gamma_E(U)$  множество таких непрерывных отображений  $s : U \rightarrow E$ , что<sup>3</sup>  $p \circ$

<sup>1</sup>В котором множества  $X_n$  рассматриваются с *дискретной*, а симплексы  $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  со стандартной топологией объёмлющего вещественного аффинного пространства.

<sup>2</sup>Т. е. склеивании всех точек границы в одну. Например, двумерная сфера  $S^2$  получается таким способом из треугольника.

<sup>3</sup>Это требование означает, что каждая точка  $x \in U$  отображается в слой  $p^{-1}(x)$  над нею.

$s = \text{Id}_U$ , а его отображения ограничения — это обычные ограничения сечений с большего подмножества на меньшее

- 2) беря в предыдущем примере в качестве отображения проекцию  $p : X \times Y \rightarrow X$ , получаем предпучок локальных непрерывных отображений  $C^0(X, Y)$  пространства  $X$  в пространство  $Y$ , имеющий в качестве сечений над  $U \subset X$  непрерывные отображения  $s : U \rightarrow Y$
- 3) дальнейшими специализациями являются так называемые *структурные предпучки*  $\mathcal{O}_X$ : предпучок дифференцируемых функций  $X \rightarrow \mathbb{R}$  на гладком вещественном многообразии  $X$ , предпучок локальных голоморфных функций  $X \rightarrow \mathbb{C}$  на комплексно аналитическом многообразии  $X$ , предпучок локальных рациональных функций  $X \rightarrow \mathbb{k}$  на алгебраическом многообразии  $X$  над полем  $\mathbb{k}$  и т. п. (все они являются предпучками алгебр над соответствующим полем)
- 4) постоянный предпучок  $S$  имеет в качестве  $S(U)$  одно и то же фиксированное множество  $S$  для всех  $U \subset X$ , и все его отображения ограничения — тождественные морфизмы  $\text{Id}_S$ .

Предпучок  $F$  называется *пучком*, если для любого семейства открытых подмножеств  $U_i$  и любого набора таких локальных сечений  $s_i \in F(U_i)$ , что  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$  при всех  $i, j$ , существует единственное такое сечение  $s \in F(\bigcup_i U_i)$ , что  $s|_{U_i} = s_i$  при всех  $i$ . В случае, когда имеется не более одного такого сечения (но может не быть и ни одного), предпучок  $F$  называется *отделимым*. Все предпучки (1) – (4) отделимы, и только последний из них — постоянный предпучок — не является пучком, поскольку для непересекающихся открытых множеств  $U_1, U_2$  не всякая пара констант  $s_i \in S(U_i)$  является ограничением одной константы  $s \in S(U_1 \sqcup U_2)$ . Тем не менее, наряду с постоянным предпучком в природе имеется и

- 5) постоянный пучок  $S^\sim$ , у которого  $S^\sim(U)$  это непрерывные отображения  $U \rightarrow S$  множество  $S$ , рассматриваемое с дискретной топологией, или — что то же самое — локально постоянные функции со значениями в  $S$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.6. Опишите множество первообразных действительной функции  $1/x$ .

**1.2.2. Функторы  $\text{Hom}$ .** С каждым объектом  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  любой категории  $\mathcal{C}$  связаны функтор  $h^X : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ , который переводит объект  $Y$  в множество морфизмов

$$h^X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}(X, Y),$$

а стрелку  $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$  в отображение  $\varphi_* : \text{Hom}(X, Y_1) \rightarrow \text{Hom}(X, Y_2)$ ,  $\psi \mapsto \varphi \circ \psi$ , левого умножения на эту стрелку, а также предпучок  $h_X : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ , который переводит объект  $Y$  в множество морфизмов

$$h_X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}(Y, X),$$

а стрелку  $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$  в отображение  $\varphi^* : \text{Hom}(Y_2, X) \rightarrow \text{Hom}(Y_1, X)$ ,  $\psi \mapsto \psi \circ \varphi$ , правого умножения на эту стрелку.

Например, предпучок  $h_{[n]} : \Delta_S \rightarrow \mathcal{S}et$  на полусимплициальной категории  $\Delta_S$  задаёт стандартную триангуляцию стандартного  $n$ -мерного симплекса: множество её  $k$ -мерных симплексов  $h_{[n]}([k]) = \text{Hom}([k], [n])$  это в точности множество всех  $k$ -мерных граней. Предпучок  $h_U : \mathcal{U}(X) \rightarrow \mathcal{S}et$  на топологическом пространстве  $X$  имеет ровно одно сечение над всеми  $W \subseteq U$  и пустое множество сечений над любым  $W \not\subseteq U$ . Вот ещё несколько примеров.

**ПРИМЕР 1.9** (двойственность в категории векторных пространств)

Предпучок  $h_{\mathbb{k}} : \mathcal{V}ec_{\mathbb{k}}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{V}ec_{\mathbb{k}}$  сопоставляет векторному пространству  $V$  двойственное векторное пространство  $h_{\mathbb{k}}(V) = \text{Hom}(V, \mathbb{k}) = V^*$ , а линейному отображению  $\varphi : V \rightarrow W$  — двойственное отображение  $\varphi^* : W^* \rightarrow V^*$ , переводящее линейную форму  $\xi : W \rightarrow \mathbb{k}$  в линейную форму  $\xi \circ \varphi : V \rightarrow \mathbb{k}$ .

**ПРИМЕР 1.10** (двойственность конечных упорядоченных множеств)

Это комбинаторная версия предыдущего примера. Обозначим через  $\nabla_{\text{big}}$  категорию конечных упорядоченных множеств из не менее двух элементов, морфизмами в которой являются неубывающие отображения, переводящие минимальный элемент в минимальный, а максимальный — в максимальный<sup>1</sup>. Тавтологическое включение  $\nabla_{\text{big}} \hookrightarrow \Delta_{\text{big}}$  является строгим, но не полным функтором. Предпучки

$$h_{[1]} : \Delta_{\text{big}}^{\text{op}} \rightarrow \nabla_{\text{big}} \quad \text{и} \quad h_{[1]} : \nabla_{\text{big}}^{\text{op}} \rightarrow \Delta_{\text{big}}$$

переводят упорядоченные множества  $X \in \text{Ob } \Delta_{\text{big}}$  и  $Y \in \text{Ob } \nabla_{\text{big}}$  в множества

$$X^* \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\Delta_{\text{big}}}(X, [1]) \quad \text{и} \quad Y^* \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\nabla_{\text{big}}}(Y, [1]),$$

порядок на которых задаётся поточечным сравнением значений:

$$\varphi \leq \psi, \quad \text{если } \varphi(x) \leq \psi(x) \text{ для всех } x.$$

Стрелка  $\varphi : Z_1 \rightarrow Z_2$  переводится обоими функторами в морфизм правого умножения  $\varphi^* : \text{Hom}(Z_2, [1]) \rightarrow \text{Hom}(Z_1, [1])$ ,  $\xi \mapsto \xi \circ \varphi$ . Иначе можно сказать, что множество  $Z^*$  это множество «дедекиндовых сечений» множества  $Z$ , т. е. множество таких разбиений  $Z = Z_0 \sqcup Z_1$ , что  $z_0 < z_1$  для всех  $z_0 \in Z_0$ ,  $z_1 \in Z_1$ , причём оба множества  $Z_i$  должны быть непусты, когда  $Z \in \text{Ob } \nabla_{\text{big}}$ , но одно из них может быть пусто, когда  $Z \in \text{Ob } \Delta_{\text{big}}$ . Обратите внимание, что сечения ведут себя *контравариантно* по отношению к морфизмам: при наличии неубывающего отображения  $Z_1 \rightarrow Z_2$  разбиение второго множества  $Z_2$  индуцирует разбиение на  $Z_1$ , но не наоборот.

**1.3. Естественные преобразования.** Для пары функторов  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  *естественным* (или *функториальным*) *преобразованием*  $F$  в  $G$  называется такое занумерованное объектами  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  семейство стрелок  $f_X : F(X) \rightarrow G(X)$  в категории  $\mathcal{D}$ , что для любой стрелки  $\varphi : X \rightarrow Y$  из  $\mathcal{C}$  возникающая в категории  $\mathcal{D}$  диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(Y) \\ f_X \downarrow & & \downarrow f_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(\varphi)} & G(Y) \end{array} \quad (1-8)$$

<sup>1</sup>Отметим, что минимальный и максимальный элементы различны.

коммутативна. На языке алгебр, гомоморфизм  $F : K[C] \rightarrow K[D]$  наделяет алгебру  $K[D]$  структурой модуля над алгеброй  $K[C]$ , в которой умножение элемента  $b \in K[D]$  на элемент  $a \in K[C]$  определяется правилом  $a \cdot b \stackrel{\text{def}}{=} F(a) \cdot b$ . Пара функторов  $F, G$  задаёт на алгебре  $K[D]$  две различных структуры  $K[C]$ -модуля, и естественное преобразование  $f : F \rightarrow G$  это гомоморфизм  $K[C]$ -модулей, переводящий стрелку  $\psi$  с концом в  $F(X)$  в стрелку  $f_X \circ \psi$  с концом в  $G(X)$ , а все не заканчивающиеся в объектах вида  $F(X)$  стрелки — в нуль.

**УПРАЖНЕНИЕ 1.7.** Убедитесь, что  $K[C]$ -линейность описанного отображения действительно означает, что для любого  $\varphi \in K[C]$  действие на  $K[D]$  операторов  $F(\varphi)$  и  $G(\varphi)$  удовлетворяет соотношению  $f \circ F(\varphi) = G(\varphi) \circ f$ .

**1.3.1. Категории функторов.** Функторы из малой категории  $\mathcal{C}$  в произвольную категорию  $\mathcal{D}$  образуют категорию  $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ , объектами которой являются функторы  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , а морфизмами — естественные преобразования  $f : F \rightarrow G$ . Для малой категории  $\mathcal{C}$  мы будем обозначать категорию предпучков  $\text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathcal{D})$  через  $\text{pSh}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ . Опущенная буква  $\mathcal{D}$  в этой записи по умолчанию означает, что  $\mathcal{D} = \text{Set}$ , т. е.  $\text{pSh}(\mathcal{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Set})$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 1.8.** Проверьте, что описанное в н° 1.2.2 сопоставление  $X \mapsto h_X$  задаёт функтор  $\mathcal{C} \rightarrow \text{pSh}(\mathcal{C})$ , а сопоставление  $X \mapsto h^X$  — предпучок  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \text{Set})$ .

**ПРИМЕР 1.11 (КАТЕГОРИЯ ПРЕДПУЧКОВ)**

Предпучки на категории  $\mathcal{U}(X)$  открытых множеств топологического пространства  $X$  обычно называются просто предпучками на  $X$ . Они образуют категорию, обозначаемую  $\text{pSh}(X)$ . Морфизм предпучков  $f : F \rightarrow G$  на  $X$  задаётся набором согласованных с ограничениями отображений между множествами сечений  $f_U : F(U) \rightarrow G(U)$ , по одному отображению для каждого открытого  $U \subset X$ . Согласованность с ограничениями означает, что  $f_W(s)|_U = f_U(s|_U)$  для любой пары вложенных открытых множеств  $U \subset W$  и любого сечения  $s \in F(W)$ . Пучки и отделимые предпучки<sup>1</sup> на  $X$  составляют полные подкатегории  $\text{Sh}(X)$  и  $\text{spSh}(X)$  в категории всех предпучков  $\text{pSh}(X)$ .

**ПРИМЕР 1.12 (КАТЕГОРИЯ СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ)**

Предпучки  $X : \Delta \rightarrow \text{Set}$  на симплициальной категории<sup>2</sup>  $\Delta$ , образуют категорию, морфизмами  $X \rightarrow Y$  в которой являются наборы отображений  $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ , согласованные со склейкой, т. е. такие, что для любого симплекса  $x \in X_m$  и неубывающего отображения  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$  из  $\Delta$  в  $Y_n$  выполняется равенство  $f_n(\varphi^*x) = \varphi^*f_m(x)$ . На геометрическом языке такому отображению отвечает непрерывное отображение  $f : |X| \rightarrow |Y|$ , при котором образ каждого симплекса  $\Delta_x^n$  в пространстве<sup>3</sup>  $|X|$  отображается на образ симплекса  $\Delta_{f_n(x)}^n$  в пространстве  $|Y|$  так, что все соотношения инцидентности<sup>4</sup> между симплексами при этом сохраняются.

<sup>1</sup>См. прим. 1.8 на стр. 9.

<sup>2</sup>См. прим. 1.7 на стр. 8.

<sup>3</sup>Этот образ, вообще говоря, может быть симплексом меньшей, чем  $n$ , размерности.

<sup>4</sup>Т. е. отношения вида «симплекс  $a$  является  $\varphi$ -той гранью (или  $\psi$ -тым вырождением) симплекса  $b$ ».

**1.3.2. Эквивалентности категорий.** Категории  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{D}$  называются *эквивалентными*, если между ними есть такие функторы  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  и  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ , что композиция  $GF$  естественно изоморфна тождественному функтору  $\text{Id}_{\mathcal{C}}$ , а композиция  $FG$  естественно изоморфна  $\text{Id}_{\mathcal{D}}$ , т. е. имеются functorиальные по  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  и  $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$  преобразования

$$GF(X) \simeq X \quad \text{и} \quad FG(Y) \simeq Y, \quad (1-9)$$

являющиеся для всех  $X$  и  $Y$  изоморфизмами в категориях  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{D}$  соответственно. Такие функторы  $F$  и  $G$  называются *квазиобратными* друг другу *эквивалентностями категорий*. Подчеркнём, что наличие изоморфизмов (1-9) не означает равенств  $FG = \text{Id}_{\mathcal{D}}$  или  $GF = \text{Id}_{\mathcal{C}}$ : объекты  $GF(X)$  и  $X$  могут быть различны, как и объекты  $FG(Y)$  и  $Y$ .

**ПРИМЕР 1.13 (ВЫБОР БАЗИСА)**

Зафиксируем поле  $\mathbb{k}$  и обозначим через  $vec$  категорию конечномерных векторных пространств над  $\mathbb{k}$ , а через  $crd \subset vec$  — её полную малую подкатеорию со счётным множеством объектов, коими являются *координатные* пространства  $\mathbb{k}^n$ , где  $n \geq 0$  и  $\mathbb{k}^0 = \{0\}$ . Зафиксируем в каждом пространстве  $V \in \text{Ob } vec$  какой-нибудь базис, т. е. выберем для каждого  $V \in \text{Ob } vec$  изоморфизм<sup>1</sup>

$$f_V : V \simeq \mathbb{k}^{\dim(V)}, \quad (1-10)$$

причём для всех координатных пространств положим  $f_{\mathbb{k}^n} = \text{Id}_{\mathbb{k}^n}$ . Рассмотрим функтор  $F : vec \rightarrow crd$ , переводящий векторное пространство  $V$  в координатное пространство  $\mathbb{k}^{\dim V}$ , а стрелку  $\varphi : V \rightarrow W$  — в стрелку  $F(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}$ , которую можно воспринимать как матрицу оператора  $\varphi$  в выбранных базисах пространств  $V$  и  $W$ . Покажем, что  $F$  является эквивалентностью категорий, квазиобратной к тавтологическому вложению  $G : crd \hookrightarrow vec$ . По построению мы имеем точное равенство<sup>2</sup>  $FG = \text{Id}_{crd}$ . Противоположная композиция  $GF : vec \rightarrow vec$  принимает значения в несопоставимой с  $vec$  по мощности малой подкатеории  $crd \subset vec$ . Однако изоморфизмы (1-10) задают естественное преобразование из  $\text{Id}_{vec}$  в  $GF$ , т. к. в силу определения действия функтора  $F$  на стрелки все диаграммы (1-8) коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} \text{Id}_{vec}(V) = V & \xrightarrow{\varphi = \text{Id}_{vec}(\varphi)} & W = \text{Id}_{vec}(W) \\ f_V \downarrow & & \downarrow f_W \\ GF(V) = \mathbb{k}^{\dim V} & \xrightarrow{GF(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}} & \mathbb{k}^{\dim W} = GF(W). \end{array}$$

Тем самым, тождественный функтор  $\text{Id}_{vec}$  естественно изоморфен композиции  $GF$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 1.9.** Покажите, что категория  $\Delta_{\text{big}}$  канонически эквивалентна симплициальной подкатеории  $\Delta \subset \Delta_{\text{big}}$  (см. [прим. 1.4](#) на стр. 5).

<sup>1</sup>Переводящий выбранный базис в стандартный базис пространства  $\mathbb{k}^n$ .

<sup>2</sup>А не просто изоморфизм функторов.

## ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1

Функтор  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  тогда и только тогда задаёт эквивалентность категорий, когда он вполне строг<sup>1</sup> и каждый объект  $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$  изоморфен объекту вида  $G(X)$  для некоторого (зависящего от  $Y$ ) объекта<sup>2</sup>  $X = X(Y) \in \text{Ob } \mathcal{C}$ .

Доказательство. Пусть для каждого  $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$  указаны  $X = X(Y) \in \text{Ob } \mathcal{C}$  и изоморфизм  $f_Y : Y \simeq G(X)$ , причём когда  $Y = G(X)$ , мы положим  $f_{G(X)} = \text{Id}_{G(X)}$ . Зададим функтор  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  на объектах правилом  $F(Y) = X(Y)$ , а для стрелки  $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$  положим  $F(\varphi)$  равным такой стрелке<sup>3</sup>  $\psi : X(Y_1) \rightarrow X(Y_2)$ , что  $G(\psi) = f_{Y_2} \circ \varphi \circ f_{Y_1}^{-1}$ . Тогда  $FG = \text{Id}_{\mathcal{C}}$  и для любой стрелки  $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$  коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Id}_{\mathcal{D}}(Y_1) = Y_1 & \xrightarrow{\varphi} & Y_2 = \text{Id}_{\mathcal{D}}(Y_2) \\ f_{Y_1} \downarrow & & \downarrow f_{Y_2} \\ GF(Y_1) = X_1 & \xrightarrow{GF(\varphi)=G(\psi)} & X_2 = GF(Y_2). \end{array}$$

Таким образом,  $f_Y : Y \simeq G(X) = GF(Y)$  задают естественный изоморфизм тождественного функтора  $\text{Id}_{\mathcal{D}}$  с композицией  $GF$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 1.10. Покажите, что функтор дуализации из прим. 1.10 и ограничение функтора дуализации из прим. 1.9 на полную подкатегорию конечномерных пространств являются квазиобратными самим себе антиэквивалентностями<sup>4</sup> категорий.

**1.4. Представимые функторы.** Предпучок  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ , естественно изоморфный предпучку  $h_X : Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  для некоторого  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , называется *представимым*, и объект  $X$  в этом случае называют *представляющим* предпучок  $F$ . Двойственным образом, ковариантный функтор  $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  называется *копредставимым*, если он естественно изоморфен функтору  $h^X : Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  для некоторого объекта  $X$ , который в этом случае называется *копредставляющим* функтор  $F$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.11. Убедитесь, что тензорное произведение конечномерных векторных пространств  $U \otimes V$  копредставляет функтор  $\text{Vec} \rightarrow \text{Set}$ , сопоставляющий векторному пространству  $W$  множество билинейных отображений  $U \times V \rightarrow W$ .

Множество  $X_n = X([n])$  всех  $n$ -мерных симплексов триангулированного топологического пространства  $X : \Delta_s^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$  можно описать как множество всех *симплициальных* отображений  $\Delta^n \rightarrow X$  из стандартным образом триангулированного  $n$ -мерного симплекса  $\Delta^n = h_{[n]}$  в триангулированное пространство  $X$ , т. е. как множество естественных преобразований  $\text{Hom}_{\text{pSh}(\Delta_s)}(h_{[n]}, X)$ . Прямым обобщением этого наблюдения является

<sup>1</sup>Т. е. все отображения  $G : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), G(Y))$  являются изоморфизмами.

<sup>2</sup>Функторы  $G$ , обладающие этим свойством, называются *по существу сюръективными* (по-английски: *essentially surjective*).

<sup>3</sup>Поскольку  $G : \text{Hom}(X_1, X_2) \simeq \text{Hom}(G(X_1), G(X_2))$  является изоморфизмом, стрелка  $\psi$  существует и единственна.

<sup>4</sup>Т. е. контравариантными эквивалентностями: устанавливают эквивалентность не  $\mathcal{C}$  с  $\mathcal{D}$ , а  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  с  $\mathcal{D}$ .

ЛЕММА 1.1 (ЛЕММА ИОНЕДЫ 1)

Для любого предпучка множеств  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}et$  на произвольной категории  $\mathcal{C}$  имеется функториальная по  $F \in \text{pSh}(\mathcal{C})$  и по  $A \in \mathcal{C}$  биекция  $F(A) \simeq \text{Hom}_{\text{pSh}(\mathcal{C})}(h_A, F)$ , переводящая элемент  $a \in F(A)$  в естественное преобразование

$$f_X : \text{Hom}(X, A) \rightarrow F(X), \quad (1-11)$$

которое посылает стрелку  $\varphi : X \rightarrow A$  в значение отображения  $F(\varphi) : F(A) \rightarrow F(X)$  на элементе  $a$ . Обратная биекция сопоставляет каждому естественному преобразованию (1-11) значение отображения  $f_A : h_A(A) \rightarrow F(A)$  на элементе  $\text{Id}_A \in h_A(A)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого естественного преобразования (1-11), любого объекта  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  и любой стрелки  $\varphi : X \rightarrow A$  мы имеем коммутативную диаграмму (1-8)

$$\begin{array}{ccc} h_A(A) = \text{Hom}(A, A) & \xrightarrow{h_A(\varphi)} & \text{Hom}(X, A) = h_A(X) \\ f_A \downarrow & & \downarrow f_X \\ F(A) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(X), \end{array} \quad (1-12)$$

верхняя строка которой переводит  $\text{Id}_A$  в  $\varphi$ , так что  $f_X(\varphi) = F(\varphi)(f_A(\text{Id}_A))$ . Это означает, что естественное преобразование  $f : h_A \rightarrow F$  однозначно восстанавливается по элементу  $a = f_A(\text{Id}_A) \in F(A)$ . Каждому элементу  $a \in F(A)$  при этом отвечает преобразование (1-11), переводящее  $\varphi \in \text{Hom}(X, A)$  в  $f_X(\varphi) = F(\varphi)(a) \in F(X)$  и естественное, поскольку для любой стрелки  $\psi : Y \rightarrow X$  и всех  $\varphi \in h_A(X)$  имеем

$$f_Y(h_A(\psi)\varphi) = f_Y(\varphi\psi) = F(\varphi\psi)a = F(\psi)F(\varphi)a = F(\psi)(f_X(\varphi)),$$

т. е.  $f_Y \circ h_A(\psi) = F(\psi) \circ f_X$  как отображения  $h_A(X) \rightarrow F(Y)$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 1.12 (ЛЕММА ИОНЕДЫ 2). Для ковариантного функтора  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$  постройте функториальную по  $F$  и  $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$  биекцию  $F(A) \simeq \text{Hom}_{\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{S}et)}(h^A, F)$ .

СЛЕДСТВИЕ 1.1

Функторы  $X \mapsto h_X$  и  $X \mapsto h^X$  задают вполне строгие ковариантное и контравариантное вложения категории  $\mathcal{C}$  в категории предпучков и ковариантных функторов соответственно. Иными словами, имеются функториальные по  $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$  изоморфизмы  $\text{Hom}_{\text{pSh}(\mathcal{C})}(h_A, h_B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  и  $\text{Hom}_{\text{Fun}(\mathcal{C})}(h^A, h^B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяем леммы Ионеды к функторам  $F = h_B$  и  $F = h^B$ .  $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1.2

Если объект  $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , копредставляющий функтор  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$  (соотв. представляющий предпучок  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}et$ ) существует, то он единствен с точностью до канонического изоморфизма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если имеются два таких объекта  $A, B$ , что  $h^A \simeq F \simeq h^B$  (соотв.  $h_A \simeq F \simeq h_B$ ), то беря подходящую композицию этих естественных изоморфизмов, мы получаем естественный изоморфизм  $h^B \simeq h^A$  (соотв.  $h_A \simeq h_B$ ), которому по лемме Ионеды отвечает естественный по  $A$  и  $B$  изоморфизм  $A \simeq B$ .  $\square$

**1.4.1. Описание объектов универсальными свойствами.** При помощи сл. 1.2 можно пытаться переносить в произвольную категорию  $\mathcal{C}$  естественные<sup>1</sup> операции над множествами, имеющиеся в категории  $\mathcal{S}et$ . А именно, будем называть результатом применения такой операции к набору объектов  $X_i \in \text{Ob } \mathcal{C}$  представляющий объект  $X$  предпучка  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}et$ , переводящего каждый объект  $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$  в результат применения этой операции к множествам  $\text{Hom}(Y, X_i)$  в категории  $\mathcal{S}et$ . Разумеется, такое неявное описание не даёт никаких гарантий существования определяемого объекта, т. к. рассматриваемый функтор может оказаться непредставимым. Однако, если он представим, то представляющий объект  $X$ , во-первых, автоматически обладает некоторыми «универсальными свойствами», а во-вторых, единствен с точностью до единственного изоморфизма, сохраняющего эти свойства. Вдобавок, у каждой такого рода конструкции есть двойственная версия, получающаяся из предыдущей обращением стрелок и объявляющая результатом теоретико множественной операции над объектами  $X_i \in \text{Ob } \mathcal{C}$  копредставляющий объект ковариантного функтора  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$ , переводящего  $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$  в результат применения операции к множествам  $\text{Hom}(X_i, Y)$ .

ПРИМЕР 1.14 (ПРОИЗВЕДЕНИЕ  $A \times B$ )

Определим *произведение*  $A \times B$  объектов  $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$  произвольной категории  $\mathcal{C}$  как объект, представляющий предпучок  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}et$ ,  $Y \mapsto \text{Hom}(Y, A) \times \text{Hom}(Y, B)$ . Если произведение существует, то имеется функториальный по  $Y$  изоморфизм

$$\beta_Y : \text{Hom}(Y, A \times B) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(Y, A) \times \text{Hom}(Y, B).$$

Полагая в нём  $Y = A \times B$ , получаем пару стрелок

$$A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B, \quad (1-13)$$

изображающих элемент  $\beta_{A \times B}(\text{Id}_{A \times B}) \in \text{Hom}(A \times B, A) \times \text{Hom}(A \times B, B)$ . Пара стрелок (1-13) универсальна в том смысле, что для любой пары стрелок

$$A \xleftarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} B, \quad (\varphi, \psi) \in \text{Hom}(Y, A) \times \text{Hom}(Y, B), \quad (1-14)$$

существует единственная стрелка  $\varphi \times \psi : Y \rightarrow A \times B$ , такая что  $\beta_Y(\varphi \times \psi) = (\varphi, \psi)$ . Коммутативная диаграмма<sup>2</sup>

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(A \times B, A \times B) & \xrightarrow{h_{A \times B}(\varphi \times \psi)} & \text{Hom}(Y, A \times B) \\ \beta_{A \times B} \downarrow & & \downarrow \beta_Y \\ \text{Hom}(A \times B, A) \times \text{Hom}(A \times B, B) & \xrightarrow{h_A(\varphi \times \psi) \times h_B(\varphi \times \psi)} & \text{Hom}(Y, A) \times \text{Hom}(Y, B), \end{array}$$

верхняя горизонтальная стрелка которой переводит  $\text{Id}_{A \times B}$  в  $\varphi \times \psi$ , а композиция нижней и левой стрелок действуют на  $\text{Id}_{A \times B}$  как

$$\text{Id}_{A \times B} \xrightarrow{\beta_{A \times B}} (\pi_A, \pi_B) \xrightarrow{h_A(\varphi \times \psi) \times h_B(\varphi \times \psi)} (\pi_A \circ (\varphi \times \psi), \pi_B \circ (\varphi \times \psi)),$$

<sup>1</sup>Т. е. функториальные по всем участвующим множествам.

<sup>2</sup>Ср. с использованной в доказательстве леммы Йонеды диаграммой из форм. (1-12) на стр. 15



показывает, что равенство  $\beta_Y(\varphi \times \psi) = (\varphi, \psi)$  равносильно равенствам  $\varphi = \pi_A \circ (\varphi \times \psi)$  и  $\psi = \pi_B \circ (\varphi \times \psi)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.13. Пусть диаграмма  $A \xleftarrow{\pi'_A} C \xrightarrow{\pi'_B} B$  тоже универсальна в том смысле, что для любой пары стрелок (1-14) существует единственная такая стрелка  $Y \rightarrow C$ , композиции которой с  $\pi'_A$  и  $\pi'_B$  равны  $\varphi$  и  $\pi$  соответственно. Убедитесь, что существует единственный изоморфизм  $\gamma : C \simeq A \times B$ , такой что  $\pi_A \circ \gamma = \pi'_A$  и  $\pi_B \circ \gamma = \pi'_B$ . Покажите также, что любая пара стрелок

$$\alpha : A_1 \rightarrow A_2, \quad \beta : B_1 \rightarrow B_2$$

задаёт единственный морфизм  $\alpha \times \beta : A_1 \times B_1 \rightarrow A_2 \times B_2$ , такой что  $\alpha \circ \pi_A = (\alpha \times \beta) \circ \alpha$  и  $\beta \circ \pi_B = (\alpha \times \beta) \circ \beta$ .

В категории множеств произведение  $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ . Снабжённое слабой топологией, в которой  $\pi_A$  и  $\pi_B$  непрерывны, это множество задаёт произведение и в категории топологических пространств. Снабжённое покомпонентными операциями, оно же является произведением групп, колец и модулей над кольцами.

ПРИМЕР 1.15 (КОПРОИЗВЕДЕНИЕ  $A \otimes B$ )

Двойственным образом, копроизведение  $A \otimes B$  объектов  $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$  произвольной категории  $\mathcal{C}$  определяется как объект, копредставляющий ковариантный функтор

$$Y \mapsto \text{Hom}(A, Y) \times \text{Hom}(B, Y)$$

из  $\mathcal{C}$  в  $\mathcal{S}et$ . Обращая все стрелки в предыдущем примере, мы можем охарактеризовать копроизведение как объект, включающийся в диаграмму

$$A \xrightarrow{\iota_A} A \otimes B \xleftarrow{\iota_B} B,$$

универсальную в том смысле, что для любой пары стрелок в  $\mathcal{C}$

$$A \xrightarrow{\varphi} Y \xleftarrow{\psi} B$$

имеется единственный морфизм  $\varphi \otimes \psi : A \otimes B \rightarrow Y$ , такой что  $\varphi = (\varphi \otimes \psi) \circ \iota_A$  и  $\psi = (\varphi \otimes \psi) \circ \iota_B$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.14. Убедитесь, что если такая универсальная диаграмма существует, то она единственна с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со стрелками  $\iota_A, \iota_B$ , и что любая пара стрелок  $\alpha : A_1 \rightarrow A_2, \beta : B_1 \rightarrow B_2$  задаёт единственный такой морфизм  $\alpha \otimes \beta : A_1 \otimes B_1 \rightarrow A_2 \otimes B_2$ , что  $\iota_A \circ \alpha = (\alpha \otimes \beta) \circ \alpha$ .

Копроизведение в категории множеств и топологических пространств это дизъюнктное объединение  $A \otimes B = A \sqcup B$ . В категории групп это свободное произведение групп<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Т. е. фактор свободной группы, порождённой дизъюнктным объединением  $A \sqcup B$ , по наименьшей нормальной подгруппе соотношений, позволяющих заменять пару соседних лежащих в одной группе букв их произведением. К примеру,  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \simeq \mathbb{F}_2$  это свободная (некоммутативная) группа с двумя образующими.

$A \otimes B = A * B$ . В категории модулей над кольцом<sup>1</sup> копроизведение совпадает с произведением и равно прямой сумме модулей  $A \otimes B = A \times B = A \oplus B$ . В категории коммутативных колец с единицей копроизведение  $A \otimes B$  это тензорное произведение колец<sup>2</sup>.

ПРИМЕР 1.16 (свободные модули)

Обозначим через  $R\text{-Mod}$  категорию левых модулей над фиксированным кольцом  $R$ . Для любого множества  $E \in \text{Ob } \mathcal{S}et$  ковариантный функтор

$$R\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{S}et, \quad M \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{S}et}(E, M),$$

копредставим свободным  $R$ -модулем с базисом  $E$ . Мы будем обозначать такой свободный модуль через  $R \otimes E$ . По определению, он состоит из формальных линейных комбинаций  $\sum_{e \in E} x_e e$  элементов множества  $E$  с коэффициентами  $x_e \in R$ , лишь конечное число из которых отлично от нуля.

УПРАЖНЕНИЕ 1.15. Установите функториальный по  $M$  и  $E$  изоморфизм

$$\text{Hom}_{R\text{-Mod}}(R \otimes E, M) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{S}et}(E, M). \quad (1-15)$$

<sup>1</sup>В частности, в категории  $Ab$  абелевых групп.

<sup>2</sup>Т. е. тензорное произведение подлежащих абелевых групп, как модулей над  $\mathbb{Z}$ , с покомпонентным умножением:  $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 \cdot a_2) \otimes (b_1 \cdot b_2)$ .

## §2. Сопряжённые функторы и (ко)пределы

**2.1. Сопряжённые функторы.** Функторы  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  и  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  между категориями  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{D}$  называются, соответственно, *левым* и *правым сопряжёнными* друг другу, если имеется функториальная по  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  и  $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$  биекция

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)). \quad (2-1)$$

С каждой парой сопряжённых функторов связаны естественные преобразования

$$t : F \circ G \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}} \quad \text{и} \quad s : \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F. \quad (2-2)$$

Стрелка  $t_Y : FG(Y) \rightarrow Y$ , задающая действие преобразования  $t$  над  $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ , является образом элемента  $\text{Id}_{G(Y)}$  при изоморфизме (2-1), написанном для  $X = G(Y)$ :

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(FG(Y), Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y)) \ni \text{Id}_{G(Y)}.$$

Двойственным образом, стрелка  $s_X : X \rightarrow GF(X)$  получается из  $\text{Id}_{F(X)}$  при изоморфизме (2-1), написанном для  $Y = F(X)$ :

$$\text{Id}_{F(X)} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X)).$$

**УПРАЖНЕНИЕ 2.1.** Убедитесь в естественности этих преобразований.

**ПРИМЕР 2.1** (ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИМ. 1.16 ПРО СВОБОДНЫЕ МОДУЛИ)  
Изоморфизм из форм. (1-15) на стр. 18 означает, что функтор

$$F : \text{Set} \rightarrow R\text{-Mod}, \quad E \mapsto R \otimes E,$$

сопоставляющий произвольному множеству  $E$  свободный левый  $R$ -модуль с базисом  $E$ , сопряжён слева к забывающему функтору  $G : R\text{-Mod} \rightarrow \text{Set}$ , переводящему модуль в множество его элементов, т. е.  $\text{Hom}_{R\text{-Mod}}(R \otimes E, M) \simeq \text{Hom}_{\text{Set}}(E, G(M))$  функториально по модулю  $M$  и множеству  $E$ . Естественное преобразование

$$s_E : E \hookrightarrow G(R \otimes E)$$

вкладывает  $E$  в качестве множества базисных векторов в множество всех векторов свободного модуля  $R \otimes E$ . Естественное преобразование

$$t_M : R \otimes G(M) \twoheadrightarrow M$$

это  $R$ -линейный эпиморфизм огромного свободного модуля, базисом которого служит множество всех векторов модуля  $M$ , на модуль  $M$ . Он переводит каждый базисный вектор  $t$  в элемент  $t \in M$ , а формальную линейную комбинацию базисных векторов — в результат её вычисления внутри модуля  $M$ . Так, при  $M = R = \mathbb{R}$  векторное пространство  $\mathbb{R} \otimes G(\mathbb{R})$  состоит из формальных линейных комбинаций  $\sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \cdot x$ , в которых лишь конечное множество коэффициентов  $f(x)$  отлично от нуля. Оно изоморфно пространству всех функций  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  с конечным носителем, и преобразование  $t_{\mathbb{R}}$  сопоставляет такой функции  $f$  вещественное число  $\sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \cdot x$ .

ПРИМЕР 2.2 (САМОСОПРЯЖЁННОСТЬ ПРЕДСТАВИМЫХ ФУНКТОРОВ НА КАТЕГОРИИ  $\mathcal{A}b$ )

Для любых трёх абелевых групп  $A, B, C$  имеется канонический изоморфизм

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}b}(A, \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(B, C)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(B, \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(A, C)), \quad (2-3)$$

переводящий семейство гомоморфизмов  $\varphi_a : B \rightarrow C$ , запараметризованное элементами  $a \in A$  так, что  $\varphi_{a'+a''} = \varphi_{a'} + \varphi_{a''}$  для всех  $a', a'' \in A$ , в запараметризованное элементами  $b \in B$  семейство гомоморфизмов  $\psi_b : A \rightarrow C$ ,  $a \mapsto \varphi_a(b)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.2. Проверьте, что каждое отображение  $\psi_b$  является гомоморфизмом абелевых групп и что  $\psi_{b'+b''} = \psi_{b'} + \psi_{b''}$  для всех  $b', b'' \in B$ . Постройте обратное отображение из правой части (2-3) в левую.

Изоморфизм (2-3) можно переписать как  $\text{Hom}_{\mathcal{A}b^{\text{op}}}(h_C(B), A) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(B, h_C(A))$ . Это означает, что для любой абелевой группы  $C$  представимый функтор

$$h_C : \mathcal{A}b^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}b, \quad X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(X, C),$$

самосопряжён. Естественное преобразование  $s_X : X \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(\text{Hom}_{\mathcal{A}b}(X, C), C)$  сопоставляют элементу  $x \in X$  гомоморфизм вычисления

$$s_X(x) = \text{ev}_x : \text{Hom}(X, C) \rightarrow C, \quad \varphi \mapsto \varphi(x).$$

Естественное преобразование  $t_X$  представляет собою стрелку  $h_C(h_C(X)) \rightarrow X$  в категории  $\mathcal{A}b^{\text{op}}$ , т. е. стрелку  $X \rightarrow h_C(h_C(X))$  в категории  $\mathcal{A}b$ , и в таком виде совпадает с преобразованием  $s_X$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1

Для существования левого сопряжённого функтора  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  к данному функтору  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  необходимо и достаточно, чтобы для любого  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  функтор

$$h_G^X : \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}, \quad Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)), \quad (2-4)$$

был копредставим, и в этом случае  $F(X)$  является его копредставляющим объектом.

Доказательство. Необходимость очевидна из определений. Докажем достаточность. Пусть для каждого  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  функтор (2-4) представляется объектом  $F(X)$ , т. е. имеется естественный изоморфизм функторов  $f^X : h^{F(X)} \simeq h_G^X$ . Чтобы продолжить соответствие  $X \mapsto F(X)$  до функтора  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  заметим, что морфизм  $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$  задаёт естественное преобразование  $\varphi^* : h_G^{X_2} \rightarrow h_G^{X_1}$  заключающееся в правом умножении на  $\varphi$ : стрелка  $\psi : X_2 \rightarrow G(Y)$  переходит в  $\psi\varphi : X_1 \rightarrow G(Y)$ . Из леммы Йонеды вытекает<sup>1</sup>, что композиция естественных преобразований  $(f^{X_1})^{-1} \circ \varphi^* \circ f^{X_2} : h^{F(X_2)} \rightarrow h^{F(X_1)}$  задаётся правым умножением на единственную стрелку  $F(X_1) \rightarrow F(X_2)$ , которую мы и объявим образом  $F(\varphi)$  стрелки  $\varphi$  под действием функтора  $F$ . Прямо по построению мы получаем функториальный по  $X$  изоморфизм  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ .  $\square$

<sup>1</sup>См. сл. 1.1 на стр. 15.

Следствие 2.1 (из доказательства [ПРЕДЛ. 2.1](#))

Если функтор  $F$ , сопряжённый слева к функтору  $G$ , существует, то он определяется по  $G$  однозначно с точностью до естественного изоморфизма функторов.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 2.3. Докажите двойственные утверждения: для существования правого сопряжённого функтора  $G$  к функтору  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  необходимо и достаточно, чтобы для любого  $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$  предпучок  $h_Y^F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}, X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$  был представим, и в этом случае объект  $G(Y)$  его представляет, а функтор  $G$  определяется по  $F$  однозначно с точностью до естественного изоморфизма функторов.

Предложение 2.2

Функтор  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  тогда и только тогда сопряжён слева к функтору  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ , когда существуют такие естественные преобразования  $t : F \circ G \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$  и  $s : \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$ , что композиции  $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$  и  $G \xrightarrow{s \circ G} GFG \xrightarrow{G \circ t} G$  являются тождественными эндоморфизмами функторов  $F$  и  $G$ .

Доказательство. Если имеются functorиальные по  $X$  и  $Y$  изоморфизмы

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\varrho} & \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \\ & \xleftarrow{\lambda} & \end{array} \quad (2-5)$$

то для любой стрелки  $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$  в  $\mathcal{C}$  и любого  $Y$  из  $\mathcal{D}$  коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_1), Y) & \xleftarrow{\sim \lambda} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, G(Y)) \\ \uparrow F(\varphi)^* & & \uparrow \varphi^* \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_2), Y) & \xleftarrow{\sim \lambda} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, G(Y)) \end{array}$$

вертикальные стрелки которой задаются правым умножением на  $F(\varphi)$  и на  $\varphi$  соответственно. Рисуя это для  $Y = F(X)$  и морфизма  $\varphi = s_X : X \rightarrow GF(X)$ , который задаёт действие над объектом  $X$  естественного преобразования  $s : \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$  из форм. (2-2) на стр. 19, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) & \xleftarrow{\sim \lambda} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X)) \\ \uparrow F(s_X)^* & & \uparrow s_X^* \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FGF(X), F(X)) & \xleftarrow{\sim \lambda} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(X), GF(X)) \end{array}$$

верхняя стрелка  $\lambda$  которой переводит  $s_X$  в  $\text{Id}_{F(X)}$ , а нижняя стрелка  $\lambda$  переводит  $\text{Id}_{GF(X)}$  в морфизм  $t_{F(X)} : FGF(X) \rightarrow F(X)$ , задающий действие второго естественного преобразования  $t : FG \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$  из формулы (2-2) над объектом  $F(X)$ . Таким образом,

$$\text{Id}_{F(X)} = \lambda(s_X) = \lambda s_X^*(\text{Id}_{GF(X)}) = F(s_X)^* \lambda(\text{Id}_{GF(X)}) = F(s_X)^*(t_{F(X)}) = t_{F(X)} \circ F(s_X),$$

а это и значит, что композиция  $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$  задаёт тождественное преобразование функтора  $F$ . Проверка того, что  $G \xrightarrow{s \circ G} GFG \xrightarrow{G \circ t} G$  совпадает с  $\text{Id}_{\mathcal{C}}$  полностью

симметрична. Наоборот, если имеются преобразования  $s : \text{Id}_C \rightarrow GF$  и  $t : FG \rightarrow \text{Id}_D$ , зададим в (2-5) действие  $\lambda$  и  $\varrho$  на стрелки  $\varphi : F(X) \rightarrow Y$  и  $\psi : X \rightarrow G(Y)$  правилами:

$$\varrho(\varphi) = G(\varphi) \circ s_X \quad \text{и} \quad \lambda(\psi) = t_Y \circ F(\psi),$$

в правых частях которых стоят сквозные отображения вдоль стрелок

$$X \xrightarrow{s_X} GF(X) \xrightarrow{G(\varphi)} G(Y) \quad \text{и} \quad F(X) \xrightarrow{F(\psi)} FG(Y) \xrightarrow{t_Y} Y.$$

Композиция  $\lambda\varrho(\varphi) = t_Y \circ FG(\varphi) \circ F(s_X) : F(X) \rightarrow Y$  представляет собою путь из левого нижнего угла в правый верхний на диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} & & F(X) & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \text{Id}_{F(X)} \swarrow & & & \swarrow t_Y \\ & F(X) & & & FG(Y) \\ & \searrow t_{F(X)} & & & \swarrow FG(\varphi) \\ F(X) & \xrightarrow{F(s_X)} & FGF(X) & \xrightarrow{FG(\varphi)} & FG(Y) \end{array}$$

правый параллелограмм которой коммутативен в силу естественности преобразования  $t$ , а левый треугольник — в силу равенства  $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$  и  $\text{Id}_F$ . Поэтому  $\lambda\varrho(\varphi) = \varphi$ . Равенство  $\varrho\lambda(\psi) = \psi$  проверяется симметричным образом.  $\square$

ПРИМЕР 2.3 (СООТВЕТСТВИЕ ПРЕПОРЯДКОВ, ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИМ. 1.2 НА СТР. 4)

Функтор  $F : N \rightarrow M$  между предпорядоченными множествами, рассматриваемыми как категории, это просто отображение, сохраняющее предпорядок:  $n_1 \leq n_2 \Rightarrow F(n_1) \leq F(n_2)$ . Левая сопряжённость такого отображения сохраняющему порядок отображению  $G : M \rightarrow N$  означает, что неравенства  $F(n) \leq m$  и  $n \leq G(m)$  равносильны друг другу. Наличие естественных преобразований  $t : F \circ G \rightarrow \text{Id}_M$  и  $s : \text{Id}_N \rightarrow G \circ F$  означает неравенства<sup>1</sup>  $FG(m) \leq m$  и  $n \leq GF(n)$  для всех  $n \in N, m \in M$ , а тождественность сквозных преобразований  $F \rightarrow FGF \rightarrow F$  и  $G \rightarrow GFG \rightarrow G$  — неравенства  $F(n) \leq FGF(n) \leq F(n)$  и  $G(m) \leq GFG(m) \leq G(m)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.4. Убедитесь непосредственно, что условие  $F(n) \leq m \Leftrightarrow n \leq G(m)$  на сохраняющие предпорядок отображения  $F, G$  эквивалентно системе неравенств  $F(G(m)) \leq m$  и  $n \leq GF(n)$  для всех  $m \in M, n \in N$ , причём если эти неравенства выполнены, то неравенства  $F(n) \leq FGF(n) \leq F(n)$  и  $G(m) \leq GFG(m) \leq G(m)$  выполняются автоматически.

Если оба предпорядка являются частичными порядками, последние два неравенства превращаются в равенства  $F(n) = FGF(n)$  и  $G(m) = GFG(m)$ . Примером такой ситуации является соответствие Галуа: пусть группа  $H$  действует слева на множестве  $X$ ,  $\mathcal{S}(H)$  и  $\mathcal{S}(X)$  обозначают частично упорядоченные по включению множества подгрупп в  $H$  и подмножеств  $X$  соответственно, функтор

$$F : \mathcal{S}(H) \rightarrow \mathcal{S}(X)^{\text{op}}, \quad S \mapsto X^S = \{x \in X \mid \forall h \in S \ hx = x\}$$

сопоставляет подгруппе  $S \subset H$  множество её неподвижных точек, а функтор

$$G : \mathcal{S}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}(H), \quad T \mapsto Z_T = \{h \in H \mid \forall x \in T \ hx = x\}$$

<sup>1</sup>Которые задают «действие» этих естественных преобразований над объектами  $m$  и  $n$ .

сопоставляет подмножеству  $T \subset X$  его *централизатор*<sup>1</sup>.

УПРАЖНЕНИЕ 2.5. Убедитесь, что эти функторы сопряжены:  $X^S \supset T \iff S \subset Z(T)$ , и что  $Z_{X^{Z_T}} = Z_T$  и  $X^{Z_{X^S}} = X^S$  для любых подмножества  $T \subset X$  и подгруппы  $S \subset H$ .

ПРИМЕР 2.4 (ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КАТЕГОРИЙ КАК СОПРЯЖЁННЫЕ ФУНКТОРЫ)

Пусть функторы  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  и  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  являются квазиобратными эквивалентностями<sup>2</sup>, т. е. имеются естественные изоморфизмы  $g : \text{Id}_{\mathcal{C}} \simeq GF$  и  $f : \text{Id}_{\mathcal{D}} \simeq FG$ . Как и в доказательстве предл. 2.2, рассмотрим естественные по  $X, Y$  отображения

$$\begin{aligned} \varrho_{FG} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)), & \varphi &\mapsto G(\varphi) \circ g_X = (g_X^* \circ G)\varphi \\ \varrho_{GF} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y), X) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, F(X)), & \psi &\mapsto F(\psi) \circ f_Y = (f_Y^* \circ F)\psi. \end{aligned}$$

Поскольку оба отображения

$$\begin{aligned} g_X^* : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(X), G(Y)) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)), & \xi &\mapsto \xi \circ f_X, \\ G : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(X), G(Y)), & \xi &\mapsto G(\xi), \end{aligned}$$

являются биективными<sup>3</sup>, их композиция  $\varrho_{FG}$  тоже биективна. Это означает, что функтор  $F$  сопряжён слева к функтору  $G$ . По аналогичной причине биективно и преобразование  $\varrho_{GF}$ , т. е. функтор  $F$  сопряжён к функтору  $G$  также и справа. Тем самым, квазиобратные эквивалентности категорий сопряжены друг другу с обеих сторон. Отметим, что по сл. 2.1 и упр. 2.3 на стр. 21 отсюда вытекает, что если один из двух сопряжённых друг другу функторов является эквивалентностью категорий, то и другой тоже таковою является.

**2.2. Тензорные произведения и Ном.** Пусть  $R$  — произвольное кольцо. Тензорным произведением  $M \otimes_R N$  правого  $R$ -модуля  $M$  на левый  $R$ -модуль  $N$  называется фактор тензорного произведения абелевых групп<sup>4</sup>  $M \otimes N$  по подгруппе, порождённой всевозможными разностями  $(mx) \otimes n - m \otimes (xn)$ , где  $m \in M$ ,  $x \in R$  и  $n \in N$ . Это абелева группа, на которой кольцо  $R$ , вообще говоря, больше уже не действует, но в которой выполняются соотношения  $(mx) \otimes n = m \otimes (xn)$ . Тензорное умножение на фиксированный левый  $R$ -модуль  $N$  задаёт функтор из категории правых  $R$ -модулей в абелевы группы

$$\text{Mod-}R \rightarrow \text{Ab}, \quad X \mapsto X \otimes_R N,$$

переводящий стрелку  $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$  в стрелку  $\varphi \otimes \text{Id}_N : m \otimes n \mapsto \varphi(m) \otimes n$ . Если левый  $R$ -модуль  $N$  одновременно является правым модулем над ещё одним кольцом  $S$  и правое действие  $S$  коммутирует с левым действием  $R$  (такие  $N$  называются  $R$ - $S$  бимодулями), функтор тензорного умножения на  $N$  отображает  $\text{Mod-}R$  в  $\text{Mod-}S$ : кольцо  $S$

<sup>1</sup>Т. е. поточечный стабилизатор. Обратите внимание, что оба функтора оборачивают включения.

<sup>2</sup>См. н° 1.3.2 на стр. 13.

<sup>3</sup>Первое — в силу того, что является правым умножением на обратимую стрелку  $g_X$ , второе — потому что функтор  $F$  вполне строг.

<sup>4</sup>Или, что то же самое,  $\mathbb{Z}$ -модулей.

действует на  $M \otimes N$  справа по правилу  $(m \otimes n)y = m \otimes (ny)$ . С другой стороны, представимый функтор  $h^N : \mathcal{M}od-S \rightarrow \mathcal{A}b$ ,  $Y \mapsto \text{Hom}_S(N, Y)$ , принимает значения в  $\mathcal{M}od-R$ : правое действие  $x \in R$  на  $\text{Hom}_S(N, Y)$  переводит  $S$ -линейную справа стрелку  $\varphi : N \rightarrow Y$  в стрелку  $\varphi x : n \mapsto \varphi(xn)$ , так что выполняется равенство  $(\varphi x)n = \varphi(xn)$ .

Предложение 2.3

Тензорное умножение на  $R$ - $S$ -бимодуль  $N$  сопряжено слева функтору  $h^N$ , т. е. имеется естественный по  $X \in \text{Ob } \mathcal{M}od-R$  и  $Y \in \text{Ob } \mathcal{M}od-S$  изоморфизм абелевых групп

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}od-S}(X \otimes_R N, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{M}od-R}(X, \text{Hom}_{\mathcal{M}od-S}(N, Y)). \quad (2-6)$$

Доказательство. Отображение из левой части (2-6) в правую сопоставляет  $S$ -линейному справа гомоморфизму  $\varphi : X \otimes_R N \rightarrow Y$  зависящее от  $x \in X$  семейство гомоморфизмов  $\varphi_x : N \rightarrow Y$ ,  $n \mapsto \varphi(x \otimes n)$ . Каждый из них  $S$ -линеен справа:

$$\varphi_x(ns) = \varphi(x \otimes_R ns) = \varphi(x \otimes_R n)s = \varphi_x(n)s,$$

а сопоставление  $x \mapsto \varphi_x$ , как отображение  $X \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{M}od-S}(N, Y)$ ,  $R$ -линейно справа:

$$\varphi_{xr}n = \varphi(xr \otimes_R n) = \varphi(x \otimes_R rn) = \varphi_x(rn) = (\varphi_x r)n.$$

Обратное отображение из правой части (2-6) в левую переводит семейство  $S$ -линейных справа гомоморфизмов  $\varphi_x : N \rightarrow Y$ , которые  $R$ -линейно справа зависят от  $x \in X$ , в  $S$ -линейный справа гомоморфизм  $\varphi : x \otimes_R n \mapsto \varphi_x(n)$ .  $\square$

Упражнение 2.6. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \text{Hom}_{\mathcal{M}od-S}(N, Y) \otimes_R N \rightarrow Y \quad \text{и} \quad s_X : X \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{M}od-S}(N, X \otimes_R N).$$

Пример 2.5 (индуцирование и коиндуцирование)

Если кольцо  $A$  содержится в кольце  $B$  и они имеют общую единицу, каждый правый  $B$ -модуль  $X$  одновременно является и правым  $A$ -модулем, что задаёт функтор ограничения

$$\text{res} : \mathcal{M}od-B \rightarrow \mathcal{M}od-A. \quad (2-7)$$

Рассмотрим  $B$  как  $A$ - $B$  бимодуль и положим в предл. 2.3  $S = N = B$ ,  $R = A$ . Абелева группа  $\text{Hom}_{\mathcal{M}od-B}(B, Y)$  канонически отождествляется с  $Y$  гомоморфизмом  $\varphi \mapsto \varphi(1)$ , и как правый  $A$ -модуль изоморфна  $\text{res } Y$ .

Упражнение 2.7. Убедитесь в этом.

Поэтому изоморфизм (2-6) из предл. 2.3 превращается в функториальный по  $A$ -модулю  $X$  и  $B$ -модулю  $Y$  изоморфизм

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}od-B}(X \otimes_A B, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{M}od-A}(X, \text{res } Y).$$

Правый  $B$ -модуль  $\text{ind } X \stackrel{\text{def}}{=} X \otimes_A B$  называется индуцированным с  $A$ -модуля  $X$ . Таким образом, функтор индуцирования  $\text{ind} : \mathcal{M}od-A \rightarrow \mathcal{M}od-B$  сопряжён слева к функтору ограничения.



УПРАЖНЕНИЕ 2.8. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \text{res ind } Y \rightarrow Y \quad \text{и} \quad s_X : X \rightarrow \text{ind res } X.$$

Теперь рассмотрим  $B$  как  $B$ - $A$  бимодуль и положим в предл. 2.3  $S = A$ ,  $N = R = B$ . Канонический гомоморфизм  $X \otimes_B B \simeq X$ ,  $x \otimes_B b \mapsto xb$ , является изоморфизмом абелевых групп и отождествляет правый  $A$ -модуль  $X \otimes_B B$  с  $\text{res } X$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.9. Убедитесь в этом.

Поэтому изоморфизм (2-6) из предл. 2.3 превращается в функториальный по  $B$ -модулю  $X$  и  $A$ -модулю  $Y$  изоморфизм абелевых групп

$$\text{Hom}_{\text{Mod-}A}(\text{res } X, Y) \simeq \text{Hom}_{\text{Mod-}B}(X, \text{Hom}_{\text{Mod-}A}(B, Y)).$$

Правый  $B$ -модуль  $\text{coind } Y \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\text{Mod-}A}(B, Y)$  называется *коиндуцированным* с  $A$ -модуля  $Y$ . Таким образом, функтор коиндуцирования  $\text{coind} : \text{Mod-}A \rightarrow \text{Mod-}B$  сопряжён справа к функтору ограничения.

УПРАЖНЕНИЕ 2.10. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \text{res coind } Y \rightarrow Y \quad \text{и} \quad s_X : X \rightarrow \text{coind res } X.$$

В ситуации, когда  $A = \mathbb{k}[H]$  и  $B = \mathbb{k}[G]$  являются групповыми алгебрами группы  $G$  и её подгруппы  $H \subset G$  с коэффициентами в поле  $\mathbb{k}$ , мы получаем известные из начального курса алгебры функторы (ко)индуцирования линейных представлений группы  $G$  над полем  $\mathbb{k}$  с представлений её подгруппы  $H$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.11\*. Покажите, что функторы  $\text{ind}$ ,  $\text{coind} : \text{Mod-}H \rightarrow \text{Mod-}G$  естественно изоморфны, если индекс  $[G : H]$  конечен.

ПРИМЕР 2.6 (СИНГУЛЯРНЫЕ СИМПЛЕКСЫ)

Свяжем с топологическим пространством  $Y$  симплициальное множество его *сингулярных симплексов*  $S(Y) : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}et$ , которое сопоставляет комбинаторному симплексу  $[n] \in \text{Ob } \Delta$  множество  $S_n(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y) = h_Y(\Delta^n)$  всех непрерывных отображений правильного  $n$ -мерного симплекса  $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  в  $Y$ , а неубывающему отображению  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$  — правое умножение  $f \mapsto f \circ \varphi^*$  на аффинное отображение  $\varphi^* : \Delta^m \rightarrow \Delta^n$ , действие которого на вершины симплекса совпадает с  $\varphi$ . Возникающий таким образом функтор  $S : \mathcal{T}op \rightarrow pSh(\Delta)$  сопряжён справа функтору геометрической реализации  $pSh(\Delta) \rightarrow \mathcal{T}op$ ,  $X \mapsto |X|$ , из прим. 1.7 на стр. 8, т. е. имеется естественный по симплициальному множеству  $X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}et$  и топологическому пространству  $Y$  изоморфизм

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}op}(|X|, Y) \simeq \text{Hom}_{pSh}(X, S(Y)), \quad (2-8)$$

который является категорным аналогом изоморфизма из форм. (2-6) на стр. 24. В самом деле, функтор геометрической реализации вкладывает категорию  $\Delta$  в категорию  $\mathcal{T}op$  в виде дизъюнктного набора  $D = \bigsqcup_{n \geq 0} \Delta^n$  правильных симплексов всех размерностей. На пространстве  $D$  имеется левое действие стрелок  $\varphi$  категории  $\Delta$  аффинными отображениями  $\varphi_*$ . Оно задаёт правое действие стрелок из  $\Delta$  на множестве  $S(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)$  сингулярных симплексов топологического пространства  $Y$ .

С другой стороны, каждое симплициальное множество  $X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}et$  по определению снабжено правым действием стрелок категории  $\Delta$  на множества  $X_n = X([n])$ , и геометрическая реализация  $|X|$ , представляющая собою фактор дизъюнктного объединения  $\bigsqcup_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n$  по соотношениям  $(x\varphi, s) = (x, \varphi s)$ , является прямым аналогом «тензорного произведения  $X \otimes_{\Delta} D$ ». Таким образом, изоморфизм (2-8) имеет вид

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}op}(X \otimes_{\Delta} D, Y) \simeq \text{Hom}_{\text{Mod-}\Delta}(X, \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)), \quad (2-9)$$

ничем не отличающийся от изоморфизма (2-6) со стр. 24.

УПРАЖНЕНИЕ 2.12. Явно постройте взаимно обратные изоморфизмы между левой и правой частями формулы (2-9) и опишите естественные преобразования<sup>1</sup>

$$t_Y : |S(Y)| \rightarrow Y \quad \text{и} \quad s_X : X \rightarrow S(|X|).$$

**2.3. Пределы диаграмм.** Любую малую категорию  $\mathcal{N}$  можно воспринимать как диаграмму, вершинами которой служат объекты, а стрелками — морфизмы категории  $\mathcal{N}$ . Функторы  $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$  реализуют эту диаграмму в категории  $\mathcal{C}$  в том смысле, что указывают объекты  $X_\nu = X(\nu)$ , занумерованные множеством  $\text{Ob } \mathcal{N}$ , а также стрелки  $X(\nu \rightarrow \mu) : X_\nu \rightarrow X_\mu$ , занумерованные множеством  $\text{Mor } \mathcal{N}$ . Поэтому такие функторы часто называют *диаграммами* вида  $\mathcal{N}$  в категории  $\mathcal{C}$ . Диаграммы образуют категорию  $\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$  с естественными преобразованиями функторов в качестве морфизмов. Каждый объект  $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$  задаёт *постоянную диаграмму*  $\bar{Y}$ , в которой все объекты  $\bar{Y}_\nu = Y$ , а все стрелки  $\bar{Y}(\nu \rightarrow \mu) = \text{Id}_Y$ . Со всякой диаграммой  $X \in \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$  связан предпучок множеств  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}et$ ,  $Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})}(\bar{Y}, X)$ . Если он представим, т. е. существует такой объект  $L \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , что имеется естественный по  $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$  изоморфизм

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, L) = \text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})}(\bar{Y}, X), \quad (2-10)$$

то представляющий объект  $L$  называют *пределом*<sup>2</sup> диаграммы  $X$  и пишут  $L = \lim X$ . Двойственным образом, объект  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , копредставляющий ассоциированный с диаграммой  $X$  ковариантный функтор  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$ ,  $Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})}(X, \bar{Y})$ , называется *копределом*<sup>3</sup> диаграммы  $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$  и обозначается  $C = \text{colim } X$ . С копределом  $C$  связана функториальная по  $Y \in \mathcal{C}$  биекция

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})}(X, \bar{Y}). \quad (2-11)$$

Как и все (ко) представляющие объекты, (ко) пределы однозначно характеризуются своими «универсальными свойствами». Полагая  $Y = L$  в формуле (2-10), мы получаем естественное преобразование  $\pi : \bar{L} \rightarrow X$ , соответствующее тождественному эндоморфизму  $\text{Id}_L$  и представляющее собою набор стрелок  $\pi_\nu : \lim X \rightarrow X_\nu$ , которые коммутируют со всеми стрелками диаграммы  $X$  и универсальны в том смысле, что для любого

<sup>1</sup>Первое является непрерывным отображением топологических пространств, второе — естественным преобразованием функторов  $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}et$ , переводящих комбинаторный симплекс  $[n]$  в множества  $X_n$  и  $\text{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, |X|)$  соответственно.

<sup>2</sup>Или *проективным* пределом.

<sup>3</sup>Или *инъективным* пределом.

коммутирующего со всеми стрелками диаграммы  $X$  набора стрелок  $\psi_\nu : Y \rightarrow X_\nu$ , выпущенных из произвольного объекта  $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , существует единственный морфизм  $\alpha : Y \rightarrow \lim X$ , такой что  $\psi_\nu = \pi_\nu \circ \alpha$  для всех  $\nu$ .

Двойственным образом, в копредел  $C = \text{colim } X$  диаграммы  $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$  ведёт канонический набор таких коммутирующих со всеми стрелками диаграммы  $X$  морфизмов  $\iota_\nu : X_\nu \rightarrow \text{colim } X$ , что для любых перестановочных со всеми стрелками диаграммы  $X$  морфизмов  $\psi_\nu : X_\nu \rightarrow Y$  в произвольный объект  $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$  существует единственный морфизм  $\beta : \text{colim } X_\nu \rightarrow Y$ , такой что  $\psi_\nu = \beta \circ \iota_\nu$  для всех  $\nu$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 2.13.** Проверьте, что универсальные свойства задают предел и копредел однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со всеми каноническими стрелками  $\pi_\nu$  и  $\iota_\nu$  соответственно.

**ПРИМЕР 2.7 (начальный, конечный и нулевой объекты)**

Простейшая диаграмма — пустая. Её предел  $\text{Fin}$  называется *конечным*, а копредел  $\text{Og}$  — *начальным* объектами категории. Эти объекты однозначно с точностью до единственного изоморфизма определяются тем, что для любого  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  есть единственная стрелка  $X \rightarrow \text{Fin}$  и единственная стрелка  $\text{Og} \rightarrow X$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 2.14.** Укажите начальный и конечный объекты в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом.

Если в категории имеется объект  $0$ , являющийся одновременно и начальным, и конечным, то этот объект называется *нулевым*. Морфизм  $X \rightarrow Y$  в категории с нулевым объектом называется *нулевым*, если он разлагается<sup>1</sup> в композицию  $X \rightarrow 0 \rightarrow Y$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 2.15.** Какие категории из [упр. 2.14](#) обладают нулевым объектом?

**ПРИМЕР 2.8 (прямые (ко) произведения)**

Малая категория  $\mathcal{N}$  называется *дискретной*, если все её морфизмы исчерпываются тождественными морфизмами  $\text{Id}_\nu$ , с  $\nu \in \text{Ob } \mathcal{N}$ . Соответствующие *дискретные диаграммы*  $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$  — это семейства объектов  $X_\nu$  без стрелок между ними. Пределы и копределы таких диаграмм называются *прямыми произведениями* и *копроизведениями* и обозначаются, соответственно, через  $\prod_\nu X_\nu$  и  $\coprod_\nu X_\nu$ . Когда индексов всего два, мы получаем прямые (ко) произведения двух объектов из [прим. 1.14](#) и [прим. 1.15](#) на стр. 17. Очевидная индукция показывает, что для существования всех конечных прямых (ко) произведений достаточно существования прямых (ко) произведений любых двух объектов.

**ПРИМЕР 2.9 ((ко) уравнители)**

(Ко)предел диаграммы вида  $X \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ \xrightarrow{\psi} \end{array} Y$  называется *(ко)уравнителем*<sup>2</sup> стрелок  $\varphi$  и  $\psi$ . В

категории множеств уравнитель представляет собою множество решений уравнения  $\varphi(x) = \psi(x)$  на  $x \in X$  или, более научно, прообраз диагонали  $\Delta_Y \subset Y \times Y$  при каноническом отображении  $\varphi \times \psi : X \rightarrow Y \times Y$ . Коуравнитель является фактором множества  $Y$

<sup>1</sup>Обратите внимание, что если такое разложение существует, то оно единственно.

<sup>2</sup>По-английски *(co)equalizer*.

по наименьшему отношению эквивалентности<sup>1</sup>  $R \subset Y \times Y$ , содержащему образ отображения  $\varphi \times \psi$ , т. е. все отождествления  $\varphi(x) = \psi(x)$  с  $x \in X$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.16. Проверьте это и постройте (ко) уравнители любой пары стрелок в категориях топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным коммутативным кольцом.

Например, (ко) ядро гомоморфизма  $f : A \rightarrow B$  в категории  $\mathcal{A}b$  абелевых групп это (ко) уравнитель  $f$  и нулевого морфизма. Интуитивно, уравнители позволяют задавать «подобъекты» при помощи «уравнений», а коуравнители — «фактор объекты» при помощи «соотношений».

ПРИМЕР 2.10 (ПОСЛОЙНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ)

Предел диаграммы вида

$$X \xrightarrow{\xi} B \xleftarrow{\eta} Y$$

называется *послойным*<sup>2</sup> *произведением* и обозначается  $X \times_B Y$ . Он включается в коммутативный декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} X \times_B Y & \xrightarrow{\psi} & Y \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow{\xi} & B \end{array} \quad (2-12)$$

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\psi'} & Y \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow{\xi} & B \end{array}$$

имеется единственный такой морфизм  $\varphi' \times \psi' : Z \rightarrow X \times_B Y$ , что  $\varphi' = \varphi \circ (\varphi' \times \psi')$  и  $\psi' = \psi \circ (\varphi' \times \psi')$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.17. Убедитесь, что левый верхний угол диаграммы (2-12) задаётся этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с  $\varphi$  и  $\psi$ .

<sup>1</sup>Напомним, что *отношение эквивалентности* на  $Y$  это подмножество  $R \subset Y \times Y$ , которое *рефлексивно* (содержит диагональ  $\Delta_Y$ ), *симметрично* (переходит в себя при транспозиции сомножителей) и *транзитивно* (т. е.  $(y_1, y_2), (y_2, y_3) \in R \Rightarrow (y_1, y_3) \in R$ ). Пересечение отношений эквивалентности является отношением эквивалентности. Поэтому любое подмножество  $S \subset Y \times Y$  содержится в единственном минимальном по включению отношении эквивалентности  $R_S$ , которое называется *порождённым* подмножеством  $S$ . Всякое отображение  $\xi : Y \rightarrow Z$  определяет отношение эквивалентности  $R_\xi = \{(y_1, y_2) \mid \xi(y_1) = \xi(y_2)\}$  на  $Y$ , причём  $\xi' : Y \rightarrow Z'$  тогда и только тогда представляется в виде композиции  $\xi' = \eta \circ \xi$  с некоторой стрелкой  $\eta : Z \rightarrow Z'$ , когда  $R_\xi \subset R_{\xi'}$ , т. е. когда эквивалентность, отвечающая  $\xi$ , *влечёт* эквивалентность, отвечающую  $\xi'$  (в этом случае говорят, что первая эквивалентность *тоньше* или *сильнее*, а вторая — *грубее* или *слабее*).

<sup>2</sup>Или *расслоенным*.

В категории множеств отображение  $X \times_B Y \rightarrow B$  имеет в качестве слоя над произвольной точкой  $b \in B$  прямое произведение слоёв  $\varphi^{-1}(b) \times \psi^{-1}(b)$ , отсюда и название.

УПРАЖНЕНИЕ 2.18. Убедитесь, что  $U \times_X V = U \cap V$  в категории  $\mathcal{U}(X)$  открытых подмножеств топологического пространства  $X$ .

ПРИМЕР 2.11 (послойные копроизведения)

Оборачивая все стрелки в предыдущем примере, назовём *послойным копроизведением*  $X \otimes_B Y$  копредел диаграммы  $X \xleftarrow{\xi} B \xrightarrow{\eta} Y$ . Он вписывается в коммутативный кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\eta} & Y \\ \xi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X & \xrightarrow{\varphi} & X \otimes_B Y \end{array} \quad (2-13)$$

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\eta} & Y \\ \xi \downarrow & & \downarrow \psi' \\ X & \xrightarrow{\varphi'} & Z \end{array}$$

существует единственный такой морфизм  $\varphi' \otimes \psi' : X \otimes_B Y \rightarrow Z$ , что  $\varphi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \varphi$  и  $\psi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \psi$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.19. Явно опишите послойные (ко) произведения в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп<sup>1</sup>, коммутативных колец с единицей и модулей над коммутативным кольцом.

**2.3.1. (Ко) замкнутость.** Категория  $\mathcal{C}$  называется (ко) замкнутой, если для любой малой категории  $\mathcal{N}$  каждая диаграмма  $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$  имеет (ко) предел в  $\mathcal{C}$ . Мы будем называть категорию *полной*, если она одновременно замкнута и козамкнута.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4

Для замкнутости категории  $\mathcal{C}$  достаточно существования в  $\mathcal{C}$  конечного объекта, прямых произведений любых множеств объектов и уравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом, а для козамкнутости — существования в  $\mathcal{C}$  начального объекта, прямых копроизведений любых множеств объектов и коуравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом.

Доказательство. Мы построим предел произвольной диаграммы  $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ , копредел строится аналогично путём обращения стрелок. Надо предъявить универсальный набор морфизмов  $\varphi_\nu : L \rightarrow X_\nu$ , решающий уравнения  $\varphi_\mu = X(\nu \rightarrow \mu) \circ \varphi_\nu$ , где  $\nu \rightarrow \mu$  пробегает  $\text{Mor } \mathcal{N}$ . Для каждой стрелки  $\nu \rightarrow \mu$  обозначим через  $T_{\nu \rightarrow \mu} = X_\mu$  тот объект диаграммы  $X$ , в который ведёт эта стрелка, и образуем два произведения  $A = \prod_\mu X_\mu$  и

<sup>1</sup>В теории групп копроизведения традиционно называются *амальгамами*.

$B = \prod_{\nu \rightarrow \mu} T_{\nu \rightarrow \mu}$ . В первое из них каждый объект диаграммы  $X$  входит ровно один раз, а во второе — столько раз, сколько стрелок в нём заканчивается. Для каждой стрелки  $\mu \rightarrow \nu$  имеются два отображения  $A \rightarrow T_{\nu \rightarrow \mu}$ : проекция  $\pi_\mu : A \rightarrow X_\mu$  произведения  $A$  на  $\mu$ -тый сомножитель и композиция  $\kappa_{\nu \rightarrow \mu} = X(\nu \rightarrow \mu) \circ \pi_\nu$  проекции  $\pi_\nu : A \rightarrow X_\nu$  произведения  $A$  на  $\nu$ -тый сомножитель со стрелкой  $X(\nu \rightarrow \mu) : X_\nu \rightarrow X_\mu$  диаграммы  $X$ . По универсальному свойству произведения  $B$  эти пары отображений задают два морфизма  $\pi, \kappa : A \rightarrow B$ . Их уравниватель  $L$  приходит вместе с морфизмом  $\varphi : L \rightarrow A$ , который представляет собою набор стрелок  $\varphi_\mu = \pi_\mu \circ \varphi$ , удовлетворяющих равенствам

$$\varphi_\mu = \pi_\mu \circ \varphi = \kappa_{\nu \rightarrow \mu} \circ \varphi = X(\nu \rightarrow \mu) \circ \varphi_\nu$$

и обладающих требуемым универсальным свойством (убедитесь в этом!).  $\square$

### ПРИМЕР 2.12

В категории множеств  $\lim X$  изоморфен подмножеству прямого произведения  $\prod X_\nu$ , образованному такими семействами  $(x_\nu)$ ,  $\nu \in \text{Ob } \mathcal{N}$ ,  $x_\nu \in X_\nu$ , где  $x_\mu = X(\nu \rightarrow \mu)x_\nu$  для всех стрелок  $\nu \rightarrow \mu$  из  $\text{Mor } \mathcal{N}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.20. Проверьте, что  $\text{colim } X$  изоморфен коуравнителю диаграммы

$$\prod_{\nu \rightarrow \mu} S_{\nu \rightarrow \mu} \xrightarrow[\kappa]{\iota} \prod_\nu X_\nu,$$

в которой объекты  $S_{\nu \rightarrow \mu} = X_\nu$  суть начала стрелок  $X(\nu \rightarrow \mu)$  диаграммы  $X$ , а морфизмы задаются семействами стрелок

$$\iota_\nu : S_{\nu \rightarrow \mu} \rightarrow \prod_\nu X_\nu \quad \text{и} \quad \kappa_{\nu \rightarrow \mu} = \iota_\mu \circ X(\nu \rightarrow \mu) : S_{\nu \rightarrow \mu} \rightarrow \prod_\nu X_\nu.$$

В частности, убедитесь, что в категории множеств  $\text{colim } X$  является фактором дизъюнктного объединения  $\bigsqcup_\nu X_\nu$  по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему отождествления  $x \sim X(\nu \rightarrow \mu)x$  для всех  $x \in X_\nu$  и всех стрелок  $\nu \rightarrow \mu$  из  $\text{Mor } \mathcal{N}$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Для того, чтобы в категории существовали (ко) пределы всех конечных диаграмм, в условиях предл. 2.4 достаточно потребовать существования (ко) произведения любых двух объектов.

### СЛЕДСТВИЕ 2.2

Категории множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом полны.

Доказательство. Сделайте упр. 2.16.  $\square$

ПРИМЕР 2.13 (УТОЧНЁННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПУЧКА)

Объединение  $U = \bigcup_i U_i$  произвольного семейства  $\{U_i\}_{i \in I}$  открытых множеств топологического пространства  $X$  представляет собою коуравнитель отображений

$$\prod_{ij} U_i \cap U_j \xrightleftharpoons[\psi_2]{\psi_1} \prod_i U_i,$$

являющихся копроизведениями вложений  $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_i$  и  $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_j$ . Всякий предпучок  $F : \mathcal{U}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$  объектов любой категории  $\mathcal{C}$  переводит диаграмму коуравнителя

$$\prod_{ij} U_i \cap U_j \xrightleftharpoons[\psi_2]{\psi_1} \prod_i U_i \xrightarrow{\varphi} U, \quad (2-14)$$

в следующую диаграмму в категории  $\mathcal{C}$  :

$$F(U) \xrightarrow{\varphi^*} \prod_i F(U_i) \xrightleftharpoons[\psi_2^*]{\psi_1^*} \prod_{ij} F(U_i \cap U_j). \quad (2-15)$$

Стрелка  $\varphi^*$  этой диаграммы является произведением ограничений  $F(U) \rightarrow F(U_i)$ , а стрелки  $\psi_1^*$  и  $\psi_2^*$  — ограничений  $F(U_i) \rightarrow F(U_i \cap U_j)$  и  $F(U_j) \rightarrow F(U_i \cap U_j)$  соответственно. По определению, предпучок  $F$  является пучком, если стрелка  $\varphi$  является уравниателем стрелок  $\psi_1^*$  и  $\psi_2^*$ . В частности, когда множество индексов  $I = \emptyset$ , мы получаем в левом члене диаграммы (2-15) объект  $F(\emptyset) \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , а в среднем и правом членах — произведения пустых множеств объектов, т. е. пределы пустых диаграмм, канонически изоморфные конечному объекту<sup>1</sup>  $\text{Fin}_{\mathcal{C}}$  категории  $\mathcal{C}$ . Стрелки  $\psi_1^*$  и  $\psi_2^*$  являются в этом случае тождественными эндоморфизмами конечного объекта, и их уравниатель равен  $\text{Id}_{\text{Fin}_{\mathcal{C}}}$ . Таким образом, для любого пучка объектов произвольной категории  $\mathcal{C}$  на топологическом пространстве  $X$  должно выполняться равенство  $F(\emptyset) = \text{Fin}_{\mathcal{C}}$ . Например, для любого пучка множеств  $F : \mathcal{U}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$  множество  $F(\emptyset)$  состоит из одной точки, а для пучка абелевых групп  $F : \mathcal{U}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$  группа  $F(\emptyset) = 0$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5

Для существования конечного объекта в козамкнутой категории  $\mathcal{C}$  достаточно существования такого множества объектов  $S \subset \text{Ob } \mathcal{C}$ , чтобы из любого объекта категории  $\mathcal{C}$  вела хотя бы одна стрелка в хотя бы один объект из  $S$ .

Доказательство. Рассмотрим прямое копроизведение  $C = \prod_{X \in S} X$  всех объектов из  $S$  и обозначим через  $F$  коуравнитель всех его эндоморфизмов. Он приходит вместе с таким эпиморфизмом<sup>2</sup>  $\pi : C \rightarrow F$ , что  $\pi\psi = \pi$  для всех  $\psi \in \text{End } C$ . Рассмотрим произвольный объект  $Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ . Из него ведёт стрелка в некоторый  $X \in S$ . Беря её композицию с канонической стрелкой  $X \rightarrow C$  и проекцией  $C \rightarrow F$ , получаем стрелку  $Z \rightarrow F$ .

<sup>1</sup>Тем самым, для того чтобы предпучок  $F$  был пучком, необходимо, чтобы в категории  $\mathcal{C}$  был конечный объект (см. прим. 2.7 на стр. 27).

<sup>2</sup>Ибо из универсального свойства коуравнителя равенство  $\varphi_1\pi = \varphi_2\pi$  возможно только при  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

Пусть имеются две стрелки  $\alpha, \beta : Z \rightarrow F$  с коравнителем  $\kappa : F \rightarrow Q$ . Рассмотрим какую-нибудь стрелку<sup>1</sup>  $\gamma : Q \rightarrow C$ . В диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{\alpha} & F & \xrightarrow{\kappa} & Q \\ & \xrightarrow{\beta} & & & \\ & & \uparrow \pi & \swarrow \gamma & \\ & & C & & \end{array}$$

композиция  $\gamma\pi \in \text{End } C$  удовлетворяет равенству  $\pi\gamma\pi = \pi$ . Сокращая справа на эпиморфизм  $\pi$ , заключаем, что  $\pi\gamma = \text{Id}_C$ . Умножая обе части равенства  $\kappa\alpha = \kappa\beta$  слева на  $\pi\gamma$ , получаем  $\alpha = \beta$ .  $\square$

**УПРАЖНЕНИЕ 2.21.** Докажите двойственный критерий существования начального объекта в замкнутой категории.

**ПРИМЕР 2.14 (КОЗАМКНУТАЯ КАТЕГОРИЯ БЕЗ КОНЕЧНОГО ОБЪЕКТА)**

Классы изоморфных вполне упорядоченных множеств образуют категорию ординалов  $\text{Ord}$ , морфизмами в которой являются включения меньшего ординала в больший в качестве начального интервала. Эта категория козамкнута: начальным объектом служит  $\emptyset$ , коравнителем и копроизведением любого множества ординалов является их точная верхняя грань — класс объединения, взятого в любом большем ординале, содержащем все ординалы из рассматриваемого множества в качестве начальных интервалов. Однако ординала, содержащего все ординалы, нет.

**2.3.2. Фильтрующиеся диаграммы.** Малая категория  $\mathcal{F}$  называется *фильтрующейся*, если из любых двух её объектов выходят стрелки с общим концом и для любых двух стрелок  $\varphi, \psi$  с общими началом и концом из их конца ведёт такая стрелка  $\zeta$ , что  $\zeta\varphi = \zeta\psi$ . Например, любой чум, в котором у каждого двух элементов есть общая верхняя грань, является фильтрующейся категорией<sup>2</sup>. Диаграммы вида  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$  и  $\mathcal{F}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$  с фильтрующейся категорией  $\mathcal{F}$  принято называть, соответственно, *индуктивными* (или *прямыми*) и *проективными* (или *обратными*) системами стрелок категории  $\mathcal{C}$ .

**ПРИМЕР 2.15 (РАЗБИЕНИЯ ОТРЕЗКА)**

Конечные наборы точек  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$ , разбивающие отрезок  $[0, 1]$  на непересекающиеся интервалы, как в определении интеграла Римана, образуют прямую систему в категории<sup>3</sup>  $\nabla_{\text{big}}$  относительно морфизмов включения

$$\{0, x_1, \dots, x_n, 1\} \hookrightarrow \{0, x'_1, \dots, x'_m, 1\}, \quad (2-16)$$

отвечающих добавлениям новых точек в разбиение. Копределом этой системы в категории всех (не обязательно конечных) упорядоченных множеств с отмеченными максимальным и минимальным элементами является  $[0, 1]$ . В категории  $\nabla_{\text{big}}$  копредела не существует.

Двойственным образом, упорядоченное слева направо множество полуинтервалов  $I_\nu = [x_\nu, x_{\nu+1})$  разбиения  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$  является объектом категории упорядоченных множеств<sup>4</sup>  $\Delta_{\text{big}}$  и измельчению разбиения (2-16)

<sup>1</sup>Например, композицию произвольной стрелки  $Z \rightarrow X$  с канонической стрелкой  $X \rightarrow C$ .

<sup>2</sup>Ср. с прим. 1.2 на стр. 4.

<sup>3</sup>См. прим. 1.10 на стр. 11.

<sup>4</sup>См. прим. 1.4 на стр. 5.



отвечает идущий в противоположную сторону морфизм

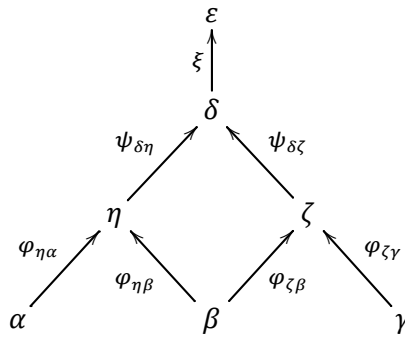
$$\{I_0, I_1, \dots, I_n\} \leftrightarrow \{I'_0, I'_1, \dots, I'_m\}, \quad (2-17)$$

отображающий каждый полуинтервал из правого множества в содержащий его полуинтервал из левого множества. Эти морфизмы образуют обратную систему в  $\Delta_{\text{big}}$ , которая не имеет предела в  $\Delta_{\text{big}}$ , а в категории всех упорядоченных множеств её пределом является полуинтервал  $[0, 1)$ .

#### Предложение 2.6

Копредел индуктивной системы множеств  $X : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}et$  изоморфен фактору дизъюнктного объединения  $\coprod_{v \in \text{Ob } \mathcal{F}} X_v$  по отношению эквивалентности, отождествляющему элементы  $x_v \in X_v$  и  $x_\mu \in X_\mu$ , если для некоторой пары стрелок  $v \rightarrow \eta \leftarrow \mu$  в множестве  $X_\eta$  выполняется равенство  $X(v \rightarrow \eta)x_v = X(\mu \rightarrow \eta)x_\mu$ .

Доказательство. Согласно [упр. 2.20](#) копредел  $\text{colim } X$  является фактором дизъюнктного объединения  $\coprod_{v \in \text{Ob } \mathcal{F}} X_v$  по наименьшему отношению эквивалентности, обеспечивающему равенства  $x = X(v \rightarrow \mu)x$  для всех стрелок  $v \rightarrow \mu$  из  $\text{Mor } \mathcal{F}$  и всех  $x \in X_v$ . При этом элементы  $x_v \in X_v$  и  $x_\mu \in X_\mu$  заведомо отождествляются, если  $X(v \rightarrow \eta)x_v = X(\mu \rightarrow \eta)x_\mu$  для некоторой пары стрелок  $v \rightarrow \eta \leftarrow \mu$ . Таким образом, достаточно убедиться, что описанное в предложении отношение является эквивалентностью. Рефлексивность и симметричность очевидны. Докажем транзитивность. Если  $x_\alpha$  эквивалентен  $x_\beta$ , а  $x_\beta$  эквивалентен  $x_\gamma$ , то в категории  $\mathcal{F}$  имеется диаграмма<sup>1</sup> из таких стрелок



что  $X(\varphi_{\eta\alpha})x_\alpha = X(\varphi_{\eta\alpha})x_\beta$  и  $X(\varphi_{z\beta})x_\beta = X(\varphi_{z\gamma})x_\gamma$  в категории  $\mathcal{S}et$ , а  $\xi\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\beta} = \xi\psi_{\delta z}\varphi_{z\beta}$  в  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\beta, \xi)$ . Обозначая стрелку из последнего равенства через  $\kappa$ , имеем

$$X(\varepsilon\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\alpha})x_\alpha = X(\kappa)x_\beta = X(\varepsilon\psi_{\delta z}\varphi_{z\gamma})x_\gamma,$$

что и требовалось. □

<sup>1</sup>Не обязательно коммутативная!

УПРАЖНЕНИЕ 2.22. Покажите, что копредел фильтрующей диаграммы абелевых групп  $A : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{Ab}$  как множество совпадает с копределом диаграммы подлежащих этим группам множеств и является фактором прямой суммы  $\bigoplus_{v \in \text{Ob } \mathcal{N}} A_v$  по подгруппе, образованной всеми конечными суммами  $\sum_{v \in N} a_v$ ,  $N \subset \text{Ob } \mathcal{N}$ ,  $a_v \in A_v$ , для которых в диаграмме  $A$  найдётся группа  $A_\mu$  и стрелки  $\varphi_v : A_v \rightarrow A_\mu$ , по одной для каждого  $v \in N$ , со свойством  $\sum_{v \in N} \varphi(a_v) = 0$  в  $A_\mu$ .

ПРИМЕР 2.16 (ОТКРЫТЫЕ ОКРЕСТНОСТИ И СЛОЙ ПРЕДПУЧКА)

Множество открытых окрестностей любого подмножества  $Z \subset X$  топологического пространства  $X$  является проективной системой в категории  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$  открытых подмножеств в  $X$ , т. к. для любых окрестностей  $U, W \supset Z$  окрестность  $U \cap W = U \times_X W \supset Z$  вкладывается и в окрестность  $U$ , и в окрестность  $W$ . Пределом этой системы в категории  $\mathcal{S}et$  является пересечение всех открытых окрестностей  $Z$ . В категории  $\mathcal{U}$  предела может и не быть. Для любого предпучка  $F : \mathcal{U}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}et$  множества сечений  $F(U)$  над открытыми окрестностями  $U$  произвольно заданного подмножества  $Z \subset X$  образуют индуктивную систему в  $\mathcal{S}et$ . Её копредел называется *слоем* предпучка  $F$  над  $Z$  и обозначается  $F_Z$ . В силу козамкнутости категории  $\mathcal{S}et$  этот копредел всегда существует. Согласно [предл. 2.6](#), каждый элемент слоя  $F_Z$  представляет собою класс  $s|_Z$  некоторого сечения  $s \in F(U)$  над каким-либо открытым множеством  $U \supset Z$  по модулю эквивалентности, отождествляющей сечения  $s \in F(U)$  и  $t \in F(W)$ , когда  $s|_V = t|_V$  над некоторым открытым  $V$ , таким что  $Z \subset V \subset U \cap W$ . Определённые таким образом классы  $s|_Z$  называются *ростками сечений* предпучка  $F$  над  $Z$ . В частности, когда  $Z = \{x\}$  это одна точка, слой  $F_x$  называется *слоем  $F$  в точке  $x$* . Отметим, что *росток* локальной функции  $f \in F(U)$  в слое  $F_x$  над точкой  $x \in U$  не следует путать со значением  $f(x)$  этой функции в точке  $x$ . Во-первых, они лежат в разных множествах. Во-вторых, равенство ростков двух функций означает равенство их значений в некоторой открытой окрестности точки  $x$ , что обычно гораздо сильнее, чем равенство значений лишь в самой точке  $x$ .

ПРИМЕР 2.17 (ЛОКАЛИЗАЦИЯ КОЛЬЦА)

Пусть подмножество  $S$  ассоциативного (но не обязательно коммутативного) кольца  $R$  с единицей таково, что  $1 \in S$  и  $st \in S$  для всех  $s, t \in S$ . Пусть, кроме того, выполняются следующие *левые условия Ore*<sup>1</sup>:

$$\forall \varrho \in R, \forall s \in S \quad \exists \lambda \in R, \exists t \in S : \lambda s = t\varrho \quad (\text{LO}_1)$$

$$\forall \varphi, \psi \in R \quad \text{из } \exists s \in S : \varphi s = \psi s \quad \text{следует, что } \exists t \in S : t\varphi = t\psi. \quad (\text{LO}_2)$$

Превратим множество  $S$  в категорию, полагая  $\text{Hom}_S(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in R \mid \lambda s = t\}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.23. Выведите из условий Ore, что категория  $S$  фильтрующаяся.

Рассмотрим в категории правых  $R$ -модулей фильтрующуюся диаграмму  $S \rightarrow \mathcal{M}od\text{-}R$ , образованную свободными модулями  $s^{-1}R$  ранга один, где символом  $s^{-1}$  обозначен базисный вектор того модуля, который отвечает объекту  $s \in S$ , и  $R$ -линейными отображениями  $\lambda_* : s_1^{-1}R \rightarrow s_2^{-1}R$ , которые отвечают стрелкам  $\lambda \in \text{Hom}_S(s_1, s_2)$  и действуют на базисный вектор по правилу  $s_1^{-1} \mapsto s_2^{-1}\lambda$ . Копредел этой диаграммы в категории

<sup>1</sup>В коммутативном кольце  $R$  эти условия всегда выполнены.

$Mod\text{-}R$  состоит из классов  $s^{-1}\varrho$ , где  $s \in S$ ,  $\varrho \in R$ , по модулю равенств  $s_1^{-1}\varrho_1 = s_2^{-1}\varrho_2$ , означающих существование таких  $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ , что  $\lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$  и  $\lambda_1 \varrho_1 = \lambda_2 \varrho_2 \in R$ . Классы  $s^{-1}\varrho$  называются *левыми дробями* со знаменателями в  $S$ . Они образуют правый  $R$ -модуль, обозначаемый  $S^{-1}R$  и именуемый *левой локализацией* кольца  $R$  относительно мультипликативной системы  $Ore\ S$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.24. Чему равна сумма  $s_1^{-1}\varrho_1 + s_2^{-1}\varrho_2$  в модуле  $S^{-1}R$ ?

Определим *произведение* левых дробей  $s_1^{-1}\varrho_1$  и  $s_2^{-1}\varrho_2$  следующим образом. Пользуясь условием  $(LO_1)$  подберём такие  $\lambda_1 \in R$  и  $t_2 \in S$ , что  $t_2 \varrho_1 = \lambda_1 s_2$ , и положим

$$s_1^{-1}\varrho_1 \cdot s_2^{-1}\varrho_2 \stackrel{\text{def}}{=} (t_2 s_1)^{-1}(\lambda_1 \varrho_2).$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.25. Проверьте, что это определение корректно<sup>2</sup> и задаёт на модуле  $S^{-1}R$  структуру ассоциативного кольца с единицей. Убедитесь, что для коммутативного кольца  $R$  кольцо дробей  $S^{-1}R$  изоморфно известному из курса алгебры<sup>3</sup> кольцу частных  $a/s$ , где  $a \in R$ ,  $s \in S$ , и  $a_1/s_1 = a_2/s_2$  если и только если  $\exists s \in S : s \cdot (a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$  в  $R$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.26. Для мультипликативного подмножества  $S \subset R$ , удовлетворяющего *правым условиям Ore*

$$\forall \lambda \in R, \forall t \in S \quad \exists \varrho \in R, \exists s \in S : \lambda s = t \varrho \quad (RO_1)$$

$$\forall \varphi, \psi \in R \quad \text{из} \quad \exists t \in S : t \varphi = t \psi \quad \text{следует, что} \quad \exists s \in S : \varphi s = \psi s, \quad (RO_2)$$

постройте кольцо правых дробей  $RS^{-1}$ , а если  $S$  удовлетворяют одновременно и левым и правым условиям Ore, установите канонический изоморфизм колец  $S^{-1}R \simeq RS^{-1}$ .

**2.4. Фунториальность (ко) пределов.** Равенства (2-11) и (2-10) со стр. 26, описывающие универсальные свойства копредела и предела диаграммы  $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{colim}, C) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})}(X, \overline{C})$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})}(\overline{C}, X) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \text{lim } X)$$

означают<sup>4</sup>, что для заданных малой категории  $\mathcal{N}$  и (ко)замкнутой категории  $\mathcal{C}$  копредел и предел являются, соответственно, левым и правым сопряжёнными к функтору  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ , переводящему каждый объект  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$  в постоянную диаграмму  $\overline{C}$ . В частности, предел и копредел задают функторы  $\text{lim}, \text{colim} : \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ .

Если не предполагать категорию  $\mathcal{C}$  (ко)замкнутой, то (ко)предел будет функториален на всех диаграммах, у которых он есть. Действие функторов  $\text{lim}$  и  $\text{colim}$  на естественные преобразования диаграмм определено даже в более общей ситуации: пусть диаграммы  $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$  и  $Y : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$  имеют пределы в категории  $\mathcal{C}$  и пусть заданы функтор  $\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  и естественное преобразование  $f : X \circ \tau \rightarrow Y$ , т. е. набор стрелок

<sup>1</sup>Это «политкорректная» запись интуитивно желаемого равенства  $\varrho_1 s_2^{-1} = t_2^{-1} \lambda_1$ .

<sup>2</sup>Т. е. результат умножения не зависит от выбора таких  $\lambda_1 \in R$  и  $t_2 \in S$ , что  $t_2 \varrho_1 = \lambda_1 s_2$ .

<sup>3</sup>См. <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-04.pdf>.

<sup>4</sup>См. предл. 2.1 на стр. 20.

$f_\mu : X_{\tau(\mu)} \rightarrow Y_\mu$ , по одной для каждого  $\mu \in \text{Ob } \mathcal{M}$ , перестановочных со всеми стрелками обеих диаграмм. Беря композиции этих стрелок с каноническими проекциями предела  $\lim X$  на элементы диаграммы  $X$ , получаем стрелки  $f_\mu \pi_{\tau(\mu)} : \lim X \rightarrow Y_\mu$ , перестановочные со стрелками диаграммы  $Y$ . По универсальному свойству предела  $\lim Y$  существует единственный морфизм  $\lim f : \lim X \rightarrow \lim Y$ , делающий коммутативными все диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \lim X & \xrightarrow{\pi_{\tau(\mu)}} & X_{\tau(\mu)} \\ \lim f \downarrow & & \downarrow f_\mu \\ \lim Y & \xrightarrow{\pi_\mu} & Y_\mu, \end{array} \quad (2-18)$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы из предела в элементы диаграммы. Двойственным образом, если существуют копределы  $\text{colim } X$  и  $\text{colim } Y$ , то любые функтор  $\tau : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  и естественное преобразование  $f : X \rightarrow Y \circ \tau$  задают единственный морфизм  $\text{colim } f : \text{colim } X \rightarrow \text{colim } Y$ , делающий коммутативными все диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X_\nu & \xrightarrow{t_\nu} & \text{colim } X \\ f_\nu \downarrow & & \downarrow \text{colim } f \\ Y_{\tau(\nu)} & \xrightarrow{t_{\tau(\nu)}} & \text{colim } Y, \end{array}$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы элементов диаграммы в копредел.

**ПРИМЕР 2.18** (полнота категории предпучков)

Если задана диаграмма  $F : \mathcal{N} \rightarrow \text{pSh}(\mathcal{U})$  предпучков множеств на малой категории  $\mathcal{U}$ , то над каждым объектом  $U \in \text{Ob } \mathcal{U}$  возникает диаграмма множеств  $F(U) : \mathcal{N} \rightarrow \text{Set}$ , вершинами которой служат множества сечений  $F_\nu(U)$  предпучков  $F_\nu$  диаграммы  $F$  над объектом  $U$  с отображениями, задающими действие стрелок диаграммы  $F$  над этим объектом. В силу функториальности (ко)предела множества  $L(U) \stackrel{\text{def}}{=} \lim F(U)$  и  $C(U) \stackrel{\text{def}}{=} \text{colim } F(U)$  ведут себя функториально по  $U$ , т. е. задают на  $\mathcal{U}$  предпучки множеств. Для любого предпучка  $F_\nu : \mathcal{U}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$  диаграммы  $F$  имеются канонические морфизмы предпучков  $L \rightarrow F_\nu$  и  $F_\nu \rightarrow C$ , действие которых над каждым объектом  $U \in \text{Ob } \mathcal{U}$  задаётся стрелками  $\lim F(U) \rightarrow F_\nu(U)$  и  $F_\nu(U) \rightarrow \text{colim } F(U)$  в категории  $\text{Set}$ . Универсальность последних в категории  $\text{Set}$  над каждым объектом  $U \in \text{Ob } \mathcal{U}$  влечёт универсальность первых в категории  $\text{pSh}(\mathcal{U})$ . Таким образом, категория  $\text{pSh}(\mathcal{U})$  предпучков множеств на малой категории  $\mathcal{U}$  замкнута и козамкнута.

**УПРАЖНЕНИЕ 2.27.** Покажите, что категория  $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A}b)$  ковариантных функторов из любой малой категории  $\mathcal{C}$  в абелевы группы тоже замкнута и козамкнута.

**2.4.1. Перестановочность функторов с (ко)пределами.** Скажем, что функтор  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  перестановочен с (ко)пределами, если для любого  $L \in \text{Ob } \mathcal{C}$  и любой диаграммы  $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$  из того, что  $L$  является (ко)пределом  $X$  в  $\mathcal{C}$ , вытекает, что  $F(L)$  является (ко)пределом диаграммы  $F \circ X$  в  $\mathcal{D}$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7

Если функтор  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  сопряжён слева к функтору  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ , то  $F$  перестановочен с копределами, а  $G$  — с пределами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу сопряжённости  $F$  и  $G$  имеем функториально по  $D \in \text{Ob } \mathcal{D}$ :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(\text{colim } X), D) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{colim } X, G(D)) \simeq \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})}(X, \overline{G(D)}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{D})}(F \circ X, \overline{D}). \end{aligned}$$

Тем самым,  $F(\text{colim } X) \simeq \text{colim}(F \circ X)$ . Рассуждение про пределы аналогично.  $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2.3

Пределы коммутируют с пределами, а копределы — с копределами всякий раз, когда они существуют. Более пространно, пусть задана диаграмма  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ , вершинами которой являются диаграммы  $F_{\mu} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ , по одной для каждого объекта  $\mu \in \text{Ob } \mathcal{M}$ , а стрелками — естественные преобразования  $F(\mu_1 \rightarrow \mu_2) : F_{\mu_1} \rightarrow F_{\mu_2}$ , по одному для каждой стрелки  $\mu_1 \rightarrow \mu_2$  из  $\text{Mor } \mathcal{M}$ , и пусть для каждого  $\mu \in \mathcal{M}$  диаграмма  $F_{\mu}$  имеет (ко)предел, а для каждого  $\nu \in \mathcal{N}$  имеет (ко)предел диаграмма  $F(\nu) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ , образованная объектами  $F_{\mu}(\nu)$  и стрелками  $F(\mu_1 \rightarrow \mu_2)_{\nu} : F_{\mu_1}(\nu) \rightarrow F_{\mu_2}(\nu)$ , задающими действие естественных преобразований  $F(\mu_1 \rightarrow \mu_2)$  над объектом  $\nu$ . Тогда

$$\lim_{\mu} \lim_{\nu} F_{\mu} \simeq \lim_{\nu} \lim_{\mu} F(\nu) \quad \text{и} \quad \text{colim}_{\mu} \text{colim}_{\nu} F_{\mu} \simeq \text{colim}_{\nu} \text{colim}_{\mu} F(\nu).$$

ПРИМЕР 2.19 (ядра и коядра в категории модулей)

В категории  $\text{Mod-}R$  правых модулей над кольцом  $R$  (ко)ядро морфизма  $R$ -модулей  $\varphi : A \rightarrow B$  является (ко)уравнителем  $\varphi$  с нулевым морфизмом из  $A$  в  $B$ . Следовательно, ядро и коядро являются функторами из категории диаграмм вида  $* \rightarrow *$  в категорию  $\text{Mod-}R$ , причём коядро коммутирует с копределами, а ядро — с пределами. В подробностях это звучит так. Пусть имеются две диаграммы правых  $R$ -модулей  $X, Y : \mathcal{N} \rightarrow \text{Mod-}R$  и гомоморфизмы  $f_{\nu} : X_{\nu} \rightarrow Y_{\nu}$ , задающие естественное преобразование этих диаграмм. В силу функториальности (ко)пределов возникают гомоморфизмы  $\lim f_{\nu} : \lim X \rightarrow \lim Y$  и  $\text{colim } f_{\nu} : \text{colim } X \rightarrow \text{colim } Y$ , а также диаграммы  $\ker f, \text{coker } f : \mathcal{N} \rightarrow \text{Mod-}R$ , элементами которых являются ядра и коядра гомоморфизмов  $f_{\nu}$ . Имеют место канонические изоморфизмы

$$\text{colim } \text{coker } f \simeq \text{coker } \text{colim } f \quad \text{и} \quad \lim \ker f \simeq \ker \lim f.$$

Каждый левый сопряжённый функтор со значениями в абелевых группах, будучи перестановочен с копределами, переводит коядра в коядра, а любой правый сопряжённый функтор переводит ядра в ядра.

Свойство функтора  $F$  сохранять ядра, т. е. наличие естественного по диаграмме  $A \rightarrow B$  изоморфизма  $\ker(FA \rightarrow FB) \simeq F \ker(A \rightarrow B)$ , называется *точностью слева*. Сохранение коядер, т. е. изоморфизм  $\text{coker}(FA \rightarrow FB) \simeq F \text{coker}(A \rightarrow B)$ , называется *точностью справа*. Таким образом, все левые сопряжённые функторы точны справа, а все правые — слева.

Например, ядра точны слева, а коядра — справа, т. е. в категории модулей со всякой коммутативной диаграммой с точными<sup>1</sup> строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & B_1 & \xrightarrow{\pi} & C_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & C_2 \longrightarrow 0 \end{array} \quad (2-19)$$

канонически связаны две точные последовательности

$$0 \rightarrow \ker \alpha \rightarrow \ker \beta \rightarrow \ker \gamma \quad \text{и} \quad \operatorname{coker} \alpha \rightarrow \operatorname{coker} \beta \rightarrow \operatorname{coker} \gamma \rightarrow 0. \quad (2-20)$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.28. Убедитесь, что на диаграмме (2-19) для любого  $\pi(b_1) \in \ker \gamma$  элемент  $\beta(b_1) \in A_2$  и что сопоставление  $\pi(b_1) \mapsto \beta(b_1) \pmod{\operatorname{im} \alpha}$  корректно задаёт гомоморфизм  $\delta : \ker \gamma \rightarrow \operatorname{coker} \alpha$  связывающий две последовательности (2-20) в одну длинную точную последовательность

$$0 \rightarrow \ker \alpha \rightarrow \ker \beta \rightarrow \ker \gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} \alpha \rightarrow \operatorname{coker} \beta \rightarrow \operatorname{coker} \gamma \rightarrow 0.$$

ПРИМЕР 2.20 (ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ И КОПРЕДСТАВИМЫЕ ФУНКТОРЫ)

Функтор  $* \otimes_R N : \mathcal{M}od\text{-}R \rightarrow \mathcal{A}b$ ,  $X \mapsto X \otimes_R N$ , задаваемый тензорным умножением правых модулей на фиксированный левый модуль  $N$ , сопряжён слева к копредставимому функтору<sup>2</sup>  $h^N : \mathcal{A}b \rightarrow \mathcal{M}od\text{-}R$ ,  $Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, Y)$ . Поэтому тензорное произведение перестановочно с копределами. В частности, оно точно справа, т. е. для любого гомоморфизма  $\varphi : A \rightarrow B$  коядро  $\operatorname{coker}(\varphi \otimes_R \operatorname{Id}_N : A \otimes_R B \rightarrow A \otimes_R B) \simeq \operatorname{coker}(\varphi) \otimes_S N$ . В свою очередь, каждый копредставимый функтор  $h^M : \mathcal{M}od\text{-}R \rightarrow \mathcal{A}b$ ,  $X \mapsto \operatorname{Hom}_R(M, X)$ , перестановочен с пределами и точен слева.

ПРИМЕР 2.21 (ПРЕДСТАВИМЫЕ ФУНКТОРЫ, ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИМ. 2.2 НА СТР. 20)

Поскольку каждый представимый функтор на категории абелевых групп

$$h_C : \mathcal{A}b^{\operatorname{op}} \rightarrow \mathcal{A}b, \quad X \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}b}(X, C),$$

является правым сопряжённым самому себе<sup>3</sup>, он переводит пределы в категории  $\mathcal{A}b^{\operatorname{op}}$ , т. е. копределы в категории  $\mathcal{A}b$ , в пределы. В частности, функтор  $h_C$  переводит коядра в ядра (контравариантные функторы, переводящие коядра в ядра, тоже называются *точными слева*).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8 (ТОЧНОСТЬ ФИЛЬТРУЮЩИХСЯ КОПРЕДЕЛОВ)

Для малой фильтрующейся категории  $\mathcal{N}$  и естественного преобразования  $f : X \rightarrow Y$  диаграмм  $X, Y : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{A}b$  абелевых групп имеется канонический изоморфизм

$$\operatorname{colim} \ker(f_v : X_v \rightarrow Y_v) \simeq \ker(\operatorname{colim} f : \operatorname{colim} X_v \rightarrow \operatorname{colim} Y_v). \quad (2-21)$$

<sup>1</sup>Это означает, что ядро каждой стрелки совпадает с образом предыдущей.

<sup>2</sup>См. предл. 2.3 на стр. 24.

<sup>3</sup>См. прим. 2.2 на стр. 20.

Иными словами, копредел фильтрующей диаграммы абелевых групп перестановочен не только с коядрами, но и с ядрами, т. е. задаёт точный функтор

$$\operatorname{colim} : \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{A}b) \rightarrow \mathcal{A}b, \quad X \mapsto \operatorname{colim} X.$$

Доказательство. Согласно [упр. 2.22](#) на стр. 34, копредел фильтрующей диаграммы  $Z : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{A}b$  является фактором прямой суммы  $\bigoplus Z_\nu$  по подгруппе, состоящей из всех конечных сумм  $\sum_{\nu \in N} x_\nu$ ,  $N \subset \operatorname{Ob} \mathcal{N}$ ,  $x_\nu \in X_\nu$ , для которых в диаграмме  $X$  найдётся группа  $X_\mu$  и стрелки  $\varphi_\nu : X_\nu \rightarrow X_\mu$ , по одной для каждого  $\nu \in N$ , со свойством  $\sum_{\nu \in N} \varphi(x_\nu) = 0$  в  $X_\mu$ . Предельная стрелка  $\operatorname{colim} f$  переводит класс  $[x] \in \operatorname{colim} X$  элемента  $x = \sum_{\nu \in N} x_\nu$  в класс  $[f(x)]$  элемента  $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu \in N} f_\nu(x_\nu)$  в фактор группе  $\operatorname{colim} Y$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.29. Убедитесь, что описание корректно.

Если  $[x] \in \ker \operatorname{colim} f$ , то в  $\mathcal{N}$  имеются такие стрелки  $\varphi_\nu : \nu \rightarrow \mu$  с общим концом  $\mu$ , по одной стрелке для каждого  $\nu \in N$ , что  $\sum_\nu Y\varphi_\nu(f_\nu(x_\nu)) = f_\mu(\sum_\nu X\varphi_\nu(x_\nu)) = 0$  в  $Y_\mu$ , т. е. класс суммы  $\sum_\nu X\varphi_\nu(x_\nu) \in X_\mu$  лежит в ядре  $\ker(f_\mu : X_\mu \rightarrow Y_\mu)$ . Сопоставление классу  $[x] \in \ker \operatorname{colim} f$  класса  $[\sum_\nu X\varphi_\nu(x_\nu)] \in \operatorname{colim} \ker f_\nu$  корректно задаёт гомоморфизм  $\ker \operatorname{colim} f \rightarrow \operatorname{colim} \ker f_\nu$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.30. Убедитесь, в этом.

Обратный гомоморфизм  $\operatorname{colim} \ker f_\nu \rightarrow \ker \operatorname{colim} f$  сопоставляет классу элемента  $x_\nu \in \ker f_\nu$  в фактор группе  $\operatorname{colim} \ker f_\nu$  класс того же самого элемента, но только в фактор группе  $\operatorname{colim} X_\nu$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 2.31. Убедитесь, что этот класс лежит в ядре предельного гомоморфизма  $\operatorname{colim} f$  и не зависит от выбора представителя  $x_\nu$  в классе up определение гомоморфизма  $\operatorname{colim} \ker f_\nu \rightarrow \ker \operatorname{colim} f$  корректно и этот гомоморфизм действительно обратен предыдущему.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9

В категории  $\mathcal{S}et$  копределы фильтрованных диаграмм перестановочны с конечными пределами.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любых двух фильтрованных диаграмм множеств  $X, Y : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{S}et$  имеется канонический изоморфизм

$$\operatorname{colim}(X_\nu \times Y_\nu) \simeq \operatorname{colim}(X_\nu) \times \operatorname{colim}(Y_\nu),$$

а для любых двух естественных преобразований  $f, g : X \rightarrow Y$  этих диаграмм и индуцированных ими отображений  $\operatorname{colim} f, \operatorname{colim} g : \operatorname{colim} X \rightarrow \operatorname{colim} Y$  имеется канонический изоморфизм  $\operatorname{colim} \operatorname{Eq}(f_\nu, g_\nu) \simeq \operatorname{Eq}(\operatorname{colim} f, \operatorname{colim} g)$ , где  $\operatorname{Eq}(\varphi, \psi)$  означает уравнитель стрелок  $\varphi$  и  $\psi$ . Первый изоморфизм переводит класс в  $\operatorname{colim}(X_\nu \times Y_\nu)$  пары  $(x_\nu, y_\nu)$  в пару классов  $([x_\nu], [y_\nu]) \in \operatorname{colim}(X_\nu) \times \operatorname{colim}(Y_\nu)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.32. Проверьте, что это отображение определено корректно и является биекцией.

Второй изоморфизм переводит класс в  $\text{colim Eq}(f_\nu, g_\nu)$  такого элемента  $x_\nu \in X_\nu$ , что  $f_\nu(x_\nu) = g_\nu(x_\nu)$  в  $Y_\nu$ , в класс этого же элемента в  $\text{colim } X$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.33. Проверьте, что последний класс лежит в  $\text{Eq}(\text{colim } f, \text{colim } g)$  и что таким образом получается корректно определённое и биективное отображение  $\text{colim Eq}(f_\nu, g_\nu) \rightarrow \text{Eq}(\text{colim } f, \text{colim } g)$ . □

#### Следствие 2.4

В категории  $\mathcal{S}et$  копредел инъективного (соотв. сюръективного или биективного) преобразования<sup>1</sup> фильтрованных диаграмм является инъективным (соотв. сюръективным или биективным) отображением копределов этих диаграмм.

**2.5. Существование сопряжённых функторов.** Если у функтора  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  есть правый сопряжённый функтор  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ , то  $F$  перестановочен с копределами, и для каждого  $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$  объект  $G(Y) \in \text{Ob } \mathcal{C}$  представляет предпучок<sup>2</sup>

$$h_Y^F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}et, X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y).$$

Тождественный эндоморфизм  $\text{Id}_{G(Y)} \in h_{G(Y)}(G(Y))$  переводится изоморфизмом функторов  $h_{G(Y)} \simeq h_Y^F$  в такую универсальную стрелку  $\kappa : FG(Y) \rightarrow Y$  из  $h_Y^F(G(Y))$ , что для любого  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  и любой стрелки  $\alpha : FX \rightarrow Y$  в категории  $\mathcal{D}$  найдётся единственная стрелка  $\varphi_\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ , делающая коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & FG(Y) & \\ & \uparrow & \searrow \kappa \\ F\varphi_\alpha & & Y \\ & \downarrow & \nearrow \alpha \\ & FX & \end{array} \quad (2-22)$$

Пары  $(X, \alpha : FX \rightarrow Y)$ , где  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , образуют категорию  $\mathcal{F}_Y$ , в которой морфизмами из  $(X_1, \alpha_1)$  в  $(X_2, \alpha_2)$  по определению являются такие стрелки  $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$  категории  $\mathcal{C}$ , для которых в категории  $\mathcal{D}$  коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & FX_2 & \\ & \uparrow & \searrow \alpha_2 \\ F\varphi & & Y \\ & \downarrow & \nearrow \alpha_1 \\ & FX_1 & \end{array}$$

Универсальная стрелка  $\kappa : FG(Y) \rightarrow Y$  в диаграмме (2-22) является конечным объектом категории  $\mathcal{F}_Y$ .

<sup>1</sup>По определению, это означает, что действие естественного преобразования над каждым объектом диаграммы инъективно (соотв. сюръективно или биективно).

<sup>2</sup>См. упр. 2.3 на стр. 21.



Упражнение 2.34. Покажите, что для козамкнутой категории  $\mathcal{C}$ , перестановочного с копределами функтора  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  и произвольного объекта  $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$  категория  $\mathcal{F}_Y$  тоже козамкнута.

Из этого упражнения и критерия существования конечного объекта в козамкнутой категории<sup>1</sup> получается следующий полезный критерий существования правого сопряжённого функтора:

ТЕОРЕМА 2.1

Функтор  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  из козамкнутой категории  $\mathcal{C}$  тогда и только тогда обладает правым сопряжённым, когда он перестановочен с копределами и для каждого  $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$  имеется такое множество  $S_Y$  пар  $(X, \alpha)$ ,  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ,  $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y)$ , что любая стрелка вида  $FZ \rightarrow Y$  в  $\mathcal{D}$  раскладывается для некоторой пары  $(X, \alpha) \in S_Y$  и стрелки  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$  в композицию  $FZ \xrightarrow{F\varphi} FX \xrightarrow{\alpha} Y$ .  $\square$

Упражнение 2.35. Докажите двойственный критерий: функтор  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  из замкнутой категории  $\mathcal{D}$  тогда и только тогда обладает левым сопряжённым, когда он перестановочен с пределами и для каждого  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  имеется такое множество  $S_X$  пар  $(Y, \beta)$ ,  $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ ,  $\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$ , что любая стрелка вида  $X \rightarrow GZ$  в  $\mathcal{C}$  раскладывается для некоторой пары  $(Y, \beta) \in S_X$  и стрелки  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$  в композицию  $X \xrightarrow{\beta} GY \xrightarrow{G\varphi} GZ$ .

<sup>1</sup>См. предл. 2.5 на стр. 31.

### §3. Абелевы категории

**3.1. Линейные категории.** Пусть  $R$  — произвольное кольцо с единицей. Категория  $\mathcal{L}$  называется  $R$ -линейной слева, если бифунктор  $\text{Hom}_{\mathcal{L}}(*, *)$  принимает значения в категории  $R\text{-Mod}$  левых  $R$ -модулей и все композиции

$$\text{Hom}(Y, Z) \times \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$$

билинейны над  $R$ . Например, сама категория  $R\text{-Mod}$   $R$ -линейна, категория векторных пространств над полем  $\mathbb{k}$  линейна над  $\mathbb{k}$ , а категория абелевых групп  $\mathbb{Z}$ -линейна. Всякая  $R$ -линейная категория автоматически  $\mathbb{Z}$ -линейна: каждое множество стрелок  $\text{Hom}(X, Y)$  в  $R$ -линейной категории является аддитивной абелевой группой, и сложение морфизмов дистрибутивно композиции:

$$(\varphi_1 + \varphi_2) \circ (\psi_1 + \psi_2) = \varphi_1 \circ \psi_1 + \varphi_1 \circ \psi_2 + \varphi_2 \circ \psi_1 + \varphi_2 \circ \psi_2.$$

Функтор между  $R$ -линейными категориями называется  $R$ -линейным, если он действует на стрелки  $R$ -линейными гомоморфизмами. Все функторы между  $R$ -линейными категориями далее будут по умолчанию предполагаться  $R$ -линейными.

**Предостережение 3.1.** Сложение морфизмов в (малой)  $K$ -линейной категории  $\mathcal{L}$  не следует путать с формальным сложением в алгебре  $K[\mathcal{L}]$  из [прим. 1.3](#) на стр. 4: даже на уровне множеств  $\text{Mor } \mathcal{L}$  и  $K[\mathcal{L}]$  — это разные множества.

**3.1.1. Прямые суммы.** Из равенства  $\varphi \circ 0 = \varphi \circ (0 + 0) = \varphi \circ 0 + \varphi \circ 0$  вытекает, что в  $R$ -линейной категории  $\varphi \circ 0 = 0$  для нулевого морфизма  $0 \in \text{Hom}(X, Y)$  и любой стрелки  $\varphi$  с началом в  $Y$ . По той же причине  $0 \circ \psi = 0$  для стрелок  $\psi$  с концом в  $X$ .

**Упражнение 3.1.** Докажите равносильность друг другу следующих трёх условий на эндоморфизм  $\varepsilon \in \text{Hom}(X, X)$  в  $R$ -линейной категории: а)  $\varepsilon = \text{Id}_X$  б)  $\varphi \circ \varepsilon = \varphi$  для всех стрелок  $\varphi$  с началом в  $X$  в)  $\varepsilon \circ \varphi = \varphi$  для всех стрелок  $\varphi$  с концом в  $X$  и проверьте, что мономорфность<sup>1</sup> (соотв. эпиморфность) произвольного морфизма означает, что он не является левым (соотв. правым) делителем нуля<sup>2</sup>.

**Предложение 3.1**

В  $R$ -линейной категории каждое произведение  $X \times Y$  является одновременно и копроизведением, а каждое копроизведение  $X \otimes Y$  — произведением, причём между каноническими морфизмами  $\pi_X, \pi_Y$  произведения в множители и каноническими морфизмами  $\iota_X, \iota_Y$  множителей в копроизведение выполняются соотношения:

$$\iota_X \pi_X + \iota_Y \pi_Y = \text{Id}, \quad \pi_X \iota_X = \text{Id}_X, \quad \pi_Y \iota_Y = \text{Id}_Y, \quad \pi_X \iota_Y = 0, \quad \pi_Y \iota_X = 0, \quad (3-1)$$

Наоборот, всякий объект  $X \oplus Y$ , включающийся в диаграмму вида

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota_X} \\ \xleftrightarrow{\pi_X} \\ \xleftarrow{\pi_X} \end{array} X \oplus Y \begin{array}{c} \xleftarrow{\iota_Y} \\ \xleftrightarrow{\pi_Y} \\ \xleftarrow{\pi_Y} \end{array} Y,$$

стрелки которой удовлетворяют соотношениям (3-1), является одновременно произведением и копроизведением объектов  $X$  и  $Y$ .

<sup>1</sup>См. н° 1.1.1 на стр. 5.

<sup>2</sup>Т. е.  $\varphi\psi = 0 \Rightarrow \psi = 0$  (соотв.  $\psi\varphi = 0 \Rightarrow \psi = 0$ ).

Доказательство. Пусть есть произведение  $X \times Y$ . Морфизмы  $\iota_X \stackrel{\text{def}}{=} \text{Id}_X \times 0 : X \rightarrow X \times Y$  и  $\iota_Y \stackrel{\text{def}}{=} 0 \times \text{Id}_Y : Y \rightarrow X \times Y$  включаются в коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Y \\ \pi_X \downarrow & \swarrow \iota_X & \uparrow 0 \\ X & \xleftarrow{\text{Id}_X} & X \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Y \\ \pi_X \downarrow & \swarrow \iota_Y & \uparrow \text{Id}_Y \\ X & \xleftarrow{0} & Y \end{array}$$

и удовлетворяют последним четырём соотношениям (3-1). Из них вытекает, что

$$\pi_X(\iota_X \pi_X + \iota_Y \pi_Y) = \pi_X \quad \text{и} \quad \pi_Y(\iota_X \pi_X + \iota_Y \pi_Y) = \pi_Y.$$

Но по универсальному свойству произведения существует ровно одна стрелка  $\varphi : X \times Y \rightarrow X \oplus Y$ , для которой  $\pi_X \varphi = \pi_X$  и  $\pi_Y \varphi = \pi_Y$ , и эта стрелка  $\varphi = \text{Id}_{X \times Y}$ . Поэтому первое соотношение из (3-1) тоже выполнено.

УПРАЖНЕНИЕ 3.2. Докажите соотношения (3-1) в случае, когда существует копроизведение  $X \otimes Y$ .

Из соотношений (3-1) следует, что для любой пары стрелок  $\alpha : X \rightarrow Z$  и  $\beta : Y \rightarrow Z$  стрелка  $\gamma : X \oplus Y \rightarrow Z$  со свойствами  $\gamma \iota_X = \alpha$  и  $\gamma \iota_Y = \beta$  единственна и равна  $\gamma = \gamma \circ \text{Id}_{X \oplus Y} = \gamma(\iota_X \pi_X + \iota_Y \pi_Y) = \alpha \pi_X + \beta \pi_Y$ , а для любой пары стрелок  $\alpha' : W \rightarrow X$  и  $\beta' : W \rightarrow Y$  стрелка  $\gamma' : W \rightarrow X \oplus Y$  со свойствами  $\pi_X \gamma' = \alpha'$  и  $\pi_Y \gamma' = \beta'$  также единственна и равна  $\gamma' = \text{Id}_{X \oplus Y} \circ \gamma' = (\iota_X \pi_X + \iota_Y \pi_Y) \gamma' = \iota_X \alpha' + \iota_Y \beta'$ .  $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1 (ПРЯМЫЕ СУММЫ)

Объект  $X \oplus Y$ , удовлетворяющий условиям предл. 3.1, называется *прямой суммой* объектов  $X$  и  $Y$ . Прямая сумма  $\mathcal{X} = X_1 \oplus \dots \oplus X_n$  любого конечного набора объектов определяется по индукции вместе с каноническими морфизмами

$$\iota_\nu : X_\nu \rightarrow \mathcal{X}, \quad \pi_\nu : \mathcal{X} \rightarrow X_\nu, \quad \varepsilon_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \iota_\nu \pi_\nu : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X},$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \pi_\nu \iota_\mu &= 0 \text{ при } \nu \neq \mu, & \pi_\nu \iota_\nu &= \text{Id}_{X_\nu}, \\ \varepsilon_\nu \varepsilon_\mu &= 0 \text{ при } \nu \neq \mu, & \varepsilon_\nu^2 &= \varepsilon_\nu, & \sum_\nu \varepsilon_\nu &= \text{Id}_{\mathcal{X}}, \end{aligned} \quad (3-2)$$

эквивалентным тому, что  $\mathcal{X} = X_1 \times \dots \times X_n = X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ .

ПРИМЕР 3.1 (МАТРИЧНЫЙ ФОРМАЛИЗМ)

Прямым вычислением с использованием соотношений (3-2) проверяется, что для конечных прямых сумм  $\mathcal{X} = \bigoplus_\nu X_\nu$  и  $\mathcal{Y} = \bigoplus_\mu Y_\mu$  в  $R$ -линейной категории имеется канонический изоморфизм  $R$ -модулей  $\text{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \simeq \bigoplus_{\mu, \nu} \text{Hom}(X_\nu, Y_\mu)$ , сопоставляющий мор-

физму  $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  матрицу  $\Phi = (\varphi_{\mu\nu})$  из морфизмов  $\varphi_{\mu\nu} = \pi_\mu \circ \varphi \circ \iota_\nu : X_\nu \rightarrow Y_\mu$ . Из матрицы  $\Phi$  морфизм  $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  восстанавливается по формуле  $\varphi = \sum_{\mu\nu} \iota_\mu \circ \varphi_{\mu\nu} \circ \pi_\nu$ .

При этом матрица композиции  $\varphi \circ \psi$  равна произведению матриц  $\Phi \cdot \Psi$ .

**3.1.2. Естественность сложения морфизмов.** Если в  $R$ -линейной категории  $\mathcal{L}$  есть прямые суммы  $X \oplus X$  и  $Y \oplus Y$ , то сложение в группе  $\text{Hom}(X, Y)$  канонически определяется композициями в категории  $\mathcal{L}$ , поскольку для любых стрелок  $\varphi, \psi : X \rightarrow Y$  коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi+\psi} & Y \\ \Delta_X \downarrow & & \uparrow \nabla_Y \\ X \oplus X & \xrightarrow{\varphi \oplus \psi} & Y \oplus Y \end{array} \quad (3-3)$$

в которой диагональный морфизм  $\Delta_X \stackrel{\text{def}}{=} \text{Id} \times \text{Id} : X \rightarrow X \times X$  и кодиагональный морфизм  $\nabla_Y \stackrel{\text{def}}{=} \text{Id} \otimes \text{Id} : Y \otimes Y \rightarrow Y$  канонически заданы универсальными свойствами произведения  $X \times X$  и копроизведения  $Y \otimes Y$ , а морфизм  $\varphi \oplus \psi : X \oplus X \rightarrow Y \oplus Y$  возникает, если имеется равенство  $X \times X = X \otimes X$  или равенство  $Y \otimes Y = Y \times Y$ , т. е. когда произведение  $X$  с собой одновременно является копроизведением, или копроизведение  $Y$  с собой одновременно является произведением. В первом случае два отображения  $X \rightarrow Y \otimes Y$ , задаваемые композициями  $\iota_1 \varphi$  и  $\iota_2 \psi$ , где  $\iota_{1,2} : Y \rightarrow Y \otimes Y$  суть вложения сомножителей в копроизведение, задают по универсальному свойству копроизведения  $X \otimes X$  морфизм  $X \otimes X \rightarrow Y \otimes Y$ , а во втором случае отображения  $X \times X \rightarrow Y$ , задаваемые композициями  $\varphi \pi_1$  и  $\psi \pi_2$ , где  $\pi_{1,2} : X \times X \rightarrow X$  суть проекции произведения на сомножители, задают морфизм  $X \times X \rightarrow Y \times Y$  по универсальному свойству произведения  $Y \times Y$ . Таким образом, диаграмма (3-3) канонически задаёт бинарную операцию на морфизмах в любой категории, где у каждого объекта есть прямое произведение с собой, одновременно являющееся и копроизведением. В  $R$ -линейной категории эта операция совпадает со сложением морфизмов.

УПРАЖНЕНИЕ 3.3. Убедитесь в последнем.

**3.1.3. Бесконечные (ко)произведения.** Копроизведение  $\coprod_v X_v$  бесконечного семейства объектов  $X_v$  в  $R$ -линейной категории обычно не совпадает с произведением  $\prod_v X_v$ . Так, в категории абелевых групп  $Ab$  произведение  $\prod_v X_v$  образовано всевозможными семействами векторов  $\{v_v\}$ ,  $v_v \in X_v$ , которые складываются покомпонентно, а копроизведение  $\coprod_v X_v \subset \prod_v X_v$  состоит из тех семейств  $\{v_v\}$ , в которых лишь конечное число элементов  $v_v \neq 0$ . В общей ситуации из универсальных свойств (ко)произведений вытекает существование естественных изоморфизмов

$$\text{Hom}\left(\prod_v X_v, Y\right) \simeq \prod_v \text{Hom}(X_v, Y) \quad \text{и} \quad \text{Hom}\left(Y, \prod_v X_v\right) = \prod_v \text{Hom}(Y, X_v). \quad (3-4)$$

Кроме того, для каждого  $i$  набор стрелок  $\pi_{vi} : X_i \rightarrow X_v$ , нулевых при  $v \neq i$  и тождественной для  $v = i$ , задаёт морфизмы  $\pi_i : \prod_v X_v \rightarrow X_i$ , такие что  $\pi_v \iota_v = \text{Id}_{X_v}$  при всех  $v$ , и  $\pi_v \iota_\mu = 0$  при  $\mu \neq v$ . Произведение стрелок  $\pi_v$  задаёт морфизм

$$\sigma : \prod_v X_v \rightarrow \prod_v X_v. \quad (3-5)$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.4. Убедитесь, что все  $\iota_v$  и  $\sigma$  инъективны, а  $\pi_v$  сюръективны.

Если все объекты  $X_\nu$  являются одинаковыми копиями одного объекта  $X$ , занумерованными элементами некоторого множества  $N$ , мы обозначаем их копроизведение через  $N \otimes X \stackrel{\text{def}}{=} \coprod_\nu X_\nu$ , а произведение — через  $X^N \stackrel{\text{def}}{=} \prod_\nu X_\nu$ .

**ПРИМЕР 3.2** (ПРЯМАЯ СУММА МОРФИЗМОВ)

Во всякой категории с (ко)произведениями любой набор морфизмов  $\gamma_\nu : X_\nu \rightarrow Y_\nu$  канонически задаёт морфизм произведений  $\prod X_\alpha \rightarrow \prod Y_\alpha$  и морфизм копроизведений  $\coprod X_\alpha \rightarrow \coprod Y_\alpha$ , которые отвечают, соответственно, наборам стрелок

$$\gamma_\nu \circ \pi_\nu : \prod X_\alpha \rightarrow Y_\nu \quad \text{и} \quad \iota_\nu \circ \gamma_\nu : X_\nu \rightarrow \coprod Y_\nu,$$

где  $\pi_\nu : \prod X_\alpha \rightarrow X_\nu$  и  $\iota_\nu : Y_\nu \rightarrow \coprod Y_\alpha$  — канонические морфизмы произведения в сомножители и сомножителей в копроизведение. Для конечных прямых сумм в  $R$ -линейных категориях эти два морфизма совпадают и называются *прямой суммой* морфизмов  $\gamma_\nu$ . Прямая сумма морфизмов обозначается  $\oplus \gamma_\nu$ . В терминах [прим. 3.1](#) она изображается диагональной матрицей со стрелками  $\gamma_\nu$  по диагонали и нулями в остальных местах.

**3.1.4. Ядра и коядра.** Напомню<sup>1</sup>, что объект  $0 \in \text{Ob } \mathcal{C}$  категории  $\mathcal{C}$  называется *нулевым*, если он одновременно начальный и конечный. Такой объект единствен с точностью до единственного изоморфизма (если существует).

Морфизм  $X \rightarrow Y$  в категории с нулевым объектом называется *нулевым*, если он распадается в композицию  $X \rightarrow 0 \rightarrow Y$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 3.5.** Убедитесь, что в  $R$ -линейной категории нулевой морфизм является нулевым элементом аддитивной группы  $\text{Hom}(X, Y)$  и наоборот.

Уравнитель и коуравнитель стрелки  $\varphi : X \rightarrow Y$  и нулевого морфизма называются, соответственно, *ядром* и *коядром* стрелки  $\varphi$  и обозначаются  $\ker \varphi$  и  $\text{coker } \varphi$ .

С ядром канонически связана универсальная стрелка  $\kappa : \ker \varphi \rightarrow X$ , которая аннулирует  $\varphi$  справа:  $\varphi \kappa = 0$ , и любая стрелка  $\psi$ , аннулирующая  $\varphi$  справа, однозначно представляется в виде  $\psi = \kappa \psi'$ . Универсальную стрелку  $\kappa$  мы тоже будем называть *ядром*. Она единственна с точностью до единственного изоморфизма, тождественно действующего на  $X$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 3.6.** Убедитесь, что если ядро существует, то оно мономорфно, и равенство  $\kappa = 0$  равносильно инъективности  $\varphi$ , а равенство  $\kappa = \text{Id}_X$  — тому, что  $\varphi = 0$ .

В  $\mathbb{Z}$ -линейной категории ядро представляет предпучок  $Z \mapsto \ker \varphi_*^Z$ , переводящий объект  $Z$  в ядро гомоморфизма абелевых групп  $\varphi_*^Z : \text{Hom}(Z, X) \rightarrow \text{Hom}(Z, Y)$ , который задаёт действие над  $Z$  естественного преобразования  $\varphi_* : h_X \rightarrow h_Y$  левого умножения на  $\varphi$ .

С коядром связана универсальная стрелка  $\zeta : Y \rightarrow \text{coker } \varphi$ , также называемая *коядром*. Она аннулирует  $\varphi$  слева:  $\zeta \varphi = 0$ , и любая стрелка  $\psi$ , аннулирующая  $\varphi$  слева однозначно представляется в виде  $\psi = \psi' \zeta$ . Стрелка  $\zeta$  единственна с точностью до

<sup>1</sup>См. [прим. 2.7](#) на стр. 27.

единственного изоморфизма, тождественно действующего на  $Y$ . В  $\mathbb{Z}$ -линейной категории коядро копредставляет функтор  $Z \mapsto \ker \varphi_Z^*$ , где  $\varphi_Z^* : \text{Hom}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$  задаёт действие над  $Z$  естественного преобразования  $\varphi^* : h^Y \rightarrow h^X$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.7. Убедитесь, что если коядро существует, то оно эпиморфно, и равенство  $\zeta = 0$  равносильно сюръективности  $\varphi$ , а равенство  $\zeta = \text{Id}_Y$  — тому, что  $\varphi = 0$ .

Ядро канонической стрелки  $\zeta : Y \rightarrow \text{coker } \varphi$  называется *образом* морфизма  $\varphi$  и обозначается  $\text{im } \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \ker \zeta$ . Коядро канонической стрелки  $\kappa : \ker \varphi \rightarrow X$  называется *кообразом*<sup>1</sup> морфизма  $\varphi$  и обозначается  $\text{coim } \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \text{coker } \kappa$ . Если морфизм  $\varphi : X \rightarrow Y$  имеет ядро, коядро, образ и кообраз, то в силу универсальных свойств двух последних

$$\text{Hom}(\text{coim } \varphi, \text{im } \varphi) \simeq \{\alpha : \text{coim } \varphi \rightarrow Y \mid \zeta \alpha = 0\} \simeq \{\beta : X \rightarrow Y \mid \zeta \beta = 0 \text{ и } \beta \kappa = 0\}.$$

Стрелка  $\bar{\varphi} : \text{coim } \varphi \rightarrow \text{im } \varphi$ , переводимая этими изоморфизмами в исходную стрелку  $\varphi : X \rightarrow Y$ , это единственный морфизм, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \text{coker } \varphi & \xleftarrow{\zeta} & Y & \xleftarrow{\kappa'} & \text{im } \varphi \\ & & \uparrow \varphi & & \uparrow \bar{\varphi} \\ \ker \varphi & \xrightarrow{\kappa} & X & \xrightarrow{\zeta'} & \text{coim } \varphi \end{array} \quad (3-6)$$

в которой  $\kappa, \kappa'$  — канонические морфизмы из ядер, а  $\zeta, \zeta'$  — в коядра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2

Диаграмма (3-6) называется *каноническим разложением* морфизма  $\varphi$ .

ПРИМЕР 3.3 (ФИЛЬТРОВАННЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ)

Рассмотрим категорию  $F\mathcal{A}b$ , объектами которой являются абелевы группы

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n,$$

профильтованные возрастающими подгруппами  $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ , а морфизмами — такие гомоморфизмы абелевых групп  $\varphi : A \rightarrow B$ , что  $\varphi(A_n) \subset B_n$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ . Эта категория аддитивна, и у каждого морфизма  $\varphi : A \rightarrow B$  есть ядро и коядро, которые как группы совпадают с ядром и коядром в  $\mathcal{A}b$  и наделены фильтрациями, индуцированными с  $A$  и  $B$ :  $\ker \varphi = \bigcup A'_n$ , где  $A'_n = A_n \cap \ker \varphi$ , и  $\text{coker } \varphi = \bigcup B'_n$ , где  $B'_n$  — образ подгруппы  $B_n \subset B$  в факторе  $B / \varphi(A)$ . Обозначим через  $A[1]$  фильтрованную группу с компонентами  $A[1]_p = A_{p+1}$ . Отображение  $s : A \rightarrow A[1]$ , тождественно действующее на элементы группы, является морфизмом фильтрованных групп и имеет нулевые ядро и коядро, т. е. одновременно инъективно и сюръективно, но не обратимо, если  $A \neq 0$ . В каноническом разложении (3-6) морфизма с стрелка  $\bar{s} = s$  тоже не изоморфизм:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longleftarrow & A[1] & \xleftarrow{\text{Id}_{A[1]}} & A[1] \\ & & \uparrow s & & \uparrow s \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\text{Id}_A} & A. \end{array}$$

<sup>1</sup>В категории модулей кообраз  $\varphi : X \rightarrow Y$  это фактор по ядру:  $\text{coim } \varphi = X / \ker \varphi$ .

**3.2. Абелевы категории.** Категория  $\mathcal{A}$  называется *аддитивной*, если она  $\mathbb{Z}$ -линейна, и в ней имеются нулевой объект и прямые суммы любых двух<sup>1</sup> объектов. Аддитивная категория  $\mathcal{A}$  называется *абелевой*, если любая стрелка  $\varphi$  в ней имеет ядро и коядро, причём канонический морфизм  $\bar{\varphi}$  в её разложении (3-6) является изоморфизмом, т. е. образ любого морфизма канонически изоморфен его кообразу<sup>2</sup>. Отождествляя кообраз с образом при помощи этого изоморфизма, мы получаем для каждой стрелки  $\varphi : X \rightarrow Y$  *пятичленное разложение*

$$\ker \varphi \xrightarrow{\kappa} X \xrightarrow{\zeta'} \operatorname{im} \varphi \xrightarrow{\kappa'} Y \xrightarrow{\zeta} \operatorname{coker} \varphi, \quad (3-7)$$

где  $\kappa'$  мономорфен,  $\zeta'$  эпиморфен,  $\zeta'\kappa = \varphi$  и  $\operatorname{im} \varphi = \ker \zeta = \operatorname{coker} \kappa$ .

**Упражнение 3.8.** Покажите, что в абелевой категории  $\mathcal{A}$  ядро, коядро и образ являются функторами из категории  $\mathcal{Ar}(\mathcal{A})$  диаграмм вида<sup>3</sup>  $\bullet \rightarrow \bullet$  в категорию  $\mathcal{A}$ , а пятичленное разложение (3-7) является функтором из  $\mathcal{Ar}(\mathcal{A})$  в категорию диаграмм вида  $\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet$ .

**Пример 3.4 (категория модулей)**

Для любого ассоциативного кольца  $R$  категории  $R\text{-Mod}$  и  $\text{Mod-}R$  левых и правых  $R$ -модулей абелевы: ядра, коядра и образы в них суть обычные ядра, коядра и образы  $R$ -линейных отображений, а совпадение образа и кообраза проверяется в теореме о строении  $R$ -линейного гомоморфизма, утверждающей, что образ канонически изоморфен фактору по ядру. В частности, категория  $\mathcal{Ab}$  абелевых групп абелева. Её полная подкатегория конечно порождённых абелевых групп также является абелевой.

**Пример 3.5 (неабелева аддитивная категория, продолжение прим. 3.3 на стр. 46)**

Категория фильтрованных абелевых групп из прим. 3.3 аддитивна, и все стрелки в ней имеют ядра и коядра. Однако эта категория не является абелевой, т. к. в ней есть стрелки  $\varphi$ , у которых  $\operatorname{im} \varphi \neq \operatorname{coim} \varphi$ .

**Упражнение 3.9.** Убедитесь, что в категории топологических абелевых групп и их непрерывных гомоморфизмов тоже есть ядра, коядра и прямые суммы, но она не является абелевой.

**Пример 3.6 (неаддитивные категории)**

Категории множеств, топологических пространств, групп и коммутативных колец не являются даже  $\mathbb{Z}$ -линейными, поскольку в них  $X \times Y \neq X \otimes Y$ .

**Упражнение 3.10.** Покажите, что стрелка  $\varphi$  в абелевой категории обратима если и только если  $\ker \varphi = 0$  и  $\operatorname{coker} \varphi = 0$ , а также что всякий мономорфизм является ядром своего коядра, а эпиморфизм — коядром своего ядра.

<sup>1</sup>А значит — и любого конечного множества.

<sup>2</sup>В начальном курсе алгебры этот факт обычно называют «теоремой о строении гомоморфизма» и доказывают для гомоморфизмов групп, колец и модулей над кольцами.

<sup>3</sup>Т. е. категории функторов  $\mathcal{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ , где категория  $\mathcal{N} = \{\bullet \rightarrow \bullet\}$  имеет 2 объекта и одну нетождественную стрелку.

**3.2.1. Конечная (ко)замкнутость.** Поскольку у любых двух стрелок  $\alpha$  и  $\beta$  в абелевой категории есть (ко)уравнитель, а именно — (ко)ядро разности  $\alpha - \beta$ , любая конечная диаграмма в абелевой категории имеет (ко)предел<sup>1</sup>. В частности, каждая пара стрелок  $A \xrightarrow{\alpha} C \xleftarrow{\beta} B$  однозначно достраивается до декартова квадрата<sup>2</sup>

$$\begin{array}{ccc} A \times_C B & \xrightarrow{\alpha'} & B \\ \beta' \downarrow & & \downarrow \beta \\ A & \xrightarrow{\alpha} & C, \end{array}$$

а каждая пара стрелок  $A \xleftarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B$  — до кодекартова квадрата<sup>3</sup>

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\beta} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ A & \xrightarrow{\beta'} & A \otimes_C B. \end{array}$$

### Предложение 3.2

В абелевой категории коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\alpha'} & B \\ \beta' \downarrow & & \downarrow \beta \\ A & \xrightarrow{\alpha} & Q \end{array} \quad (3-8)$$

декартов если и только если  $P$  является ядром стрелки  $\delta : A \oplus B \rightarrow Q$  с матрицей<sup>4</sup>  $\delta = (\beta, -\alpha)$ , и в этом случае вложение этого ядра  $\varepsilon : P \hookrightarrow A \oplus B$  имеет матрицу  $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$ . Двойственным образом, квадрат (3-8) кодекартов тогда и только тогда, когда  $Q$  является коядром стрелки  $\varepsilon' : P \hookrightarrow A \oplus B$  с матрицей  $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$ , и в этом случае проекция на это коядро  $\delta' : A \oplus B \twoheadrightarrow Q$  имеет матрицу  $(\beta, -\alpha)$ .

**Доказательство.** Мы докажем первое утверждение, второе получается оборачиванием стрелок. Для произвольного объекта  $Z$  запись отображения  $\eta : Z \rightarrow A \oplus B$  матрицей  $\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$  устанавливает биекцию между стрелками  $\eta : Z \rightarrow A \oplus B$  и парами стрелок  $\varphi : Z \rightarrow A$ ,  $\psi : Z \rightarrow B$ . Равенство  $\alpha\varphi = \beta\psi$  при этом равносильно равенству  $\delta\eta = 0$ , поскольку  $(\alpha, -\beta) \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \alpha\varphi - \beta\psi$ . Универсальное свойство вложения ядра

<sup>1</sup>См. зам. 2.1. на стр. 30.

<sup>2</sup>См. прим. 2.10 на стр. 28.

<sup>3</sup>См. прим. 2.11 на стр. 29.

<sup>4</sup>См. прим. 3.1 на стр. 43.



$\varepsilon : \ker \delta \hookrightarrow A \oplus B$ , записанное в терминах его матрицы  $\varepsilon = \begin{pmatrix} \beta' \\ \alpha' \end{pmatrix}$ , превращается таким образом в универсальное свойство стрелок  $\beta'$  и  $\alpha'$  в декартовом квадрате (3-8): для любого морфизма  $\eta = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$  со свойством  $\delta\eta = 0$ , существует единственная такая стрелка  $\vartheta : Z \rightarrow \ker \delta$ , что  $\eta = \varepsilon\vartheta$ , т. е.  $\varphi = \beta'\vartheta$  и  $\psi = \alpha'\vartheta$ .  $\square$

**Предложение 3.3**

В абелевой категории для каждого декартова квадрата

$$\begin{array}{ccc} A \times_C B & \xrightarrow{\alpha'} & B \\ \beta' \downarrow & & \downarrow \beta \\ A & \xrightarrow{\alpha} & C \end{array} \quad (3-9)$$

- (1) композиция стрелки  $\kappa : \ker \alpha' \hookrightarrow A \times_C B$  со стрелкой  $\beta'$  является ядром для  $\alpha$
- (2) инъективность стрелки  $\alpha$  равносильна инъективности стрелки  $\alpha'$
- (3) если стрелка  $\beta$  сюръективна, то декартов квадрат (3-9) одновременно является кодекартовым, и стрелка  $\beta'$  тоже сюръективна.

**Доказательство.** Из универсального свойства послойного произведения вытекает, что стрелки  $\varphi : Z \rightarrow A$  со свойством  $\alpha\varphi = 0$  и стрелки  $\psi : Z \rightarrow A \times_C B$  со свойством  $\alpha'\psi = 0$  находятся в канонической биекции, которая сопоставляет стрелке  $\varphi : Z \rightarrow A$  её послойное произведение  $\varphi \times_C 0 : Z \rightarrow A \times_C B$  с нулевой стрелкой  $Z \rightarrow B$ , а стрелку  $\psi : Z \rightarrow A \times_C B$  отправляет в композицию  $\beta'\psi$ :

$$\begin{array}{ccccc} & & A \times_C B & \xrightarrow{\alpha'} & B \\ & \nearrow \psi = \varphi \times_C 0 & \downarrow \beta' & & \downarrow \beta \\ Z & & A & \xrightarrow{\alpha} & C \\ & \searrow \varphi = \beta' \psi & & & \end{array}$$

Поскольку каждая стрелка  $\psi$  однозначно пропускается через ядро  $\kappa : \ker \alpha' \hookrightarrow A \times_C B$ , отвечающая ей стрелка  $\varphi$  однозначно пропускается через композицию  $\beta'\kappa$ . Это доказывает первое утверждение и импликацию  $\ker \alpha' = 0 \Rightarrow \ker \alpha = 0$  во втором. Пусть, наоборот,  $\ker \alpha = \beta'\kappa = 0$ . Тогда вложение  $\kappa : \ker \alpha' \hookrightarrow A \times_C B$  является послойным произведением нулевых морфизмов  $\beta'\kappa$  и  $\alpha'\kappa$ , и поэтому тоже нулевое. Это завершает доказательство второго утверждения. Отметим, что пока мы пользовались только универсальными свойствами произведения и ядер.

Чтобы доказать (3) воспользуемся [предл. 3.2](#), согласно которому  $A \times_C B$  является

ядром стрелки  $\delta = (\alpha, -\beta)$  в диаграмме

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \times_C B & & \\
 & \swarrow \beta' & \downarrow \varepsilon & \searrow \alpha' & \\
 A & & A \oplus B & & B \\
 & \searrow \alpha & \downarrow \delta & \swarrow \beta & \\
 & & C & & 
 \end{array}$$

Сюръективность стрелки  $\beta$  влечёт сюръективность стрелки  $\delta' : A \oplus B \rightarrow C$  с матрицей  $\delta' = (\alpha, \beta)$ , поскольку  $\beta = \delta' \iota_B$ . Тем самым, стрелка  $\delta'$  является коядром стрелки  $\varepsilon' = \begin{pmatrix} \alpha' \\ -\beta' \end{pmatrix}$ , а значит, по [предл. 3.2](#) квадрат (3-9) является кодекартовым. Оборачивая стрелки в уже доказанных утверждениях (1) и (2), мы заключаем, что в кодекартовом квадрате сюръективность стрелки  $\beta'$  равносильна сюръективности стрелки  $\beta$ .  $\square$

**Следствие 3.1**

В абелевой категории для каждого кодекартова квадрата

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\beta} & A \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\
 B & \xrightarrow{\beta'} & A \otimes_C B
 \end{array} \tag{3-10}$$

- (1) композиция стрелки  $\beta'$  с сюръекцией  $\zeta : A \otimes_C B \rightarrow \text{coker } \alpha'$  доставляет коядро для стрелки  $\alpha$
- (2) эпиморфность стрелки  $\alpha$  равносильна эпиморфности стрелки  $\alpha'$
- (3) если стрелка  $\beta$  инъективна, то кодекартов квадрат (3-9) одновременно является декартовым, и стрелка  $\beta'$  тоже инъективна.

**3.2.2. Точность.** Пара компонентных стрелок  $\varphi : X \rightarrow Y \xrightarrow{\psi} Z$  называется *точной*, если  $\ker \psi = \text{im } \varphi$ . Более длинная цепочка стрелок называется *точной*, если каждая пара её последовательных стрелок точна. Например, точность последовательности

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$$

означает что стрелка  $\varphi : X \rightarrow Y$  инъективна и является ядром стрелки  $\psi$ , а точность последовательности

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \rightarrow 0$$

означает что стрелка  $\psi : Y \rightarrow Z$  сюръективна и служит коядром стрелки  $\varphi$ .

Точные последовательности вида

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B \rightarrow 0 \tag{3-11}$$

называются *точными тройками*. Точность тройки (3-11) равносильна равенствам  $\alpha = \ker \beta$  и  $\beta = \operatorname{coker} \alpha$ . В этой ситуации  $B$  называется *фактором*  $C$  по  $A$  и обозначается  $C/A$ . Точная тройка (3-11) называется *расщепимой*, если существует изоморфизм  $\varphi : C \simeq A \oplus B$ , включающийся в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & C & \xrightarrow{\beta} & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \varphi & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\iota_A} & A \oplus B & \xrightarrow{\pi_B} & B & \longrightarrow & 0, \end{array} \quad (3-12)$$

нижняя строка которой является канонической диаграммой прямой суммы.

**УПРАЖНЕНИЕ 3.11.** Покажите, что расщепимость точной тройки (3-11) равносильна наличию такой стрелки  $\beta' : C \rightarrow A$ , что  $\beta' \alpha = \operatorname{Id}_A$ , а также равносильна наличию такой стрелки  $\alpha' : B \rightarrow C$ , что  $\beta \alpha' = \operatorname{Id}_B$ . Приведите пример нерасщепимой точной тройки в категории абелевых групп.

**3.2.3. Точные функторы.** Функтор  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  (соотв.  $F : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{B}$ ) между абелевыми категориями называется *точным слева*, если он переводит ядра (соотв. коядра) в ядра или, что то же самое, — точные последовательности вида  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$  (соотв.  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ ) в точные последовательности  $0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C)$  (соотв. в  $0 \rightarrow F(C) \rightarrow F(B) \rightarrow F(A)$ ). Двойственным образом,  $F$  называется *точным справа*, если он переводит коядра (соотв. ядра) в коядра, или — точные последовательности вида  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  (соотв.  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ ) в точные последовательности  $F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow 0$  (соотв. в  $F(C) \rightarrow F(B) \rightarrow F(A) \rightarrow 0$ ). Функтор называется *точным*, если он точен и справа и слева.

**УПРАЖНЕНИЕ 3.12.** Убедитесь, что для точности функтора необходимо и достаточно, чтобы он переводил точные тройки в точные тройки, и в этом случае он сохраняет точность любых последовательностей.

**ПРИМЕР 3.7 (представимые функторы)**

Из универсального свойства ядра тавтологически вытекает, что всякий копредставимый функтор  $h^A : X \mapsto \operatorname{Hom}(A, X)$  (соотв. представимый функтор  $h_A : X \mapsto \operatorname{Hom}(X, A)$ ) переводит ядра (соотв. коядра) в ядра. Тем самым, все (ко)представимые функторы точны слева.

**ПРИМЕР 3.8 (сопряжённые функторы)**

Так как (ко)ядро является (ко)пределом диаграммы, по [предл. 2.7](#) на стр. 36 все правые сопряжённые функторы точны слева, а все левые сопряжённые функторы точны справа. В частности, предел диаграммы является точным слева, а копредел — точным справа функторами из категории диаграмм  $\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{A})$  заданного вида  $\mathcal{N}$  в абелевой категории  $\mathcal{A}$  в саму категорию  $\mathcal{A}$ . Обратите внимание, что категория функторов  $\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{A})$  со значениями в абелевой категории  $\mathcal{A}$  является абелевой для любой малой категории  $\mathcal{N}$ : (ко)ядра, (ко)произведения и прямые суммы определяются покомпонентно над каждым объектом  $v \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}$ , и равенство  $\operatorname{coim} = \operatorname{im}$  также проверяется отдельно над каждым объектом  $v \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}$ .

ПРИМЕР 3.9 (ТЕНЗОРНОЕ УМНОЖЕНИЕ)

Согласно прим. 2.20 на стр. 38, для любых ассоциативных колец  $R, S$  и  $R$ - $S$ -бимодуля  $N$  функтор  $Mod\text{-}R \rightarrow Mod\text{-}S, X \mapsto X \otimes_R N$ , точен справа.

УПРАЖНЕНИЕ 3.13. В категории абелевых групп приведите примеры, показывающие, что (ко)представимый функтор может быть не точен справа, а тензорное умножение на фиксированную абелеву группу  $N$  может быть не точно слева.

**3.2.4. Отступление: короткий список аксиом абелевой категории.** Данное выше определение абелевой категории не является логически минимальным и выбрано нами постольку, поскольку все абелевы категории, с которыми мы будем иметь дело в этом курсе, изначально линейны, и в них выполняется теорема о строении гомоморфизма. Общепринятое в логике и теории категорий «минималистское» определение таково: (произвольная) категория  $\mathcal{C}$  называется абелевой, если в ней

- (A0) есть нулевой объект<sup>1</sup>
- (A1) у каждой пары объектов есть произведение и копроизведение
- (A2) у каждого морфизма есть ядро и коядро
- (A3) каждый мономорфизм является ядром некоторой стрелки, а каждый эпиморфизм — коядром некоторой стрелки

Эти аксиомы самодвойственны: их выполнение в категории  $\mathcal{C}$  равносильно их выполнению в  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ . Вывод нашего определения из этих аксиом намечен в следующем ниже упражнении и подробно изложен во второй главе книги: *P. Freyd. «Abelian Categories»*.

УПРАЖНЕНИЕ 3.14\* (не то, чтобы трудное, но довольно трудоёмкое). Пользуясь только предыдущими аксиомами (A0) – (A3), покажите, что в категории  $\mathcal{C}$

- а) сопоставления стрелке её ядра и коядра корректно задают взаимно обратные биекции между множествами под- и фактор объектов<sup>2</sup> каждого объекта
- б) любая одновременно мономорфная и эпиморфная стрелка обратима
- в) у каждых двух подобъектов любого объекта есть максимальная нижняя и минимальная верхняя грани<sup>3</sup> (они называются *пересечением* и *объединением* этих под-объектов)
- г) любые две стрелки имеют уравниватель и коуравниватель (как следствие, в  $\mathcal{C}$  есть (ко)пределы всех конечных диаграмм)
- д) образ и кообраз любого морфизма канонически изоморфны
- е) для каждой пары объектов  $X, Y$  канонический морфизм  $X \otimes Y \rightarrow X \times Y$ , задаваемый стрелками  $\text{Id}_X \times 0 : X \rightarrow X \times Y$  и  $0 \times \text{Id}_Y : Y \rightarrow X \times Y$ , обратим (т. е. копроизведение любых двух объектов одновременно является копроизведением)
- ж) конструкция из п° 3.1.2 на стр. 44 задаёт структуру абелевой группы на каждом множестве  $\text{Hom}(X, Y)$ , что в свою очередь вводит  $\mathbb{Z}$ -линейную структуру на категории  $\mathcal{C}$ .

<sup>1</sup>См. прим. 2.7 на стр. 27.

<sup>2</sup>См. п° 1.1.2 на стр. 5.

<sup>3</sup>В смысле порядка из упр. 1.1 на стр. 5.

**3.3. Проективные и инъективные объекты.** Объект  $Q$  абелевой категории  $\mathcal{A}$  называется *проективным* (соотв. *инъективным*), если функтор  $h^Q : X \mapsto \text{Hom}(Q, X)$  (соотв. функтор  $h_Q : X \mapsto \text{Hom}(X, Q)$ ) точен справа.

УПРАЖНЕНИЕ 3.15. Покажите, что прямая сумма (даже бесконечная, если существует) проективных объектов проективна, а прямое произведение (даже бесконечное) инъективных объектов инъективно.

ЛЕММА 3.1

Проективность объекта  $P$  абелевой категории  $\mathcal{A}$  равносильна каждому из свойств:

- (P1) любая стрелка  $\varphi : P \rightarrow X$  поднимается вдоль любого эпиморфизма  $\pi : Y \twoheadrightarrow X$ , т. е. существует такая стрелка  $\psi : P \rightarrow Y$ , что  $\varphi = \pi\psi$
- (P2) любой эпиморфизм  $\pi : Z \twoheadrightarrow P$  расщепляется, т. е. существует такой изоморфизм  $\gamma : Z \simeq \ker \pi \oplus P$ , что  $\pi = \pi_P \gamma$ .

Инъективность объекта  $I$  абелевой категории  $\mathcal{A}$  равносильна каждому из свойств:

- (I1) любая стрелка  $\varphi : X \rightarrow I$  продолжается на любое расширение  $\iota : X \hookrightarrow Y$ , т. е. существует такая стрелка  $\psi : Y \rightarrow I$ , что  $\psi\iota = \varphi$
- (I2) любое вложение  $\iota : I \hookrightarrow Z$  расщепляется, т. е.  $\iota = \gamma\iota_I$  для некоторого изоморфизма  $\gamma : I \oplus \text{coker } \iota \simeq Z$ .

Доказательство. Условие (P1) означает эпиморфность морфизмов

$$h^P(\pi) = \pi_* : h^P(Y) \rightarrow h^P(X)$$

для всех сюръекций  $\pi : Y \twoheadrightarrow X$ , в чём и заключается точность справа функтора  $h^P$ . Из условия (P1) следует, что тождественный морфизм  $\text{Id}_P$  можно поднять вдоль любого эпиморфизма  $\pi : Z \twoheadrightarrow P$  до такой стрелки  $\iota : P \rightarrow Z$ , что  $\pi\iota = \text{Id}_P$ , а это по [упр. 3.11](#) и означает расщепимость точной тройки  $\ker \pi \hookrightarrow Z \twoheadrightarrow P$ . Наоборот, пусть любой эпиморфизм на  $P$  расщепляется, и задана пара стрелок  $Y \twoheadrightarrow X \leftarrow P$ . Построим её до декартова квадрата

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X P & \xrightarrow{\pi'} & P \\ \varphi' \downarrow & \swarrow \iota & \downarrow \varphi \\ Y & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

Так как  $\pi$  сюръективен,  $\pi'$  тоже сюръективен<sup>1</sup>. Пусть  $\iota : P \hookrightarrow Y \times_X P$  расщепляет  $\pi'$ . Тогда стрелка  $\varphi$  поднимается стрелкой  $\psi = \varphi'\iota$ . Эквивалентность условий (I1), (I2) инъективности объекта  $I$  доказывается обращением стрелок.  $\square$

<sup>1</sup>См. [предл. 3.3](#) на стр. 49.

УПРАЖНЕНИЕ 3.16. Проведите эти рассуждения.

**3.3.1. Проективные и инъективные модули.** В категории  $\text{Mod-}R$  правых модулей над произвольным кольцом  $R$  с единицей свободный модуль  $R$  ранга 1 проективен, поскольку имеется естественный изоморфизм функторов  $h^R \simeq \text{Id}$ , который действует над модулем  $M$  преобразованием  $\text{Hom}(R, M) \simeq M$ ,  $\varphi \mapsto \varphi(1)$ . По [упр. 3.15](#) все свободные модули  $E \otimes R$  тоже проективны, а по [лем. 3.1](#) любой проективный модуль  $P$  изоморфен прямому слагаемому свободного модуля: каждый модуль  $P$  является образом эпиморфизма  $S(P) \otimes R \twoheadrightarrow P$ , где  $S(P)$  — множество векторов модуля  $P$ , и для проективного  $P$  этот эпиморфизм расщепляется.

УПРАЖНЕНИЕ 3.17. Убедитесь в обратном: если модуль  $P \oplus Q = E \otimes R$  свободен, то и  $P$  и  $Q$  проективны.

Инъективность модуля  $I$  означает возможность в нём деления на любые необратимые элементы кольца:

ЛЕММА 3.2

Правый  $R$ -модуль  $I$  инъективен если и только если для любого правого идеала  $\mathfrak{q} \subset R$  и любого  $R$ -линейного справа гомоморфизма  $q : \mathfrak{q} \rightarrow I$  имеется такой вектор  $e_q \in I$ , что  $q(x) = e_q \cdot x$  для всех  $x \in \mathfrak{q}$ , т. е. в  $I$  имеется частное  $q(x)/x = e_q$ .

Доказательство. Импликация  $\Rightarrow$  вытекает из [лем. 3.1](#): продолжим  $q$  до  $R$ -линейного справа гомоморфизма  $q' : R \rightarrow I$  и возьмём  $e_q = q'(1)$ . Для доказательства обратной импликации рассмотрим произвольное расширение модулей  $N \subset M$  и любой  $R$ -линейный гомоморфизм  $\varphi : N \rightarrow I$ . Чтобы продолжить его на  $M$  воспользуемся леммой Цорна. Содержащие  $N$  подмодули  $N' \subseteq M$ , на которые продолжается  $\varphi$ , образуют чум по включению, и каждая линейно упорядоченная цепочка в нём мажорируется объединением элементов цепочки. Поэтому в  $M$  существует максимальный по включению подмодуль  $L \supseteq N$  и гомоморфизм  $\psi : L \rightarrow I$  с ограничением  $\psi|_N = \varphi$ . Если имеется вектор  $t \in M \setminus L$ , то подмодуль  $L'$ , порождённый  $L$  и  $t$ , строго больше  $L$ , и для завершения доказательства достаточно продолжить  $\psi$  с  $L$  на  $L'$ . Подмодуль  $L'$  является образом эпиморфизма  $\pi_m : L \oplus R \twoheadrightarrow L'$ ,  $(\ell, x) \mapsto \ell + tx$ , и стало быть, изоморфен  $L \oplus R / \ker \pi_m$ , где  $\ker \pi_m = \{(\ell, x) \mid tx = -\ell \in L\}$  в свою очередь изоморфно правому идеалу  $\mathfrak{f} = \{x \in R \mid tx \in L\}$ , который  $R$ -линейно отображается в  $I$  по правилу  $x \mapsto \psi(tx)$ . Берём вектор  $e = \psi(tx)/x \in I$ , такой что  $\psi(tx) = e \cdot x$  для всех  $x \in \mathfrak{f}$ , и задаём продолжение  $\psi' : L' \rightarrow I$  правилом  $\psi'(\ell + tx) = \psi(\ell) + e \cdot x$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 3.18. Убедитесь в корректности последнего правила и проверьте, что  $\mathbb{Z}$ -модули  $\mathbb{Q}$  и  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  инъективны, причём второй замечателен тем, что для любого  $\mathbb{Z}$ -модуля  $A$  и любого элемента  $a \in A$  есть гомоморфизм  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  с  $\varphi(a) \neq 0$ .

**3.3.2. Гротендиковы категории.** Абелева категория  $\mathcal{A}$  называется *гротендиковой*, если она замкнута и козамкнута, умеренно мощна<sup>1</sup> и для любой фильтрующейся малой категории  $\mathcal{F}$  функтор  $\text{colim} : \text{Fun}(\mathcal{F}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$  точен. Последнее условие означает, что фильтрующиеся копределы в  $\mathcal{A}$  перестановочны с ядрами, а значит, и с пределами любых конечных диаграмм. Например, категория абелевых групп  $\text{Ab}$  гротен-

<sup>1</sup>Т. е. подобъекты и фактор объекты любого объекта образуют множество.

дикава в силу [предл. 2.8](#) на стр. 38. Как следствие, для любой малой абелевой категории  $\mathcal{A}$  категория функторов  $\mathcal{F}un(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$  тоже гротендикова.

**УПРАЖНЕНИЕ 3.19** (непересекающиеся подобъекты). Убедитесь, что в любой абелевой категории следующие два условия на пару подобъектов  $A \hookrightarrow M \hookleftarrow B$  объекта  $M$  эквивалентны: а)  $A \times_M B = 0$  б) сквозное отображение  $B \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/A$  инъективно.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4**

В гротендиковой категории для инъективности объекта  $I$  необходимо и достаточно, чтобы в любом собственном<sup>1</sup> расширении  $I \hookrightarrow M$  существовал ненулевой подобъект  $N \hookrightarrow M$ , не пересекающийся<sup>2</sup> с  $I$ .

**Доказательство.** Необходимость очевидна, поскольку по свойству (I2) из [лем. 3.1](#) на стр. 53 любое расширение инъективного объекта расщепляется в прямую сумму  $I$  и дополнительного подобъекта, который не пересекается с  $I$ . Наоборот, пусть объект  $I$  удовлетворяет условию предложения. Докажем, что каждое собственное расширение  $I \hookrightarrow M$  расщепляется. Подобъекты  $N \hookrightarrow M$  со свойством  $I \times_M N = 0$  образуют непустое частично упорядоченное<sup>3</sup> множество, удовлетворяющее условиям леммы Цорна: для любой линейно упорядоченной цепочки подобъектов  $N_\nu \hookrightarrow M$  со свойством  $I \times_M N_\nu = 0$ , их объединение  $\text{colim } N_\nu$  тоже обладает этим свойством, так как копредел в гротендиковой категории перестановочен с конечными пределами. Пусть  $N \hookrightarrow M$  — максимальный по включению подобъект в  $M$  со свойством  $I \times_M N = 0$ . Тогда проекция  $M \twoheadrightarrow M/N$  является минимальным фактором  $M$ , для которого сквозное отображение  $I \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/N$  инъективно. В частности, в  $M/N$  нет непересекающихся с  $I$  подобъектов (иначе фактор по такому объекту был бы строго меньшим, чем  $M/N$  фактором  $M$ , в который вкладывается  $I$ ). По условию леммы, расширение  $I \hookrightarrow M/N$  несобственное, т. е. является изоморфизмом. Тем самым, имеется проекция  $M \twoheadrightarrow I$  с тождественным сквозным отображением  $I \hookrightarrow M \twoheadrightarrow I$ , расщепляющая расширение  $I \hookrightarrow M$ .  $\square$

**3.4. (Ко)порождающие объекты.** Объект  $G$  абелевой категории  $\mathcal{A}$  называется *генератором*<sup>4</sup> (соотв. *когенератором*) категории  $\mathcal{A}$ , если функтор  $h^G : X \mapsto \text{Hom}(G, X)$  (соотв. функтор  $h_G : X \mapsto \text{Hom}(X, G)$ ) строг, т. е. переводит разные стрелки в разные<sup>5</sup>.

Например, свободный модуль  $R$  ранга 1 порождает категорию  $\text{Mod-}R$ , ибо функтор  $h^R \simeq \text{Id}$  не только строг, но и вполне строг.

**УПРАЖНЕНИЕ 3.20** (электрификация). Покажите, что каждая абелева категория с генератором умеренно мощна<sup>6</sup>.

Для произвольных объектов  $G, X$  рассмотрим прямую сумму

$$\text{Hom}(G, X) \otimes G \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\varphi : G \rightarrow X} \varphi \otimes G$$

<sup>1</sup>Т. е. не являющегося изоморфизмом.

<sup>2</sup>Т. е. удовлетворяющий равносильным условиям из [упр. 3.19](#).

<sup>3</sup>Стандартным порядком на подобъектах, задаваемым включением, см. [упр. 1.1](#) на стр. 5.

<sup>4</sup>(Ко)генераторы также называют *(ко)порождающими объектами* категории  $\mathcal{A}$ .

<sup>5</sup>Или, эквивалентно, ненулевые — в ненулевые.

<sup>6</sup>См. [п. 1.1.2](#) на стр. 5.

одинаковых копий  $G$ , занумерованных стрелками  $\varphi \in \text{Hom}(G, X)$ , и отображим слагаемое  $\varphi \otimes G$  в  $X$  при помощи стрелки  $\varphi : G \rightarrow X$ . Получим морфизм

$$c : \text{Hom}(G, X) \otimes G \rightarrow X, \quad (3-13)$$

который называется *канонической свёрткой*. Двойственным образом, рассмотрим для объектов  $Y, C$  прямое произведение

$$C^{\text{Hom}(Y, C)} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\varphi : Y \rightarrow C} C^\varphi$$

одинаковых копий  $C$ , занумерованных стрелками  $\varphi : Y \rightarrow C$ , и отображим  $Y$  в сомножитель  $C^\varphi$  при помощи стрелки  $\varphi : Y \rightarrow C$ . Получим морфизм

$$c' : Y \rightarrow C^{\text{Hom}(Y, C)} \quad (3-14)$$

который называется *канонической косвёрткой*.

#### Предложение 3.5

Кополная абелева категория  $\mathcal{A}$  тогда и только тогда порождается объектом  $G$ , когда для любого  $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$  каноническая свёртка (3-13) эпиморфна. Полная абелева категория тогда и только тогда копорождается объектом  $C$ , когда для любого  $Y \in \text{Ob } \mathcal{A}$  каноническая косвёртка (3-14) мономорфна.

**Доказательство.** Докажем второе. Применим к морфизму (3-14) сохраняющий ядра функтор  $h^X$  с произвольным  $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$ . Получим точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}(X, \ker c') \rightarrow \text{Hom}(X, Y) \xrightarrow{c'_*} \text{Hom}(X, C)^{\text{Hom}(Y, C)}$$

морфизм  $c'_*$  которой переводит стрелку  $\varphi : X \rightarrow Y$  в график отображения

$$\varphi^* : \text{Hom}(Y, C) \rightarrow \text{Hom}(X, C), \quad \psi \mapsto \psi\varphi.$$

Тем самым, инъективность  $c'_*$  равносильна инъективности действия функтора

$$h_C : \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(h_C(Y), h_C(X)).$$

Если  $\ker c' = 0$ , отображение  $c'_*$  инъективно для всех  $X, Y$ , т. е. функтор  $h_C$  строг. Наоборот, если  $h_C$  строг, то  $\text{Hom}(X, \ker c') = 0$  для всех  $X$ , и беря  $X = \ker c'$ , заключаем, что  $\ker c' = 0$ .  $\square$

**Упражнение 3.21.** Докажите первую часть [предл. 3.5](#) и покажите, что любой модуль является коядром гомоморфизма свободных модулей.

#### Следствие 3.2

Инъективная абелева группа  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  копорождает категорию абелевых групп.

**Доказательство.** Косвёртка  $c' : A \rightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$  инъективна по [упр. 3.18](#).  $\square$



УПРАЖНЕНИЕ 3.22. Убедитесь, что абелева группа  $I_R = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  со структурой правого  $R$ -модуля, задаваемой левым действием  $R$  на себе (соотв. со структурой левого  $R$ -модуля, задаваемой правым действием  $R$  на себе), является инъективным когенератором категории  $\text{Mod-}R$  (соотв. категории  $R\text{-Mod}$ ).

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3

Будем говорить, что в абелевой категории  $\mathcal{A}$  *достаточно много инъективных* (соотв. *проективных*) *объектов*, если любой объект является подобъектом инъективного (соотв. фактором проективного) объекта. Например, в категории модулей над ассоциативным кольцом с единицей достаточно много как инъективных, так и проективных объектов.

### ТЕОРЕМА 3.1

Замкнутая абелева категория, имеющая генератор и достаточно много инъективных объектов, обладает инъективным когенератором.

Доказательство. Обозначим генератор через  $G$ . По [упр. 3.20](#) на стр. 55 категория умеренно мощна. В частности, фактор объекты генератора составляют множество  $Q$ . Произведение  $\prod_{F \in Q} F$  вкладывается в некоторый инъективный объект  $I$ . Покажем, что функтор  $h_I$  переводит любую ненулевую стрелку  $\varphi : X \rightarrow Y$  в ненулевую стрелку

$$\varphi^* : \text{Hom}(Y, I) \rightarrow \text{Hom}(X, I), \quad \psi \mapsto \psi\varphi.$$

Поскольку функтор  $h^G$  строг, существует морфизм  $\gamma : G \rightarrow X$  с ненулевой композицией  $\varphi\gamma : G \rightarrow Y$ . Её образ  $\text{im}(\varphi\gamma) \in Q$  вкладывается в  $I$ . Поднимем это вложение до морфизма  $\psi : Y \rightarrow I$ . Тогда  $\psi\varphi \neq 0$ , ибо по построению  $\psi\varphi\gamma \neq 0$ .  $\square$

### ТЕОРЕМА 3.2

Всякая гротендикова категория<sup>1</sup> с генератором имеет достаточно много инъективных объектов.

Доказательство. Назовём расширение  $X \hookrightarrow E$  *существенным*, если все ненулевые подобъекты в  $E$  пересекаются<sup>2</sup> с  $X$ . Достаточно показать, что каждый объект  $X$  обладает максимальным по включению существенным расширением, ибо такое расширение инъективно по [предл. 3.4](#) на стр. 55.

Пользуясь аксиомой выбора, сопоставим каждому объекту  $Z$  диаграмму  $Z \hookrightarrow E(Z)$ , которая для инъективных  $Z$  является тождественным отображением  $\text{Id}_Z$ , а в остальных случаях — собственным<sup>3</sup> существенным расширением объекта  $Z$ . Тогда над каждым объектом  $X$  возникает проиндексированная ординалами вполне упорядоченная по включению неубывающая цепочка существенных расширений  $\varepsilon_\omega : X \hookrightarrow E_\omega$ , в которой  $\varepsilon_\emptyset : X \hookrightarrow E(X)$  и для любых  $\eta < \omega$  расширение  $\varepsilon_\omega : X \hookrightarrow E_\omega$  является композицией существенных расширений  $\varepsilon_\eta : X \hookrightarrow E_\eta$  и  $\varepsilon_{\eta,\omega} : E_\eta \hookrightarrow E_\omega$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.23. Убедитесь, что композиция двух существенных расширений является существенным расширением.

<sup>1</sup>См. н° 3.3.2 на стр. 54.

<sup>2</sup>См. [упр. 3.19](#) на стр. 55.

<sup>3</sup>Т. е. отличным от изоморфизма.

В самом деле, пусть  $\omega$  является наименьшим ординалом, на который такую цепочку нельзя продолжить. Если у  $\omega$  есть предшествующий ординал  $\omega'$ , положим  $\varepsilon_\omega$  равным сквозному отображению  $X \hookrightarrow E_{\omega'} \hookrightarrow E(E_{\omega'})$ . Если у  $\omega$  нет предшествующего ординала, положим  $E_\omega = \operatorname{colim}_{\eta < \omega} E_\eta$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.24. Убедитесь, что  $E_\omega$  является существенным расширением  $X$  и всех предыдущих  $E_\eta$ .

Наличие у  $X$  максимального существенного расширения означает, что указанная цепочка в какой-то момент стабилизируется на инъективном расширении. Допустим, что для какого-то  $X$  этого не произошло, и для каждой пары неравных ординалов  $\omega < \tau$  существенное расширение  $E_\omega \hookrightarrow E_\tau$  является собственным.

Обозначим генератор категории через  $G$  и положим  $R = \operatorname{End}(G)$ . Это ассоциативное кольцо с единицей, и функтор  $h^G : Z \rightarrow \operatorname{Hom}(G, Z)$  принимает значения в категории правых  $R$ -модулей. Покажем, что он переводит собственные существенные расширения  $A \hookrightarrow B$  в собственные существенные расширения  $h^G(A) \hookrightarrow h^G(B)$ . Собственность сохраняется в силу строгости функтора  $h^G$  и его точности слева: при применении  $h^G$  к точной тройке  $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow B/A$  с ненулевой правой стрелкой получится тройка  $h^G(A) \hookrightarrow h^G(B) \twoheadrightarrow h^G(B/A)$  с ненулевой правой стрелкой, пропускающей через коядро левой. Стало быть, это коядро тоже ненулевое. Чтобы установить существенность, рассмотрим произвольный  $R$ -подмодуль  $N \subset h^G(B) = \operatorname{Hom}(G, B)$ , содержащий ненулевой элемент  $\varphi : G \rightarrow B$ . Если расширение  $\alpha : A \hookrightarrow B$  существенно, то его образ пересекается с образом  $\varphi$  и левый верхний угол декартова квадрата

$$\begin{array}{ccc} A \times_B G & \xrightarrow{\alpha'} & G \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \varphi \\ A & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}$$

отличен от нуля. Так как  $G$  это генератор, существует стрелка  $\psi : G \rightarrow A \times_B G$  с ненулевой композицией  $\varphi \alpha' \psi$ . Поскольку  $\alpha' \psi \in R$ , эта композиция тоже принадлежит  $R$ -подмодулю  $N \subset \operatorname{Hom}(G, B)$ . С другой стороны, в силу коммутативности квадрата, она лежит и в образе вложения  $\alpha_* : h^G(A) \hookrightarrow h^G(B)$ , что и требовалось установить.

Итак, функтор  $h^G$  переводит вполне упорядоченную цепочку собственных существенных расширений объекта  $X$  в обладающую теми же свойствами цепочку расширений  $R$ -модуля  $h^G(X)$ . Этот модуль содержится в некотором инъективном  $R$ -модуле  $I$ . Для любого собственного существенного расширения  $R$ -модулей  $N \hookrightarrow M$  каждое вложение  $N \hookrightarrow I$  продолжается до гомоморфизма  $M \hookrightarrow I$ , тоже инъективного, поскольку иначе его ядро нетривиально пересекалось бы с  $N$ . По индукции<sup>1</sup>, вложение  $h^G(X) \hookrightarrow I$  продолжается до вложения в  $I$  всей трансфинитной цепочки  $h^G(E_\omega)$ . Мы получаем вполне упорядоченную цепочку неограниченной мощности из строго возрастающих подмодулей, лежащих между  $h^G(X)$  и  $I$ , что невозможно.  $\square$

Следствие 3.3

Для любой малой абелевой категории  $\mathcal{A}$  категория функторов  $\operatorname{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$  из  $\mathcal{A}$  в абелевы группы является гротендиковой, имеет генератор, инъективный когенератор и достаточно много инъективных объектов.

<sup>1</sup>Имеется в виду трансфинитная индукция по ординалам типа уже проделанной выше.

Доказательство. Категория  $\mathcal{F}un(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$  абелева и гротендикова, поскольку пределы и копределы диаграмм<sup>1</sup> функторов  $F_\nu : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}b$ , а также точность последовательностей естественных преобразований  $F \rightarrow G \rightarrow H$  таких функторов и сложение этих преобразований определяются, проверяются и вычисляются отдельно над каждым объектом  $A \in \text{Ob } \mathcal{A}b$ , где они превращаются в диаграммы  $F_\nu(A)$  и последовательности  $F(A) \rightarrow G(A) \rightarrow H(A)$  абелевых групп.

Покажем, что функтор  $G = \bigoplus_{A \in \text{Ob } \mathcal{A}} h^A : X \mapsto \bigoplus_{A \in \text{Ob } \mathcal{A}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$  является генератором категории  $\mathcal{F}un(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$ . Согласно предл. 3.5 достаточно проверить, что для любого функтора  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}b$  каноническая свёртка  $c : \text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)}(G, F) \otimes G \rightarrow F$  сюръективна. При помощи естественных изоморфизмов<sup>2</sup>

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)}(G, F) \simeq \prod_{A \in \text{Ob } \mathcal{A}} \text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)}(h^A, G) \simeq \prod_{A \in \text{Ob } \mathcal{A}} G(A)$$

действие канонической свёртки  $c$  над объектом  $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$  можно записать в виде

$$c_X : \left( \prod_{A \in \text{Ob } \mathcal{A}} F(A) \right) \otimes \left( \bigoplus_{A \in \text{Ob } \mathcal{A}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X) \right) \rightarrow F(X), \quad (x_A) \otimes (\varphi_A) \mapsto \sum_A F\varphi_A(x_A).$$

Тогда каждый элемент  $z \in F(X)$  является образом разложимого тензора  $z \otimes \text{Id}_X$ , левый и правый сомножители которого имеют в  $\prod_A F(A)$  и  $\bigoplus_A \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$  координаты

$$x_A = \begin{cases} 0 & \text{при } A \neq X \\ z & \text{при } A = X, \end{cases} \quad \varphi_A = \begin{cases} 0 & \text{при } A \neq X \\ \text{Id}_X & \text{при } A = X. \end{cases}$$

Будучи гротендиковой и обладая генератором, категория  $\mathcal{F}un(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$  имеет достаточно много инъективных объектов по теор. 3.2 и инъективный когенератор по теор. 3.1.  $\square$

**3.5. Категории модулей.** Объект  $K$  козамкнутой категории  $\mathcal{C}$  называется *компактным*, если функтор  $h^K : Z \mapsto \text{Hom}(K, Z)$  коммутирует с фильтрующимися копределами, т. е. для любого функтора  $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$  из фильтрующейся малой категории  $\mathcal{N}$  каноническая стрелка  $\text{colim } \text{Hom}(K, X_\nu) \rightarrow \text{Hom}(K, \text{colim } X_\nu)$ ,  $[\varphi_\nu] \mapsto \iota_\nu \circ \varphi_\nu$ , переводящая класс в  $\text{colim } \text{Hom}(K, X_\nu)$  морфизма  $\varphi_\nu : K \rightarrow X_\nu$  в композицию этого морфизма с каноническим отображением  $\iota_\nu : X_\nu \rightarrow \text{colim } X_\nu$ , биактивна. Подробнее это означает, что любой морфизм  $\varphi : K \rightarrow \text{colim } X_\nu$  пропускается через каноническое отображение  $\iota_\nu$  для некоторого  $\nu$ , и две стрелки  $\varphi_\nu : K \rightarrow X_\nu$  и  $\varphi_\mu : K \rightarrow X_\mu$  задают одно и то же отображение  $\iota_\nu \varphi_\nu = \iota_\mu \varphi_\mu : K \rightarrow \text{colim } X_\nu$  если и только если  $X(\nu \rightarrow \eta) \circ \varphi_\nu = X(\mu \rightarrow \eta) \circ \varphi_\mu$  как отображения  $K \rightarrow X_\eta$  для некоторых стрелок  $\nu \rightarrow \eta \leftarrow \mu$  в категории  $\mathcal{N}$ .

Очевидно, что проективный генератор  $R$  категории  $\mathcal{M}od\text{-}R$  правых модулей над ассоциативным кольцом  $R$  с единицей компактен, поскольку  $h^R \simeq \text{Id}$ . Конечные прямые суммы компактных объектов тоже компактны.

Упражнение 3.25. Покажите, что копредел конечной диаграммы компактных объектов компактен.

<sup>1</sup>В частности, ядра, коядра и прямые суммы.

<sup>2</sup>Мы пользуемся тем, что функтор  $\text{Hom}(*, G)$  переводят копределы в пределы, и леммой Ионеды.

Из упражнения вытекает, что каждый конечно представимый модуль, т. е. коядро гомоморфизма  $R^m \rightarrow R^n$ , компактен. Легко видеть, что каждый компактный модуль  $M$  конечно порождён, поскольку представляется в виде фильтрующегося копредела (объединения) своих конечно порождённых подмодулей  $N \subset M$  и, стало быть, содержится в одном из них, так как тождественный морфизм  $M \rightarrow M = \text{colim } N$  пропускается через какой-нибудь из этих подмодулей.

УПРАЖНЕНИЕ 3.26. Покажите, что всякий конечно порождённый проективный модуль конечно представим.

Тем самым, проективный модуль компактен если и только если он конечно порождён.

### ТЕОРЕМА 3.3

Козамкнутая абелева категория  $\mathcal{A}$  с компактным проективным генератором  $P$  точно эквивалентна<sup>1</sup> категории  $\text{Mod-}R$  правых  $R$ -модулей над кольцом  $R = \text{End}_{\mathcal{A}}(P)$ .

Доказательство. Функтор  $h^P : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$  принимает значение в  $\text{Mod-}R$ : правое действие  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, P)$  на абелевой группе  $h^P(X) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, X)$  задаётся правым умножением стрелок на  $f$ . В силу проективности  $P$  функтор  $h^P$  точен. Проверим, что он по-настоящему сюръективен и вполне строг<sup>2</sup>. Из предл. 3.5 вытекает, что любой объект  $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$  представляется в виде коядра морфизма между прямыми суммами подходящих упорядоченных множеств  $I, J$  одинаковых копий генератора  $P$ :

$$J \otimes P \xrightarrow{\varphi} I \otimes P \rightrightarrows X \rightarrow 0. \quad (3-15)$$

Морфизм  $\varphi$  задаётся некоторой матрицей<sup>3</sup>  $\Phi$  формата  $I \times J$  с элементами

$$\varphi_{ij} \in \text{Hom}(j \otimes P, i \otimes P) \simeq \text{Hom}(P, P) = R,$$

имеющей при каждом  $j$  лишь конечное число ненулевых  $\varphi_{ij}$ . Применяя к (3-15) функтор  $h^P$  и пользуясь компактностью  $P$  получаем для  $h^P(X)$  представление в виде коядра морфизма свободных  $R$ -модулей

$$J \otimes R \xrightarrow{\varphi_*} I \otimes R \rightrightarrows h^P(X) \rightarrow 0, \quad (3-16)$$

который задаётся умножением столбца<sup>4</sup>  $(x_j) \in J \otimes R$  слева на матрицу  $\Phi$ . Так как каждый  $R$ -модуль является коядром гомоморфизма свободных  $R$ -модулей, функтор  $h^P$  по-настоящему сюръективен. Для любого  $Y \in \text{Ob } \mathcal{A}$  группа  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  является ядром стрелки  $h_Y(\varphi)$ , получающейся применением  $h_Y : Z \mapsto \text{Hom}_{\text{Ab}}(Z, Y)$  к диаграмме (3-15), а группа  $\text{Hom}_R(h^P(X), h^P(Y))$  является коядром стрелки  $h_{h^P(Y)}(\varphi_*)$ , получающейся применением  $h_{h^P(Y)} : M \mapsto \text{Hom}_R(M, h^P(Y))$  к диаграмме (3-16). Эти стрелки совпадают друг с другом, ибо каждая из них представляет собою гомоморфизм  $h^P(Y)^I \rightarrow h^P(Y)^J$

<sup>1</sup>Т. е. имеется эквивалентность категорий, переводящая точные тройки в точные тройки.

<sup>2</sup>См. предл. 1.1 на стр. 13.

<sup>3</sup>См. прим. 3.1 на стр. 43.

<sup>4</sup>В котором имеется лишь конечное число  $x_j \neq 0$ .

прямых произведений одинаковых копий группы  $h^P(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, Y)$ , который действует на строку<sup>1</sup>  $(y_i)_{i \in I}$ ,  $y_i \in h^P(Y)$ , правым умножением на матрицу  $\Phi$ . Тем самым,  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \simeq \text{Hom}_R(h^P(X), h^P(Y))$ .  $\square$

**ТЕОРЕМА 3.4 (Эквивалентность Мориты)**

Следующие три свойства колец  $R$  и  $S$  с единицами эквивалентны друг другу:

- (1) категории  $\text{Mod-}R$  и  $\text{Mod-}S$  точно эквивалентны
- (2)  $R \simeq \text{Hom}_S(P, P)$  для некоторого конечно порождённого проективного  $S$ -модуля  $P$ , являющегося генератором категории  $\text{Mod-}S$
- (3) существует такой  $R$ - $S$  бимодуль  $T$ , что тензорное умножение  $\text{Mod-}R \rightarrow \text{Mod-}S$ ,  $M \mapsto M \otimes_R T$ , является точной эквивалентностью категорий.

**Доказательство.** Ясно, что (3) влечёт (1). Если выполнено (1), то эквивалентность  $\text{Mod-}R \simeq \text{Mod-}S$  переводит  $R$  в  $S$ -модуль  $P$ , являющийся компактным проективным генератором категории  $\text{Mod-}S$  и имеющий  $\text{Hom}_S(P, P) \simeq \text{Hom}_R(R, R) = R$ , что даёт (2), так как компактный модуль конечно порождён. Если выполнено (2), возьмём в качестве  $T$  удовлетворяющий условию (2) компактный проективный генератор  $P$  категории  $\text{Mod-}S$ , снабдив его канонической структурой левого модуля над  $R = \text{End}_S(P)$ . Функтор  $M \mapsto M \otimes_R P$  сопряжён слева функтору<sup>2</sup>  $h^P : N \mapsto \text{Hom}_S(P, N)$ , который по теор. 3.3 задаёт эквивалентность категорий  $\text{Mod-}S \simeq \text{Mod-}R$ . Как мы заметили в прим. 2.4 на стр. 23, функтор  $M \mapsto M \otimes_R P$  тоже должен быть эквивалентностью категорий, квазиобратной к функтору  $h^P$ . Это даёт (3).  $\square$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4 (Эквивалентность Мориты)**

Кольца  $R$  и  $S$ , удовлетворяющие условиям теор. 3.4, называются *Морита-эквивалентными*, а функторы  $M \mapsto M \otimes_R P$  и  $N \mapsto \text{Hom}(P, N)$  называются *эквивалентностями Мориты*. Из доказательства теор. 3.4 вытекает, что они квазиобратны друг другу.

**УПРАЖНЕНИЕ 3.27.** Покажите, что категория  $R$ -модулей точно эквивалентна категории модулей над кольцом матриц  $\text{Mat}_{n \times n}(R)$  любого конечного размера.

**ТЕОРЕМА 3.5 (СЛАБАЯ ТЕОРЕМА О ВЛОЖЕНИИ)**

Если абелева категория  $\mathcal{B}$  козамкнута и имеет проективный генератор<sup>3</sup>, то любая её малая полная точная<sup>4</sup> абелева подкатегория  $\mathcal{A}$  допускает точное вполне строгое вложение в категорию правых модулей над некоторым кольцом с единицей.

**Доказательство.** Обозначим через  $P$  проективный генератор категории  $\mathcal{B}$  и положим  $Q \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{X \in \text{Ob } \mathcal{A}} \text{Hom}(P, X) \otimes P$  (прямая сумма одинаковых копий генератора  $P$ , по одной копии для каждой стрелки, ведущей из  $P$  в подкатегории  $\mathcal{A}$ ).

<sup>1</sup>В этой строке допускается бесконечно много ненулевых  $y_i$ , однако в каждом столбце матрицы  $\Phi$  имеется только конечное число ненулевых элементов.

<sup>2</sup>См. предл. 2.3 на стр. 24.

<sup>3</sup>Не обязательно компактный!

<sup>4</sup>Т. е. такая, что точные тройки из  $\mathcal{A}$  точны и в  $\mathcal{B}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.28. Убедитесь, что прямая сумма проективных генераторов также является проективным генератором.

Тогда для каждого  $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$  существует сюръективный морфизм  $Q \rightarrow X$ . Положим  $R = \text{End}_{\mathcal{B}}(Q)$  и как в доказательстве теор. 3.3 рассмотрим точный строгий функтор  $h^Q : \mathcal{A} \rightarrow \text{Mod-}R$ ,  $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{B}}(Q, X)$ . Покажем, что он полон, т. е. для любых  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{A}$  каждая стрелка  $\varphi : h^Q(X) \rightarrow h^Q(Y)$  в категории  $\text{Mod-}R$  представляет собою левое умножение  $\psi_* : \vartheta \mapsto \psi\vartheta$  на некоторую стрелку  $\psi : X \rightarrow Y$  из категории  $\mathcal{A}$ . Для этого зафиксируем какие-нибудь сюръекции  $\pi : Q \rightarrow Y$ ,  $\tau : Q \rightarrow X$  и дополним вторую из них ядром  $K = \ker \tau$  до точной тройки  $0 \rightarrow K \xrightarrow{\kappa} Q \xrightarrow{\tau} X \rightarrow 0$ . После применения точного функтора  $h^Q$  имеем такую диаграмму  $R$ -модулей:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & h^Q(K) & \xrightarrow{\kappa_*} & R & \xrightarrow{\eta_*} & h^Q(X) \longrightarrow 0 \\ & & & & & & \downarrow \varphi \\ & & & & R & \xrightarrow{\pi_*} & h^Q(Y) \longrightarrow 0. \end{array} \quad (3-17)$$

Зафиксируем какой-нибудь элемент  $\zeta \in R = \text{End}(Q)$ , переводимый эпиморфизмом  $\pi_*$  в элемент  $\varphi\eta_*(\text{Id}_Q) \in h^Q(Y)$ . Левое умножение на  $\zeta$  достраивает диаграмму (3-17) до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} h^Q(K) & \xrightarrow{\kappa_*} & R & \xrightarrow{\eta_*} & h^Q(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \zeta_* & & \downarrow \varphi & & \\ & & R & \xrightarrow{\pi_*} & h^Q(Y) & \longrightarrow & 0, \end{array} \quad (3-18)$$

По построению, вся эта диаграмма, за исключением стрелки  $\varphi$ , является результатом применения функтора  $h^Q$  к диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\kappa} & Q & \xrightarrow{\eta} & X \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \zeta & & \\ & & & & Q & \xrightarrow{\pi} & Y \longrightarrow 0 \end{array} \quad (3-19)$$

в категории  $\mathcal{A}$ . В силу строгости функтора  $h^Q$  композиция  $\pi\zeta\kappa : K \rightarrow Y$  нулевая, ибо  $h^Q$ -образ этого зигзага на диаграмме (3-18) нулевой. Поэтому в точной последовательности абелевых групп

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \xrightarrow{\eta^*} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Q, Y) \xrightarrow{\kappa^*} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K, Y),$$

полученной применением точного слева функтора  $h_Y$  к верхней строке из (3-19), выполняется равенство  $\kappa^*(\pi\zeta) = 0$ , а значит, существует единственная такая стрелка  $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ , что  $\psi\eta = \pi\zeta$ . Она дополняет (3-19) до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\kappa} & Q & \xrightarrow{\eta} & X \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \zeta & & \downarrow \psi \\ & & & & Q & \xrightarrow{\pi} & Y \longrightarrow 0. \end{array}$$

Результат применения к этой стрелке функтора  $h^Q$  обязан совпасть со стрелкой  $\varphi$  на диаграмме (3-18), поскольку создать коммутативный квадрат в правой части

$$\begin{array}{ccccccc} h^Q(K) & \xrightarrow{\kappa_*} & R & \xrightarrow{\eta_*} & h^Q(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \zeta_* & & & & \\ & & R & \xrightarrow{\pi_*} & h^Q(Y) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

как и на диаграмме (3-19), можно ровно одной стрелкой  $h^Q(X) \rightarrow h^Q(Y)$ . Это, как и выше, вытекает из точной последовательности абелевых групп

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(h^Q(X), h^Q(Y)) \longrightarrow \text{Hom}_R(R, h^Q(Y)) \longrightarrow \text{Hom}_R(h^Q(K), h^Q(Y)),$$

полученной применением точного слева функтора  $\text{Hom}_R(*, h^Q(Y))$  к верхней строке диаграммы.  $\square$

## §4. Комплексы и когомологии

**4.1. Исчисление градуированных объектов.** Диаграмма  $V : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{A}$ , где  $\mathbb{Z}$  рассматривается как дискретная категория, называется *градуированным объектом* абелевой категории  $\mathcal{A}$ . Такой объект представляет собою набор занумерованных целыми числами объектов  $V^k \in \text{Ob } \mathcal{A}$ , которые называются *однородными компонентами* степени  $k$  в  $V$ . Если компоненты  $V^k = 0$  при всех  $k \ll 0$  (соотв. при всех  $k \gg 0$ ) градуированный объект  $V$  называется *ограниченным слева* (соотв. *справа*).

Через  $V[m]$  обозначается градуированный объект с компонентами

$$V[m]^k \stackrel{\text{def}}{=} V^{k+m}.$$

Для градуированного объекта  $V : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{A}$  мы по определению полагаем

$$V_k \stackrel{\text{def}}{=} V^{-k}. \quad (4-1)$$

Сопоставление  $k \mapsto V_k$  является композицией функтора  $V$  с оборачивающей стандартный линейный порядок на  $\mathbb{Z}$  инволюцией  $k \mapsto -k$ . При этом

$$V[m]_k = V[m]^{-k} = V^{m-k} = V_{k-m}.$$

Спуск и подъём индексов позволяет избегать отрицательных чисел. Верхняя индексация обычно называется *когомологической*, а нижняя — *гомологической*. В категориях модулей про элементы  $v \in V_k$  говорят, что они имеют *нижнюю* (или *гомологическую*) степень  $k$  или *верхнюю* (или *когомологическую*) степень  $-k$ . Вычет  $k \pmod{2}$  называется *чётностью* элемента  $v \in V^k$  и обозначается  $|v| \in \mathbb{Z}/(2)$ . Чётность не зависит от того, верхние или нижние индексы используются.

Естественное преобразование  $f : U \rightarrow W[k]$  диаграммы  $U : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{A}$  в диаграмму  $W[k] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{A}$  называется *однородным морфизмом* степени  $k$  между градуированными объектами  $U$  и  $W$ . Такой морфизм представляет собою набор морфизмов  $f_\nu : U^\nu \rightarrow W^{\nu+k}$  в категории  $\mathcal{A}$ . Например, *сдвиг градуировки*  $s : V \rightarrow V[1]$ , тождественно отображающий  $V^\nu$  в  $V^\nu = V[1]^{\nu-1}$ , однороден степени  $-1$ .

При использовании нижних индексов однородные морфизмы степени  $k$

$$f : (D_\nu) \rightarrow (B_\mu), \quad g : (D_\nu) \rightarrow (U^\mu) \quad \text{и} \quad g : (U^\mu) \rightarrow (B_\nu)$$

представляют собою наборы стрелок

$$f_\nu : D_\nu \rightarrow B_{\nu-k}, \quad g_\nu : D_\nu \rightarrow U^{k-\nu} \quad \text{и} \quad h_\nu : U^\nu \rightarrow B_{-\nu-k},$$

соответственно, уменьшающих нижний индекс на  $k$  и сохраняющих сумму верхнего и нижнего индексов, которая будет равна  $k$ , если морфизм «поднимает» индексы, и равна  $-k$ , если он их «опускает».

Однородные морфизмы степени  $k$  из  $V$  в  $W$  образуют абелеву группу, обозначаемую  $\text{GrHom}^k(V, W)$ . При композиции однородных гомоморфизмов их степени складываются:  $\text{GrHom}^i \circ \text{GrHom}^j \subset \text{GrHom}^{i+j}$ . Прямая сумма

$$\text{GrHom}(V, W) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_k \text{GrHom}^k(V, W) \quad (4-2)$$

называется *градуированной группой морфизмов* из  $V$  в  $W$ . Градуированная группа эндоморфизмов  $\text{GrHom}(V, V)$  всякого градуированного объекта  $V$  является ассоциативным градуированным кольцом с единицей.



**4.1.1. Кошулево правило знаков.** При работе с градуированными объектами мы всегда придерживаемся так называемых *s-версий*<sup>1</sup> стандартных операций над отображениями и векторами, которые отличаются от обычных использованием *кошулева правила знаков*: если результат применения операции к аргументам  $a_i$  в неградуированной теории является однородной линейной комбинацией (некоммутативных) мономов от этих аргументов и каких-либо вспомогательных операторов  $f_j$ , где все мономы отличаются друг от друга только перестановками участвующих в них символов, то в *s-версии* этой операции каждая транспозиция любых двух символов  $x, y$  должна дополнительно сопровождаться умножением соответствующего монома на  $(-1)^{|x|\cdot|y|}$ . Например, *s-коммутатор* однородных эндоморфизмов определяется как

$$[f, g] \stackrel{\text{def}}{=} f \circ g - (-1)^{|f||g|} g \circ f,$$

а *s-правило Лейбница* для однородного оператора  $D$  на градуированной алгебре и однородных элементов  $a, b$  этой алгебры имеет вид

$$D(ab) = (Da)b + (-1)^{|D|\cdot|a|} a(Db).$$

Результат применения тензорного произведения  $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$  однородных гомоморфизмов градуированных модулей  $f_i : V_i \rightarrow V_i$  к тензорному моному

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in V_1 \otimes \dots \otimes V_n$$

из однородных векторов  $v_i$  будет всегда вычисляться как

$$f_1 \otimes \dots \otimes f_m (v_1 \otimes \dots \otimes v_m) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^\varepsilon f_1(v_1) \otimes \dots \otimes f_m(v_m), \quad (4-3)$$

где  $\varepsilon = |f_m|(|v_1| + \dots + |v_{m-1}|) + |f_{m-1}|(|v_1| + \dots + |v_{m-2}|) + \dots + |f_2||v_1|$ . Композиция тензорных произведений однородных гомоморфизмов тоже вычисляется как

$$(f_1 \otimes \dots \otimes f_m) \circ (g_1 \otimes \dots \otimes g_m) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^\varepsilon (f_1 \circ g_1) \otimes \dots \otimes (f_m \circ g_m) \quad (4-4)$$

где  $\varepsilon = |f_m|(|g_1| + \dots + |g_{m-1}|) + |f_{m-1}|(|g_1| + \dots + |g_{m-2}|) + \dots + |f_2||g_1|$ .

**4.1.2. Комплексы и (ко)гомологии.** Градуированный объект  $V$ , оснащённый однородным эндоморфизмом  $d : V \rightarrow V$  степени 1 с  $d^2 = 0$  называется *комплексом с дифференциалом*  $d$ . Действие дифференциала удобно изображать диаграммой

$$\dots \xrightarrow{d} V^{v-1} \xrightarrow{d} V^v \xrightarrow{d} V^{v+1} \xrightarrow{d} \dots \quad (4-5)$$

Равенство  $d^2 = 0$  означает, что  $\text{im } d$  является подобъектом<sup>2</sup> в  $\ker d$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 4.1.** Покажите, что в абелевой категории для любой пары компонентных стрелок  $\alpha, \beta$  с  $\beta\alpha = 0$  имеются канонические инъекция  $\iota : \text{im } \alpha \hookrightarrow \ker \beta$ , сюръекция  $\pi : \text{coker } \alpha \twoheadrightarrow \text{im } \beta$  и изоморфизм  $\text{coker } \iota \simeq \ker \pi$ .

<sup>1</sup>Префикс *s-* можно воспринимать как указание на присутствие дополнительных знаков (*signs*) или как сокращение для *super-* или *skew-*.

<sup>2</sup>Или, что то же самое, — фактором объекта  $\text{coker } d$ .

Градуированный объект  $H(V) \stackrel{\text{def}}{=} \ker d / \text{im } d$  с однородными компонентами

$$H^v(V) = \frac{\ker(d : V^v \rightarrow V^{v+1})}{\text{im}(d : V^{v-1} \rightarrow V^v)}.$$

называется *когомологиями* комплекса  $V$ . Если  $H(V) = 0$ , т. е.  $\ker d = \text{im } d$ , комплекс  $V$  называется *точным* или *ациклическим*. В категориях модулей элементы из  $\ker d$  называются *коциклами*, а элементы из  $\text{im } d$  — *кограницами*.

При использовании нижней индексации (4-1) дифференциал принято обозначать кириллической буквой  $\partial$ . Диаграмма (4-5) приобретает при этом вид

$$\dots \xrightarrow{\partial} V_{v+1} \xrightarrow{\partial} V_v \xrightarrow{\partial} V_{v-1} \xrightarrow{\partial} \dots \quad (4-6)$$

В таком контексте факторы  $H_v(V) \stackrel{\text{def}}{=} \ker(\partial : V_v \rightarrow V_{v-1}) / \text{im}(\partial : V_{v+1} \rightarrow V_v)$  называют *гомологиями*, элементы из  $\ker \partial$  — *циклами*, а элементы из  $\text{im } \partial$  — *границами*<sup>1</sup>.

**ПРИМЕР 4.1** (ЦЕПНОЙ КОМПЛЕКС СИМПЛИЦИАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА)

Пусть  $X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$  — симплициальное множество, а  $K$  — коммутативное кольцо. Обозначим через  $C_n = C_n(X, K)$  свободный  $K$ -модуль с базисом  $X_n = X([n])$ . Его элементы называются  $n$ -мерными *симплициальными цепями* в  $X$  с коэффициентами из  $K$ . Напомню<sup>2</sup>, что мы обозначили через  $\partial_n^{(i)} : [n-1] \hookrightarrow [n]$  — возрастающее вложение, образ которого не содержит  $i$ . Контравариантный функтор  $X$  переводит его в отображение  $i$ -той грани, которое мы обозначим просто через  $\partial_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$  и которое сопоставляет  $n$ -мерному симплексу  $x \in X_n$  тот  $(n-1)$ -мерный симплекс  $\partial_i x \in X_{n-1}$ , что подклеивается к  $x$  в качестве гиперграни, натянутой на все вершины кроме  $i$ -той, где  $i = 0, 1, \dots$   $K$ -линейный оператор  $\partial : C_n \rightarrow C_{n-1}$ , действующий на базисный вектор  $x \in X_n \subset C_n$  по формуле

$$\partial x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i x, \quad (4-7)$$

называется *граничным оператором*. Он сопоставляет каждому симплексу его ориентированную границу. Например, ориентированной границей треугольника 012 будет цепь  $12 - 02 + 01$ , которую можно интерпретировать как контур треугольника, обходимый в направлении ориентированного ребра 01, если договориться, что смена знака перед симплексом означает смену ориентации у этого симплекса, т. е.  $-02 = 20$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 4.2.** Убедитесь, что  $\partial^2 = 0$ .

Комплекс  $(C, \partial)$  называется *цепным комплексом*, а его гомологии — *гомологиями* симплициального множества  $X$  с коэффициентами в  $K$ .

В случае, когда  $X = S(T)$  является множеством сингулярных симплексов<sup>3</sup> топологического пространства  $T$ , эти гомологии называются *сингулярными гомологиями* пространства  $T$  с коэффициентами в  $K$  и обозначаются  $H(T, K)$ .

<sup>1</sup>Однако комплексы так и остаются комплексами ☺

<sup>2</sup>См. прим. 1.4 на стр. 5.

<sup>3</sup>См. прим. 2.6 на стр. 25.

Всё вышесказанное в равной степени применимо и к полусимплициальным множествам  $X: \Delta_s^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ . Получающиеся при этом гомологии называют *симплициальными гомологиями* триангулированного топологического пространства  $T = |X|$  — геометрической реализации полусимплициального множества  $X$ , и тоже обозначают<sup>1</sup>  $H(T, K)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.3. Вычислите гомологии  $H(T, \mathbb{Z})$  стандартной триангуляции двумерного тора  $T$  с рис. 1♦1 на стр. 8.

**4.1.3. Бикомплексы.** Биградуированный объект  $V = \bigoplus_{p,q} V^{p,q}$  с парой таких дифференциалов  $d_1, d_2: V \rightarrow V$ , что  $d_1^2 = 0, d_2^2 = 0, d_1 d_2 = -d_2 d_1$  и при всех  $p, q$

$$d_1(V^{p,q}) \subset V^{p+1,q} \quad \text{и} \quad d_2(V^{p,q}) = V^{p,q+1},$$

называется *бикомплексом*. С каждым бикомплексом связан обычный комплекс

$$\text{Tot } V = \bigoplus_{\nu} \text{Tot}^{\nu} V, \quad \text{где} \quad \text{Tot}^{\nu} V \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{p+q=\nu} V^{p,q} \quad \text{и} \quad d_{\text{Tot}} \stackrel{\text{def}}{=} d_1 + d_2.$$

Он называется *свёрткой* или *тотальным комплексом* бикомплекса  $V$ .

ПРИМЕР 4.2 (ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ КОМПЛЕКСОВ МОДУЛЕЙ)

Тензорные произведения  $U^p \otimes W^q$  однородных компонент комплексов модулей  $(U, d_U)$  и  $(W, d_W)$  образуют бикомплекс с дифференциалами  $d_1 = d_U \otimes 1_W$  и  $d_2 = 1_U \otimes d_W$ , поскольку согласно кошулеву правилу знаков для  $|d_U| = |d_W| = 1$  имеем:

$$(d_U \otimes 1) \circ (1 \otimes d_W) = d_U \otimes d_W = -(1 \otimes d_W) \circ (d_U \otimes 1).$$

Тотальный комплекс этого бикомплекса обозначается  $U \otimes W$  и называется *тензорным произведением* комплексов  $U$  и  $V$ . Он имеет однородные компоненты

$$(U \otimes W)^k = \bigoplus_{\mu+\nu=k} U^{\mu} \otimes W^{\nu},$$

а его дифференциал продолжает дифференциалы комплексов  $U, V$  правилу Лейбница

$$d_{U \otimes V} \stackrel{\text{def}}{=} d_U \otimes 1 + 1 \otimes d_V \tag{4-8}$$

и действует на однородный тензор  $u \otimes v$  по формуле

$$d_{U \otimes V}(u \otimes v) = (d_U \otimes 1)(u \otimes v) + (1 \otimes d_V)(u \otimes v) = (d_U u) \otimes v + (-1)^{|u|} u \otimes (d_V v).$$

Тензорное произведение  $V_1 \otimes \dots \otimes V_m$  произвольного набора комплексов определяется аналогично: это градуированный объект с компонентами

$$(V_1 \otimes \dots \otimes V_n)^{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\sum v_i = \nu} V_1^{v_1} \otimes V_2^{v_2} \otimes \dots \otimes V_n^{v_n} \tag{4-9}$$

<sup>1</sup>В начальных курсах алгебраической топологии доказывается, что симплициальные гомологии триангулируемого топологического пространства совпадают с сингулярными и, в частности, не зависят от выбора триангуляции. См. А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, «Курс гомотопической топологии», М., Наука, 1989 или В. В. Прасолов, «Элементы теории гомологий», МЦНМО, 2006.

и дифференциалом, продолжающим дифференциалы  $d_i : V_i \rightarrow V_i$  по правилу Лейбница:

$$d_{\otimes V_i} = \sum_{i=1}^m 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes d_i \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1, \quad (4-10)$$

причём отдельные слагаемые этой суммы перемножаются друг с другом и применяются к однородным тензорам согласно кошулеву правилу знаков.

**ПРИМЕР 4.3** (комплекс однородных гомоморфизмов)

Для любых двух комплексов  $(U, \partial_U)$ ,  $(W, d^W)$  в произвольной абелевой категории  $\mathcal{A}$ , абелевы группы  $\text{Hom}(U_p, W^q)$  образуют бикомплекс с дифференциалами

$$d_1 = \partial_U^* : \varphi \mapsto (-1)^{|\varphi|+1} \varphi \circ \partial_U \quad \text{и} \quad d_2 = d_*^W : \varphi \mapsto d_W \circ \varphi. \quad (4-11)$$

Тотальный комплекс этого бикомплекса обозначается  $\text{Hom}_{\text{DG}}(U, W)$  и называется *комплексом морфизмов* между комплексами  $U$  и  $V$ . Как градуированная абелева группа он совпадает с  $\text{GrHom}(U, W)$  из форм. (4-2) на стр. 64 и имеет

$$\text{Hom}_{\text{DG}}^k(U, W) = \text{GrHom}^k(U, W) = \bigoplus_{\mu+\nu=k} \text{Hom}(U_\mu, W^\nu).$$

Мы пишем  $\text{Hom}_{\text{DG}}$ , а не  $\text{GrHom}$ , чтобы подчеркнуть что первая градуированная группа, в отличие от второй, рассматривается вместе с дифференциалом<sup>1</sup>  $d$ , переводящим однородный морфизм  $\varphi : V \rightarrow W$  в его  $s$ -коммутатор с дифференциалами из  $V$  и  $W$ :

$$\begin{aligned} d : \text{Hom}_{\text{DG}}^k(U, W) &\rightarrow \text{Hom}_{\text{DG}}^{k+1}(U, W) \\ \varphi &\mapsto [d, \varphi] \stackrel{\text{def}}{=} d_W \circ \varphi - (-1)^{|\varphi|} \varphi \circ \partial_U. \end{aligned} \quad (4-12)$$

**УПРАЖНЕНИЕ 4.4.** Убедитесь, что дифференциалы (4-11) антикоммутируют и дифференциал (4-12) имеет  $d^2 = 0$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.1.** (мультикомплексы) Кроме бикомплексов можно рассматривать и более общие  $m$ -комплексы, т. е.  $\mathbb{Z}^m$ -градуированные  $K$ -модули  $V = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Z}^m} V^\mu$ , оснащённые  $m$  дифференциалами  $d_i$  так, что мультистепень каждого  $d_i$  равна стандартному базисному вектору<sup>2</sup>  $e_i \in \mathbb{Z}^m$  и при всех  $i, j$  выполняются соотношения  $d_i^2 = 0$  и  $d_i d_j + d_j d_i = 0$ . Иными словами, дифференциалы  $d_i$  задают на  $V$  действие грасмановой алгебры с  $m$  образующими, согласованное с  $\mathbb{Z}^m$ -градуировками на  $V$  и на грасмановой алгебре. Каждому  $m$ -комплексу  $V$  тоже можно сопоставить полную свёртку  $\text{Tot } V$  с  $\text{Tot}^V V \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\sum \mu_i = \nu} V^{\mu_1, \dots, \mu_m}$  и  $d_{\text{Tot}} = \sum d_i$ . Тензорное произведение  $m$  комплексов  $V_1, \dots, V_m$  можно воспринимать как свёртку  $m$ -комплекса с компонентами  $V_1 \otimes \dots \otimes V_m$  и  $m$  дифференциалами из правой части (4-10).

<sup>1</sup>Обозначение DG является аббревиатурой для «differential graded», т. е. *дифференциальная градуированная группа*.

<sup>2</sup>Т. е.  $d_i(V^{\mu_1, \dots, \mu_m}) \subset V^{\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_i+1, \mu_{i+1}, \dots, \mu_m}$

**4.2. Категории комплексов.** С заданной абелевой категорией  $\mathcal{A}$  связаны три различных категории комплексов: *DG-категория*  $Com_{DG}(\mathcal{A})$ , «обычная» категория комплексов  $Com(\mathcal{A})$  и *гомотопическая категория*  $Ho(\mathcal{A})$ . Все они имеют один и тот же класс объектов — комплексы, состоящие из объектов категории  $\mathcal{A}$ , однако различаются множествами морфизмов между комплексами  $V, W$ .

DG-категория комплексов  $Com_{DG}(\mathcal{A})$  имеет в качестве морфизмов из  $V$  в  $W$  комплекс морфизмов  $Hom_{DG}(V, W)$  из предыдущего [прим. 4.3](#).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1

Аддитивная категория  $\mathcal{C}$ , в которой каждое из множеств  $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$  является комплексом абелевых групп, причём дифференциал композиции удовлетворяет  $s$ -правилу Лейбница

$$d(\varphi \circ \psi) = (d\varphi) \circ \psi + (-1)^{|\varphi|} \varphi \circ (d\psi), \quad (4-13)$$

называется *дифференциальной градуированной* (или *DG-*) категорией.

УПРАЖНЕНИЕ 4.5. Убедитесь, что категория  $Com_{DG}(\mathcal{A})$  действительно является DG-категорией.

**4.2.1. Категория комплексов  $Com(\mathcal{A})$**  имеет в качестве морфизмов из  $V$  в  $W$  подгруппу в  $Hom_{DG}(V, W)$ , состоящую из перестановочных с дифференциалами однородных морфизмов степени нуль

$$Hom_{Com}(V, W) \stackrel{\text{def}}{=} Hom_{DG}^0(V, W) \cap \ker d = \{ \varphi : V \rightarrow W \mid \forall v \varphi(V^v) \subset W^v \ \& \ d_W \varphi = \varphi d_V \}.$$

Каждый такой морфизм корректно задаёт морфизм когомологий  $\varphi_* : H(V) \rightarrow H(W)$ , переводящий класс коцикла<sup>1</sup>  $\xi$  по модулю кограниц в класс коцикла  $\varphi(\xi)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.6. Убедитесь в этом.

Для любой абелевой категории  $\mathcal{A}$  категория  $Com(\mathcal{A})$  тоже абелева: ядро морфизма комплексов  $\varphi : V \rightarrow W$  это подкомплекс в  $V$ , образованный ядрами  $\ker f_v$  морфизмов  $\varphi_v : V^v \rightarrow W^v$ , а коядро образовано коядрами  $\text{coker } \varphi_v = W^v / \text{im } \varphi_v$  этих морфизмов.

УПРАЖНЕНИЕ 4.7. Убедитесь, что ядра  $\ker \varphi_v$  действительно образуют подкомплекс в  $V$ , т. е.  $d_V$  переводит  $\ker \varphi_v$  в  $\ker \varphi_{v+1}$ , и что коядра  $\text{coker } \varphi_v$  образуют фактор комплекс комплекса  $W$ , т. е.  $d_W$  корректно задаёт отображение фактор объектов  $W^v / \text{im } \varphi_v \rightarrow W^{v+1} / \text{im } \varphi_{v+1}$ .

Существование прямых сумм, наличие нулевого объекта и совпадение образа с кообразом имеют место постольку, поскольку они имеют место в категории диаграмм<sup>2</sup>  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{A}$  и их естественных преобразований, которая, как легко видеть, абелева.

УПРАЖНЕНИЕ 4.8. Убедитесь в этом.

<sup>1</sup>Всюду далее мы будем рассуждать в терминах элементов объектов, как будто подлежащая абелева категория  $\mathcal{A}$  является категорией модулей над ассоциативным кольцом. Справедливость получаемых таким образом результатов для произвольной абелевой категории  $\mathcal{A}$  может быть установлена при помощи сильной теоремы о вложении: минимальная по включению полная абелева подкатегория, содержащая заданное множество объектов из  $\mathcal{A}$ , является малой и по сильной теореме о вложении может быть точно и вполне строго вложена в категорию модулей над ассоциативным кольцом.

<sup>2</sup>Где  $\mathbb{Z}$  рассматривается как дискретная категория.

## ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1

С точной тройкой комплексов  $0 \rightarrow U \xrightarrow{\iota} W \xrightarrow{\pi} W/U \rightarrow 0$  функториально<sup>1</sup> связана длинная точная последовательность когомологий

$$\dots \xrightarrow{\iota_*} H^i(W) \xrightarrow{\pi_*} H^i(W/U) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(U) \xrightarrow{\iota_*} H^{i+1}(W) \xrightarrow{\pi_*} \dots, \quad (4-14)$$

в которой связывающий гомоморфизм  $\delta : H^i(W/U) \rightarrow H^{i+1}(U)$  переводит когомологический класс коцикла  $\pi(w) \in \ker d_{W/U}$  в когомологический класс коцикла  $d_W(w)$ .

Доказательство. Проверим, что  $\delta$  является корректно определённым отображением из  $H(W/U)$  в  $H(U)$ . Поскольку  $\pi d_W(w) = d_{W/U}\pi(w) = 0$ , элемент  $d_W(w) \in \ker \pi = U$ . Он является коциклом, так как  $d_U d_W(w) = d_W^2(w) = 0$ . Его когомологический класс в  $H(U)$  не зависит от выбора элемента  $w \in W$ , представляющего класс когомологий  $[\pi(w)] \in H(W/U)$ , поскольку  $d_W(U + dW) = d_U(U) = 0$  в  $H(U)$ . По построению, каждый из морфизмов  $\varphi_*$ ,  $\psi_*$  и  $\delta$  функториально зависит от исходной точной тройки комплексов, и композиция любой пары последовательных стрелок в (4-14) нулевая. Проверку точного совпадения ядер с образами мы оставляем читателю.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 4.9. Сделайте эту проверку.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2 (СДВИГ ГРАДУИРОВКИ)

Функтор сдвига  $S : \mathcal{C}om \rightarrow \mathcal{C}om$ ,  $V \mapsto SV = V[1]$ , действует на комплекс по правилу  $SV^v = V^{v+1}$ ,  $d_{SV} = -d_V$ , так что естественное преобразование сдвига  $s : V \rightarrow V[1]$ , тождественно действующее на элементы и лежащее в  $\text{Hom}_{\text{DG}}^{-1}(V, V[1])$ ,  $s$ -коммутирует с дифференциалом:  $[d, s] = d_{SV}s + sd_V = 0$ . Действие функтора  $S$  на морфизмы тождественно. Функтор  $S$  обратим в сильном смысле: тождественно действующий на морфизмы функтор  $T : V \mapsto V[-1]$ , где  $V[-1]^v = V^{v-1}$  и  $d_{TV} = -d_V$ , таков что  $TS = ST = \text{Id}$  (точное равенство, а не эквивалентность функторов). Итерации функтора сдвига обозначаются  $S^k V = T^{-k} V = V[k]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

## ПРИМЕР 4.4 (КОНУС МОРФИЗМА)

Со всяким морфизмом комплексов  $\varphi : U \rightarrow W$  функториально связан сосредоточенный в двух столбцах с номерами  $-1$  и  $0$  бикомплекс

$$\begin{array}{ccc} & & \uparrow d_W \\ & & \uparrow d_W \\ & & \uparrow d_W \\ & & \uparrow d_W \\ & & \uparrow d_W \\ U^{i+1} & \xrightarrow{\varphi} & W^{i+1} \\ & & \uparrow d_W \\ U^i & \xrightarrow{\varphi} & W^i \\ & & \uparrow d_W \\ U^{i-1} & \xrightarrow{\varphi} & W^{i-1} \\ & & \uparrow d_W \\ & & \uparrow d_W \end{array} \quad (4-15)$$

<sup>1</sup>В том смысле, что сопоставление точной тройке её длинной последовательности когомологий является функтором из категории точных диаграмм вида  $0 \rightarrow * \rightarrow * \rightarrow * \rightarrow 0$  в  $\mathcal{C}om(\mathcal{A})$  в категорию бесконечных точных диаграмм  $\dots \rightarrow * \rightarrow * \rightarrow \dots$  в  $\mathcal{A}$ .

свёртка которого называется *конусом* морфизма  $\varphi$  и обозначается  $\text{Con}(\varphi)$ . Как градуированный модуль,  $\text{Con}(\varphi) \simeq U[1] \oplus W$  имеет  $\text{Con}^i(\varphi) = U^{i+1} \oplus W^i$ , но дифференциал

$$d_{\text{Con}(\varphi)} : U[1] \oplus W \rightarrow U[1] \oplus W, \quad \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -d_U & 0 \\ \varphi & d_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \quad (4-16)$$

не равен прямой сумме дифференциалов. Комплекс  $W \subset \text{Con}(\varphi)$  является подкомплексом в  $\text{Con}(\varphi)$  с фактором  $\text{Con}(\varphi)/W \simeq U[1]$ , причём точная тройка комплексов

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{\iota_\varphi} \text{Con}(\varphi) \xrightarrow{\pi_\varphi} U[1] \longrightarrow 0, \quad (4-17)$$

вообще говоря, *не расщепляется* в категории  $\text{Com}$ . Длинная точная последовательность когомологий тройки (4-17) имеет вид

$$\dots \longrightarrow H^i(\text{Con} \varphi) \xrightarrow{\pi_{\varphi_*}} H^{i+1}(U) \xrightarrow{\varphi_*} H^{i+1}(W) \xrightarrow{\iota_{\varphi_*}} H^{i+1}(\text{Con} \varphi) \longrightarrow \dots, \quad (4-18)$$

и её связывающий гомоморфизм  $\delta : H^i(U[1]) = H^{i+1}(U) \rightarrow H^{i+1}(W)$  совпадает с  $\varphi_*$ .

**4.2.2. Гомотопическая категория комплексов  $\mathcal{Ho}$**  и имеет в качестве морфизмов нулевые когомологии комплексов  $\text{Hom}_{\text{DG}}$ :

$$\text{Hom}_{\mathcal{Ho}}(V, W) \stackrel{\text{def}}{=} H^0(\text{Hom}_{\text{DG}}(V, W)) = \frac{\text{Hom}_{\text{Com}}(V, W)}{\text{im}(d : \text{Hom}_{\text{DG}}^{-1}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\text{DG}}^0(V, W))}.$$

Иначе говоря, морфизмы в  $\mathcal{Ho}$  суть классы морфизмов  $\varphi : V \rightarrow W$  в  $\text{Com}$  по модулю сложения с морфизмами вида  $[d, \gamma] = d_W \gamma + \gamma d_V$ , где  $\gamma \in \text{Hom}_{\text{DG}}^{-1}(V, W)$ . Морфизмы вида  $[d, \gamma]$  называются *гомотопными нулю*. Морфизмы комплексов  $\varphi$  и  $\psi$  называются *гомотопными*, если их разность гомотопна нулю. При этом любое однородное степени  $-1$  отображение  $\gamma : V \rightarrow W$ , такое что  $\varphi - \psi = [d, \gamma]$ , называется *гомотопией* между  $\varphi$  и  $\psi$ , что записывается как  $\varphi \underset{\gamma}{\sim} \psi$ . Итак, морфизмы в категории  $\mathcal{Ho}$  суть морфизмы комплексов, рассматриваемые с точностью до гомотопии.

**УПРАЖНЕНИЕ 4.10.** Убедитесь, что если  $\varphi \underset{\gamma}{\sim} 0$ , то  $\varphi \psi \underset{\gamma \psi}{\sim} 0$  и  $\eta \varphi \underset{\eta \gamma}{\sim} 0$  всякий раз, когда композиции  $\varphi \psi$  и  $\eta \varphi$  определены.

Таким образом, гомотопные нулю морфизмы образуют в  $\text{Mor}(\text{Com})$  двусторонний идеал, и значит, композиция морфизмов в  $\text{Com}$  корректно спускается на классы гомотопных морфизмов, так что  $\mathcal{Ho}$  действительно является категорией.

Всякий гомотопный нулю морфизм комплексов  $\varphi = d_W \gamma + \gamma d_V : V \rightarrow W$  задаёт нулевой морфизм когомологий  $\varphi_* : H(V) \rightarrow H(W)$ , так как для любого коцикла  $\xi \in \ker d_V$  коцикл  $\varphi(\xi) = d_W(\gamma \xi) + \varphi \gamma(d_V \xi) = d_W(\gamma \xi)$  является кограницей. Поэтому гомотопные морфизмы комплексов одинаково действуют на когомологиях. В частности, при вычислении когомологий произвольного комплекса  $V \in \text{Com}$  можно заменить этот комплекс любым другим комплексом  $W$ , изоморфным  $V$  в категории  $\mathcal{Ho}$  — когомологии у  $W$  будут те же, что и у  $V$ , хотя изоморфизма между  $V$  и  $W$  в категории  $\text{Com}$  при этом может и не быть.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3**

Комплекс  $V$  называется *стягиваемым*, если  $\text{Id}_V \underset{\gamma}{\sim} 0$ . Гомотопия  $\gamma$  между нулевым и тождественным эндоморфизмами называется *стягивающей гомотопией*.

УПРАЖНЕНИЕ 4.11. Убедитесь, что в категории  $\mathcal{H}o$  все стягиваемые комплексы изоморфны нулевому комплексу (в частности, ациклически).

ПРИМЕР 4.5 (КОНУС ТОЖДЕСТВЕННОГО МОРФИЗМА)

Конус<sup>1</sup>  $\text{Con Id}_V$  тождественного морфизма  $\text{Id}_V : V \rightarrow V$ , как градуированный модуль равный  $V[1] \oplus V$ , изоморфен нулю в категории  $\mathcal{H}o$ . Стягивающая гомотопия между тождественным и нулевым эндоморфизмами задаётся формулой

$$\gamma : V[1] \oplus V \rightarrow V \oplus V[-1], \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.12. Убедитесь в этом и покажите, что вложение  $\iota_{\text{Id}}$  и проекция  $\pi_{\text{Id}}$  из точной в категории  $\text{Com}$  тройки<sup>2</sup>  $0 \longrightarrow V \xrightarrow{\iota_{\text{Id}}} \text{Con Id}_V \xrightarrow{\pi_{\text{Id}}} V[1] \longrightarrow 0$  тоже гомотопны нулю.

**4.3. Комплексы Кошуля.** Для произвольного элемента  $f \in K$  обозначим через  $K_f$  сосредоточенный в степенях  $-1$  и  $0$  двучленный комплекс

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{f} K \rightarrow 0, \quad (4-19)$$

с дифференциалом  $f : x \mapsto fx$  и когомологиями

$$H^0(K_f) = K/(f) \quad \text{и} \quad H^{-1}(K_f) = \text{Ann } f = \{a \in K \mid af = 0\}.$$

ЛЕММА 4.1

Всякий комплекс  $K$ -модулей  $C$  вписывается в категории  $\text{Com}$  в точную тройку

$$0 \rightarrow C \hookrightarrow K_f \otimes C \rightarrow C[1] \rightarrow 0, \quad (4-20)$$

которая производит длинную точную последовательность когомологий

$$\dots \rightarrow H^i(C) \xrightarrow{f} H^i(C) \rightarrow H^i(K_f \otimes C) \rightarrow H^{i+1}(C) \xrightarrow{f} H^{i+1}(C) \rightarrow \dots$$

со связывающим гомоморфизмом  $f : [x] \mapsto [fx]$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Комплекс  $K_f \otimes C$  имеет компонентой степени  $k$  прямую сумму

$$(K_f^{-1} \otimes C^{k+1}) \oplus (K_f^0 \otimes C^k) = C^{k+1} \oplus C^k.$$

Согласно Кошулеву правилу знаков, дифференциал  $f \otimes 1 + 1 \otimes d_C$  действует на эти слагаемые как  $1 \otimes c^{k+1} \mapsto f \otimes c^{k+1} - 1 \otimes dc^{k+1}$ ,  $1 \otimes c^k \mapsto 1 \otimes dc^k$ . Таким образом, комплекс  $K_f \otimes C$  совпадает с конусом морфизма  $f : C \rightarrow C$ ,  $c \mapsto fc$ , и все утверждения вытекают из [прим. 4.4](#) на стр. 70.  $\square$

<sup>1</sup>См. [прим. 4.4](#) на стр. 70.

<sup>2</sup>См. формулу (4-17) из [прим. 4.4](#) на стр. 70.



СЛЕДСТВИЕ 4.1

Если  $f \in K$  обратим, то комплекс  $K_f \otimes C$  ацикличен для любого комплекса  $C$ .  $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4.2

Если  $f$  не делит нуль в  $K$ -модуле  $H(C)$ , то  $H^i(K_f \otimes C) \simeq H^i(C)/fH^i(C)$  при всех  $i$ .  $\square$

**4.3.1. Комплекс Кошуля последовательности элементов.** Для конечной упорядоченной последовательности элементов  $f_1, \dots, f_m \in K$  тензорное произведение

$$K_{f_1 \dots f_m} \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_{\alpha=1}^m K_{f_\alpha}$$

двучленных комплексов (4-19) называется *комплексом Кошуля* последовательности  $f_1, \dots, f_m$ . Комплекс  $K_{f_1 \dots f_m}$  сосредоточен в степенях от  $-m$  до  $0$ , и его компонента степени  $-k$  является прямой суммой  $\binom{m}{k}$  свободных модулей ранга один

$$K^{\otimes m} = K \otimes K \otimes \dots \otimes K \simeq K,$$

занумерованных последовательностями  $I = (i_1, \dots, i_k)$  возрастающих индексов

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m,$$

равных номерам тех  $k$  из  $m$  тензорных сомножителей, что имеют степень  $-1$ . Сопоставим базисному вектору  $1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1$  того произведения, в котором степень  $-1$  имеют в точности  $k$  сомножителей, стоящих на местах с номерами  $i_1, \dots, i_k$ , грасманов моном  $\xi_I = \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k} \in \Lambda^k(K^m)$  из внешней алгебры  $\Lambda(K^m)$  свободного  $K$ -модуля ранга  $m$  с базисом  $\xi_1, \dots, \xi_m$ . Таким образом мы изоморфно отображаем компоненту степени  $-k$  комплекса  $K_{f_1 \dots f_m}$  на  $\Lambda^k(K^m)$ . Этот изоморфизм превращает дифференциал комплекса  $K_{f_1 \dots f_m}$  в грасманов дифференциальный оператор<sup>1</sup>

$$\partial = \sum_{\alpha=1}^m f_\alpha \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} : \Lambda^k(K^m) \rightarrow \Lambda^{k-1}(K^m), \quad \omega \mapsto \sum_{\alpha=1}^m f_\alpha \cdot \partial \omega / \partial \xi_\alpha, \quad (4-21)$$

так что комплекс Кошуля переписется в виде

$$0 \rightarrow \Lambda^m(K^m) \rightarrow \Lambda^{m-1}(K^m) \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda^2(K^m) \rightarrow K^m \rightarrow K \rightarrow 0, \quad (4-22)$$

где самый правый ненулевой дифференциал  $\partial$  переводит базисный вектор  $\xi_i \in K^m$  в элемент  $f_i \in K$ , так что  $\text{im}(\partial : K^m \rightarrow K) = (f_1, \dots, f_m)$  это идеал, порождённый элементами  $f_i$  в  $K$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4

Последовательность  $f_1, \dots, f_m \in K$  называется *регулярной*, если при каждом  $i$  класс элемента  $f_i$  не делит нуль в факторе<sup>2</sup>  $K/(f_1, \dots, f_{i-1})$ .

<sup>1</sup>Напомним, что грасмановы частные производные антикоммутируют и подчиняются  $s$ -правилу Лейбница, см. раздел 2.5 лекции <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/lec-02.pdf>.

<sup>2</sup>Для  $i = 1$  это означает, что  $f_1$  не делит нуль в  $K$ .

## ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2

Если элементы  $f_1, \dots, f_m \in K$  образуют регулярную последовательность, то комплекс Кошуля (4-22) имеет  $H^0(K_{f_1 \dots f_m}) \simeq K/(f_1, \dots, f_m)$  и ацикличен во всех отрицательных степенях.

Доказательство. Индукция по  $m$  с использованием сл. 4.2.  $\square$

## СЛЕДСТВИЕ 4.3

Если хоть один из элементов  $f_i$  обратим в  $K$ , то комплекс Кошуля  $K_{f_1 \dots f_m}$  ацикличен всюду.

Доказательство. Это вытекает из сл. 4.1.  $\square$

## ПРИМЕР 4.6 (КОМПЛЕКСЫ КОШУЛЯ И ДЕ РАМА КОЛЬЦА МНОГОЧЛЕНОВ)

Возьмём в качестве  $K = SV^* \simeq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  симметрическую алгебру векторного пространства  $V^*$  с базисом  $x_1, \dots, x_n$  над полем  $\mathbb{k}$  и положим  $f_i = x_i$ . В силу изоморфизма  $\Lambda^k(K^n) \simeq \Lambda^k V^* \otimes_{\mathbb{k}} SV^*$  комплекс (4-22), дополненный справа фактором  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/(x_1, \dots, x_n) \simeq \mathbb{k}$ , можно переписать как сосредоточенный в степенях от  $-m$  до  $+1$  комплекс свободных  $SV^*$ -модулей

$$0 \rightarrow \Lambda^m V^* \otimes_{\mathbb{k}} SV^* \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda^2 V^* \otimes_{\mathbb{k}} SV^* \rightarrow V^* \otimes_{\mathbb{k}} SV^* \rightarrow SV^* \rightarrow \mathbb{k} \rightarrow 0 \quad (4-23)$$

с дифференциалом

$$\begin{aligned} \partial &= \sum \frac{\partial}{\partial \xi_i} \otimes x_i : \Lambda^k V^* \otimes S^m V^* \rightarrow \Lambda^{k-1} V^* \otimes S^{k+1} V^* \\ \omega \otimes f &\mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial \xi_i} \otimes x_i \cdot f, \end{aligned} \quad (4-24)$$

где  $x_i$  и  $\xi_i$  суть базисные векторы пространства  $V^*$ , рассматриваемые как образующие симметрической и внешней алгебр пространства  $V$  соответственно. Будучи комплексом Кошуля регулярной последовательности  $x_1, \dots, x_n$ , комплекс (4-23) ацикличен. Если  $\text{char } \mathbb{k} = 0$ , это можно увидеть без предл. 4.2 при помощи следующего гомотопического соображения.

На пространстве<sup>1</sup>  $\Lambda V^* \otimes_{\mathbb{k}} SV^*$  помимо дифференциала Кошуля, который является гомоморфизмом  $SV^*$ -модулей и имеет бистепень  $(-1, 1)$  по грасмановым и коммутирующим переменным, имеется хорошо известный из курса анализа дифференциал Де Рама  $d$ , который является гомоморфизмом  $\Lambda V^*$ -модулей, имеет бистепень  $(1, -1)$  и задаётся формулой

$$\begin{aligned} d &= \sum \xi_i \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} : \Lambda^k V^* \otimes S^m V^* \rightarrow \Lambda^{k+1} V^* \otimes S^{k-1} V^* \\ \omega \otimes f &\mapsto \sum_{i=1}^n \xi_i \wedge \omega \otimes \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Известном у физиков как алгебра полиномиальных суперфункций на  $V$ .

и может восприниматься как  $\mathbb{k}$ -линейный эндоморфизм степени  $-1$  комплекса векторных пространств (4-23).

УПРАЖНЕНИЕ 4.13. Убедитесь, что  $d^2 = 0$  и что  $s$ -коммутатор  $[\partial, d] = \partial d + d\partial$  действует на компоненте  $\Lambda^k V^* \otimes S^m V^*$  гомотетией с коэффициентом<sup>1</sup>  $(k + m)$ .

Из этого упражнения вытекает, что дифференциал Де Рама задаёт гомотопию между нулевым эндоморфизмом комплекса (4-23) и эндоморфизмом  $\deg = \partial d + d\partial$ , действующим на каждую однородную компоненту  $\Lambda^k V^* \otimes S^m V^*$  как  $(k + m) \cdot \text{Id}$ . Поэтому эндоморфизм  $\deg_*$  пространства когомологий комплекса (4-23), умножающий все лежащие в  $\Lambda^k V^* \otimes S^m V^*$  циклы на  $k + m$ , является нулевым. Таким образом, если  $\text{char } \mathbb{k} = 0$ , то нетривиальные циклы в комплексе (4-23) могут быть только в компоненте нулевой степени самого правого дифференциала  $\Lambda^0 V^* \otimes S^0 V^* \rightarrow \mathbb{k}$ , равной  $\text{Id}_{\mathbb{k}}$  и тоже не имеющей когомологий. Тем самым, комплекс (4-23) ацикличен. Это рассуждение заодно устанавливает и ацикличность над полем характеристики нуль комплекса ДеРама

$$\dots \xrightarrow{d} S^3 V^* \otimes_{\mathbb{k}} \Lambda V^* \xrightarrow{d} S^2 V^* \otimes_{\mathbb{k}} \Lambda V^* \xrightarrow{d} V^* \otimes_{\mathbb{k}} \Lambda V^* \xrightarrow{d} \mathbb{k} \rightarrow 0$$

который с алгебраической точки зрения представляет собою бесконечный влево комплекс свободных модулей над алгеброй  $\Lambda V^*$ , а в геометрии интерпретируется<sup>2</sup> как комплекс дифференциальных форм с полиномиальными коэффициентами на аффинном пространстве  $\mathbb{A}(V)$ .

**4.3.2. Комплекс Кошуля квадратичной алгебры.** Предыдущий пример допускает следующее некоммутативное обобщение. Обозначим через  $T(V) = \bigoplus_{k \geq 0} V^{\otimes k}$  сво-

бодную ассоциативную алгебру конечномерного векторного пространства  $V$  над полем  $\mathbb{k}$ . Градуированная алгебра  $A = T(V)/(I)$ , являющаяся фактором алгебры  $T(V)$  по однородному двустороннему идеалу  $(I) \subset T(V)$ , порождённому каким-нибудь векторным подпространством  $I \subset V \otimes V$ , называется *квадратичной алгеброй*. Симметрическая алгебра  $SV$  и грасманова алгебра  $\Lambda V$  являются примерами квадратичных алгебр: их идеалы соотношений порождаются линейными оболочками квадратичных тензоров вида  $v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1$  и  $v \otimes v$  соответственно. Квадратичная алгебра  $A^! \stackrel{\text{def}}{=} T(V^*)/(I^\perp)$ , где  $I^\perp = \text{Ann } I \subset V^* \otimes V^*$ , называется *двойственной* к квадратичной алгебре  $A = T(V)/(I)$ . Обратите внимание, что  $A^{!!} \simeq A$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.14. Убедитесь, что квадратичные алгебры  $SV$  и  $\Lambda V^*$  двойственны друг другу.

Из пары двойственных квадратичных алгебр  $A$  и  $B = A^!$  можно изготовить ассоциативную алгебру  $A \otimes B$ , которая как векторное пространство представляет собою тензорное произведение векторных пространств  $A$  и  $B$  над полем  $\mathbb{k}$ , а умножение однородных разложимых тензоров производится с учётом кошулева правила знаков по формуле  $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{|a_2||b_1|} (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$  и распространяется на все остальные тензоры по линейности.

<sup>1</sup>Этот факт известен как *теорема Эйлера об однородных суперфункциях*.

<sup>2</sup>При этом буквы  $\xi_1, \dots, \xi_n$  заменяются традиционными для анализа символами  $dx_1, \dots, dx_n$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.15. Убедитесь, что так определённое умножение корректно определено и ассоциативно.

Тензор  $\text{Id}_V \in \text{End } V \simeq V \otimes V^* \subset A \otimes B$  называется *элементом Казимира* алгебры  $A \otimes B$  и обозначается  $\kappa$ . В двойственных базисах  $e_i$  и  $x_i$  пространств  $V$  и  $V^*$  он записывается как  $\kappa = \sum e_i \otimes x_i$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.16. Покажите, что  $\kappa^2 = 0$  в алгебре  $A \otimes B$ .

Тензорное произведение векторных пространств  $\mathcal{K}_A \stackrel{\text{def}}{=} A \otimes B^*$  является правым  $A \otimes B$ -модулем, на котором элемент  $a \otimes b$  действует оператором  $\varrho_a \otimes \lambda_b^*$ , где  $\varrho_a : A \rightarrow A$ ,  $x \mapsto xa$ , это оператор правого умножения на  $a$  в алгебре  $A$ , а  $\lambda_b^* : B^* \rightarrow B^*$ , это оператор, двойственный к оператору  $\lambda_b : B \rightarrow B$ ,  $x \mapsto bx$ , левого умножения на  $b$  в алгебре  $B$ . В силу упр. 4.16 правое действие оператора Казимира  $\kappa$  задаёт на  $\mathcal{K}_A$  структуру комплекса векторных пространств. Он называется *комплексом Кошуля* квадратичной алгебры  $A$ . В терминах двойственных базисов  $e_i \in V$  и  $x_i \in V^*$  действие дифференциала задаётся формулой

$$\partial : a \otimes \beta \mapsto \sum_i (a \cdot e_i) \otimes (x_i \lrcorner \beta),$$

где  $\beta \in TV$  рассматривается как полилинейная форма на пространстве  $V^*$ , и  $x_i \lrcorner \beta$  означает подстановку ковектора  $x_i$  в её первый аргумент.

УПРАЖНЕНИЕ 4.17. Убедитесь, что для двойственных квадратичных алгебр  $A = SV^*$  и  $B = LV$  оператор Казимира  $\kappa$  переводит  $S^k V^* \otimes L^m V^*$  в  $\otimes S^{k+1} V^* \otimes L^{k-1} V^*$ , и его действие на этой однородной компоненте связано с кошулевым дифференциалом  $\partial$  из форм. (4-24) на стр. 74 соотношением  $\kappa = k^{-1} \partial$ .

Квадратичная алгебра  $A$  называется *кошулевой*, если её комплекс Кошуля  $\mathcal{K}_A$  точен. Поскольку комплекс Кошуля  $\mathcal{K}_B = B \otimes A^* \simeq \mathcal{K}_A^*$  двойственной к  $A$  квадратичной алгебры  $B = A^!$  двойствен комплексу Кошуля алгебры  $A$ , кошулевость квадратичной алгебры  $A$  равносильна кошулевости двойственной алгебры  $A^!$ .

**4.4. Спектральные последовательности.** Рассмотрим последовательность таблиц  $E_0, E_1, E_2, \dots$ , клетки которых занумерованы целыми числами  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$  так, что  $p$  увеличивается по горизонтали, а  $q$  по вертикали. Если при каждом  $r$

- в клетках таблицы  $E_r$  располагаются модули  $E_r^{p,q}$  и задан дифференциал  $d_r$  бистепени  $(r, 1-r)$  по  $(p, q)$ , действующий из клеток диагонали  $p+q = n$  в клетки следующей диагонали  $p+q = n+1$  со сдвигом на  $r$  единиц вправо:

$$d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q+1-r}, \quad d_r^2 = 0$$

- очередная таблица  $E_{r+1}$  состоит из когомологий предыдущей таблицы  $E_r$ :

$$E_{r+1}^{p,q} = \ker \left( d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q+1-r} \right) / d_r \left( E_r^{p-r, q-1+r} \right)$$

то говорят, что эти таблицы образуют *спектральную последовательность<sup>1</sup> когомологического типа<sup>2</sup>*. Скажем, что спектральная последовательность *стабилизируется*,

<sup>1</sup>В просторечии — *спектралку*.

<sup>2</sup>Согласно договорённостям из п° 4.1.2, в спектралке *гомологического типа* таблицы нумеруются верхним индексами:  $E^0, E^1, E^2, \dots$  и заполняются модулями  $E_{p,q}^r$  с дифференциалами

если содержимое каждой клетки с какого-то момента перестаёт меняться, т. е.

$$\forall (p, q) \exists N = N(p, q) : \forall r \geq N \quad d_r(E_r^{p,q}) = 0 \quad \text{и} \quad d_r(E_r^{p-r, q+r-1}) = 0. \quad (4-25)$$

Например, такое заведомо происходит, когда в одной из таблиц  $E_r$  на каждой диагонали  $p + q = \text{const}$  имеется лишь конечное число ненулевых модулей. Если спектральная последовательность стабилизируется, то модуль  $E_r^{p,q}$  с  $r \geq N(p, q)$  из условия (4-25) обозначается  $E_\infty^{p,q}$  и называется *предельным*. В этой ситуации говорят, что спектралка *сходится* к градуированным модулям  $E_\infty^n \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{p+q=n} E_\infty^{p,q}$  и пишут  $E_r^{p,q} \Rightarrow E_\infty^n$ . Спектральные последовательности являются основным инструментом для получения информации о когомологиях комплексов, тем или иным способом «собранных» из более элементарных комплексов.

**Предложение 4.3 (Спектральная последовательность фильтрованного комплекса)**  
Пусть комплекс  $C$  обладает такой убывающей системой подкомплексов<sup>1</sup>  $F^p C \subseteq C$ ,

$$C \supseteq \dots \supseteq F^{p-1}C \supseteq F^p C \supseteq F^{p+1}C \supseteq \dots \supseteq 0, \quad (4-26)$$

что для каждого  $n \in \mathbb{Z}$  подмодули  $F^p C^n$  совпадают с  $C^n$  при всех  $p \ll 0$  и зануляются при всех  $p \gg 0$ . Тогда существует спектральная последовательность с

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(\text{Gr}^p C), \quad \text{где} \quad \text{Gr}^p C \stackrel{\text{def}}{=} F^p C / F^{p+1} C,$$

сходящаяся к присоединённым факторам  $\text{Gr}^p H^{p+q}(C) \stackrel{\text{def}}{=} F^p H^{p+q}(C) / F^{p+1} H^{p+q}(C)$  убывающей фильтрации  $F^\bullet H(C)$  на модуле когомологий  $H(C)$ , относящей в подмодуль  $F^p H(C) \subseteq H(C)$  все коциклы, лежащие в подкомплексе  $F^p C$ , по модулю всех попавших в этот подкомплекс кограниц.

**Доказательство.** Расположим в столбцах таблицы  $E_0$  фактор комплексы  $\text{Gr}^p C$  так, чтобы дифференциал комплекса  $C$  действовал в них снизу вверх, а присоединённые факторы каждого модуля  $C^n$  из комплекса  $C$  располагались на диагонали  $p + q = n$ , т. е. положим  $E_0^{p,q} = \text{Gr}^p C^{p+q}$ . Обозначим через  $\pi : F^p C \twoheadrightarrow \text{Gr}^p C$  каноническую проекцию с ядром  $F^{p+1} C$ , и для каждого  $r$  рассмотрим в модуле  $F^p C^{p+q}$ , который накрывает  $E_0^{p,q}$  при этой проекции, подмодуль

$$Z_r^{p,q} = \{c \in F^p C^{p+q} \mid dc \in F^{p+r} C^{p+q}\}.$$

При  $r \rightarrow \infty$  он аппроксимирует «снаружи» лежащие в  $F^p C^{p+q}$  коциклы дифференциала  $d$  в том смысле, что с ростом  $r$  кограницы элементов из  $Z_r^{p,q}$  оказываются во всё более глубоких стратах фильтрации и полностью зануляются при  $r \gg 0$ . В том же самом смысле кограницы дифференциала  $d$ , лежащие в  $F^p C^{p+q}$ , аппроксимируются «изнутри» подмодулями  $dF^{p-r} C^{p+q} \cap F^p C^{p+q} = dZ_r^{p-r, q+r-1}$ , которые содержатся в подмодуле всех кограниц  $dC^{p+q-1} \cap F^p C^{p+q}$  и совпадают с ним при  $r \gg 0$ .

$\partial_r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r, q+r-1}^r$  бистепени  $(-r, r-1)$ , бьющими из клеток диагонали  $p + q = n$  в клетки предыдущей диагонали  $p + q = n - 1$  со сдвигом на  $r$  единиц в влево.

<sup>1</sup>Это означает, что  $d_c(F^p C) \subseteq F^p C$  при всех  $p \in \mathbb{Z}$ .

Приступим к построению спектралки. Ядро выходящего из клетки  $(p, q)$  дифференциала  $d : E_0^{p,q} \rightarrow E_0^{p,q+1}$  равно  $\pi Z_1^{p,q}$ , а образ дифференциала  $d : E_0^{p,q-1} \rightarrow E_1^{p,q}$ , входящего в эту клетку, равен  $\pi dZ_0^{p,q-1}$ . Тем самым, таблица когомологий  $E_1 = H(E_0)$  имеет в клетке  $(p, q)$  модуль

$$\begin{aligned} E_1^{p,q} = H^{p+q}(\text{Gr}^p C) &= \frac{\pi Z_1^{p,q}}{\pi dZ_0^{p,q-1}} \simeq \frac{Z_1^{p,q} + F^{p+1}C^{p+q}}{dZ_0^{p,q-1} + F^{p+1}C^{p+q}} \simeq \\ &\simeq \frac{Z_1^{p,q}}{dZ_0^{p,q-1} + (Z_1^{p,q} \cap F^{p+1}C^{p+q})} \simeq \frac{Z_1^{p,q}}{dZ_0^{p,q-1} + Z_0^{p+1,q-1}} \end{aligned}$$

(в последних двух переходах мы воспользовались перечисленными в [упр. 4.18](#) ниже стандартными соображениями из линейной алгебры, включением  $dZ_0^{p,q-1} \subset Z_1^{p,q}$  и равенством  $Z_1^{p,q} \cap F^{p+1}C^{p+q} = Z_0^{p+1,q-1}$ ).

УПРАЖНЕНИЕ 4.18. Покажите, что во всяком модуле для любых подмодулей  $V$  и  $W \supset U$  имеют место равенство  $W \cap (U + V) = U + (W \cap V)$  и естественные изоморфизмы

$$\frac{W + V}{V} \simeq \frac{W}{V \cap W} \quad \text{и} \quad \frac{W + V}{U + V} \simeq \frac{W}{U + (V \cap W)}.$$

Поскольку  $dZ_1^{p,q} \subset Z_1^{p+1,q}$  и  $d^2 = 0$ , дифференциал комплекса  $C$  корректно факторизуется до дифференциала бистепени  $(1, 0)$  на таблице  $E_1$

$$d : E_1^{p,q} = \frac{Z_1^{p,q}}{dZ_0^{p,q-1} + Z_0^{p+1,q-1}} \rightarrow \frac{Z_1^{p+1,q}}{dZ_0^{p+1,q-1} + Z_0^{p+2,q-1}} = E_1^{p+1,q}.$$

Следующие таблицы  $E_2, E_3, \dots$  строятся дословно также. Для каждого  $r$  положим

$$E_r^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi Z_r^{p,q}}{\pi dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}} \simeq \frac{Z_r^{p,q} + F^{p+1}C^{p+q}}{dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} + F^{p+1}C^{p+q}} \simeq \frac{Z_r^{p,q}}{dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}$$

(мы пользуемся тем, что  $dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} \subset Z_r^{p,q}$  и  $Z_r^{p,q} \cap F^{p+1}C^{p+q} = Z_{r-1}^{p+1,q-1}$ ). Поскольку  $dZ_r^{p,q} \subset Z_r^{p+r,q-r+1}$  и  $d^2 = 0$ , дифференциал  $d$  комплекса  $C$  корректно факторизуется до дифференциала бистепени  $(p, 1-p)$  на таблице  $E_r$ :

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \simeq \frac{Z_r^{p,q}}{dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}} \rightarrow \frac{Z_r^{p+r,q-r+1}}{dZ_{r-1}^{p+1,q-1} + Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}} \simeq E_r^{p+r,q-r+1},$$

ядро которого изоморфно фактору подмодуля  $\{c \in Z_r^{p,q} \mid dc \in dZ_{r-1}^{p+1,q-1} + Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}\}$  по его пересечению с  $dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}$ . Если  $dc = dz' + z''$ , где  $z' \in Z_{r-1}^{p+1,q-1}$ ,  $z'' \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}$ , то элемент  $c' = c - z'$  имеет  $dc' = z'' \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}$ . Поэтому каждый элемент из  $\ker d_r^{p,q}$  является классом некоторого элемента  $c' \in Z_r^{p,q}$  с  $dc' \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}$ . Все такие  $c'$  образуют подмодуль  $Z_{r+1}^{p,q} \subset Z_r^{p,q}$ . Мы заключаем, что

$$\ker d_r^{p,q} \simeq \frac{Z_{r+1}^{p,q}}{Z_{r+1}^{p,q} \cap (dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} + Z_{r-1}^{p+1,q-1})}.$$

Снова пользуясь тем, что  $dZ_{r-1}^{p-r+1, q+r-2} \subset Z_{r+1}^{p, q}$  и  $Z_{r+1}^{p, q} \cap Z_{r-1}^{p+1, q-1} = Z_r^{p+1, q-1}$ , получаем

$$\ker d_r^{p, q} \simeq \frac{Z_{r+1}^{p, q}}{dZ_{r-1}^{p-r+1, q+r-2} + Z_r^{p+1, q-1}}. \quad (4-27)$$

Образ приходящего в клетку  $(p, q)$  дифференциала  $d_r^{p-r, q+r-1} : E_r^{p-r, q+r-1} \rightarrow E_r^{p, q}$  имеет вид  $dZ_r^{p-r, q+r-1} / dZ_{r-1}^{p-r+1, q+r-2}$ . Факторизуя по нему ядро (4-27) получаем

$$H^{p, q}(E_r) \simeq \frac{Z_{r+1}^{p, q}}{dZ_r^{p-r, q+r-1} + Z_r^{p+1, q-1}} \simeq E_{r+1}^{p, q}.$$

Таким образом, таблицы  $E_r$  образуют спектральную последовательность с нужным  $E_1$ . Модули, из которых состоят все таблицы  $E_r$ , являются подфакторами в  $C$ , и дифференциалы во всех таблицах являются корректно определёнными ограничениями дифференциала  $d$  комплекса  $C$  на эти подфакторы.

Наложённые на фильтрацию  $F^\bullet C$  условия гарантируют, что на каждой диагонали таблицы  $E_0$  имеется лишь конечное число ненулевых модулей. Поэтому спектральная последовательность  $E_r$  сходится к градуированным модулям  $E_\infty^n = \bigoplus_{p+q=n} E_\infty^{p, q}$  компонентами

$$E_\infty^{p, q} = \frac{\pi\{c \in F^p C^{p+q} \mid dc = 0\}}{\pi\{c \in C^{p+q-1} \mid dc \in F^p C^{p+q}\}} \simeq \text{Gr}^p H^{p+q}(C),$$

что и утверждалось. □

**Пример 4.7** (двучленная фильтрация)

Точная тройка комплексов  $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$  задаёт на среднем комплексе  $V$  двучленную фильтрацию  $V = F^0 V \supset U = F^1 V \supset 0 = F^2 V$  с присоединёнными факторами  $\text{Gr}^0 V = V/U = W$  и  $\text{Gr}^1 V = U/0 = U$ . В этом случае таблица  $E_1$  спектральной последовательности из [предл. 4.3](#) сосредоточена в двух столбцах  $p = 0, 1$  и имеет вид

$$H^{q+1}(W) \xrightarrow{d_V} H^{q+2}(U)$$

$$H^q(W) \xrightarrow{d_V} H^{q+1}(U)$$

$$H^{q-1}(W) \xrightarrow{d_V} H^q(U)$$

$$H^{q-2}(W) \xrightarrow{d_V} H^{q-1}(U),$$

где каждая горизонтальная стрелка переводит являющийся  $d_W$ -коциклом класс элемента  $v \in V$  в факторе  $W = V/U$  в когомологический класс элемента  $d_V v$ , т. е. совпадает со связывающим гомоморфизмом<sup>1</sup>  $\delta$  из длинной точной последовательности

<sup>1</sup>См. [предл. 4.1](#) на стр. 70.

когомологий точной тройки  $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$ . Таблица  $E_2 = H(E_1)$  уже является предельной таблицей  $E_\infty$  и состоит из присоединённых факторов индуцированной двучленной фильтрации на  $H(V)$ , т. е. при каждом  $n$  мы имеем точную тройку

$$\operatorname{coker}(H^{n-1}(W) \xrightarrow{\delta} H^n(U)) \hookrightarrow H^n(V) \twoheadrightarrow \ker(H^n(W) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(U)),$$

что несёт ровно ту же информацию об  $H(V)$ , что и длинная точная последовательность когомологий  $\dots \rightarrow H^{n-1}(W) \xrightarrow{\delta} H^n(U) \rightarrow H^n(V) \rightarrow H^n(W) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(U) \rightarrow \dots$ .

#### 4.4.1. Спектральные последовательности бикомплекса. Тотальный комплекс<sup>1</sup>

$$C^n = \operatorname{Tot}^n(V) = \bigoplus_{p+q=n} V^{p,q}$$

каждого бикомплекса  $V = V^{p,q}$  обладает двумя симметричными фильтрациями, переводимыми одна в другую отражением  $p \leftrightarrow q$  относительно диагонали  $p = q$ . Первая из них имеет

$$F^p \operatorname{Tot}^n(V) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{v \geq p} V^{v, n-v} \quad (4-28)$$

и задаёт убывающую фильтрацию на  $H^n(\operatorname{Tot}(V))$  с присоединёнными градуированными факторами, которые можно вычислять при помощи спектральной последовательности из [предл. 4.3](#). Поскольку горизонтальная компонента  $d_1 : V^{p,q} \rightarrow V^{p+1,q}$  дифференциала тотального комплекса аннулирует присоединённые факторы фильтрации (4-28), дифференциал  $d = d_1 + d_2$  действует на них только своей вертикальной компонентой  $d_2 : V^{p,q} \rightarrow V^{p,q+1}$ . Поэтому стартовая таблица  $E_0$  спектралки, связанной фильтрацией (4-28), образована комплексами-столбцами  $V^{p,*}$  бикомплекса  $V$ . Следующая таблица  $E_1 = H(E_0)$  состоит из когомологий  $E_1^{p,q} = H_{d_2}^q(V^{p,*})$  дифференциала  $d_2$ , и  $d$  действует на них как  $d_1$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 4.19.** Убедитесь, что всякий антикоммутирующий с дифференциалами  $d_U, d_W$  комплексов  $U, W$  морфизм  $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\text{DG}}^0(U, W)$  также, как и морфизм комплексов, корректно задаёт морфизм когомологий  $\varphi_* : H(U) \rightarrow H(W)$ .

Таким образом, таблица  $E_2$  состоит из модулей когомологий  $E_2^{p,q} = H_{d_1}^p(H_{d_2}^q(V))$  дифференциала  $d_1$ , действующего на когомологиях дифференциала  $d_2$ .

Вторая убывающая фильтрация на  $\operatorname{Tot}^n(V)$  получается из первой перестановкой букв  $p, q$  и имеет

$$F^q \operatorname{Tot}^n(V) = \bigoplus_{v \geq q} V^{n-v, v}.$$

С нею связана спектралка с дифференциалами  $E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p-r+1, q+r}$ , которые наклоняются с ростом  $r$  влево и вверх, симметрично относительно диагонали  $p = q$  тому, как вели себя дифференциалы первой спектралки, а в клетке  $(p, q)$  её второй таблицы стоят  $H_{d_2}^p(H_{d_1}^q(V))$ . Чтобы сделать индексацию и поведение дифференциалов стандартными, какими они были описаны в начале [н° 4.4](#) на стр. [76](#), следует ещё раз поменять местами буквы  $p$  и  $q$ . Получаем

<sup>1</sup>См. [н° 4.1.3](#) на стр. [67](#).



Предложение 4.4

С каждым бикомплексом  $V$  связаны две спектральные последовательности с  $E_2$ -членами

$${}^I E_2^{p,q} = H_{d_1}^p \left( H_{d_2}^q(V) \right) \quad \text{и} \quad {}^{II} E_2^{p,q} = H_{d_2}^p \left( H_{d_1}^q(V) \right). \quad (4-29)$$

Если на каждой диагонали  $p + q = \text{const}$  бикомплекса  $V$  имеется лишь конечное число ненулевых модулей  $V^{p,q}$ , обе спектралки сходятся к присоединённым градуированным факторам некоторых убывающих с ростом  $p$  фильтраций на  $H^{p+q}(\text{Tot}(V))$ .  $\square$

**4.4.2. Спектральная последовательность точной пары.** Наиболее общим источником спектралок являются точные в каждом члене диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{i} & D, \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & & E \end{array} \quad (4-30)$$

называемые *точными парами*<sup>1</sup>. Композиция  $d \stackrel{\text{def}}{=} jk : E \rightarrow E$  имеет  $d^2 = jkjk = 0$  и называется *дифференциалом* точной пары (4-30). Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} iD & \xrightarrow{i} & iD, \\ & \swarrow k_1 & \searrow j_1 \\ & & H(E) \end{array}$$

в которой  $H(E) = \ker d / \text{im } d$ ,  $j_1 : i(x) \mapsto j(x)$ ,  $k_1 : [x] \mapsto k(x)$ , называется *производной* от точной пары (4-30).

Упражнение 4.20. Убедитесь, что морфизмы  $j_1, k_1$  определены корректно и производная тоже является точной парой.

Модуль  $H(E)$  в производной паре является подфактором исходного модуля  $E$ :

$$H(E) = \ker(jk) / \text{im}(jk) = k^{-1}(\ker j) / j(\text{im } k) = k^{-1}(\text{im } i) / j(\ker i).$$

Повторяя эти рассуждения  $m$  раз, приходим к  $m$ -той производной паре от (4-30)

$$\begin{array}{ccc} i^m D & \xrightarrow{i} & i^m D, \\ & \swarrow k_m & \searrow j_m \\ & & E_m \end{array}$$

где  $E_m = H(E_{m-1}) \simeq k^{-1}(\text{im } i^m) / j(\ker i^m)$  является подфактором модуля  $E$  из исходной пары (4-30), морфизм  $k_m : [x] \mapsto k(x)$  является (корректно определённым) ограничением исходного морфизма  $k$  на этот подфактор, а  $j_m = j i^{-m} : i^m(x) \mapsto j(x)$ .

Если точная пара (4-30) образована биградуированными модулями

$$D = \bigoplus D^{p,q}, \quad E = \bigoplus E^{p,q}$$

<sup>1</sup>По-английски *exact couple*.

а морфизмы  $i, j, k$  однородны бистепеней  $|i| = (-1, 1)$ ,  $|j| = (0, 0)$ ,  $|k| = (1, 0)$ , как в диаграмме на рис. 4◊1 ниже, то размещая модули  $E^{p,q}$  в клетки таблицы  $E_1$ , а их последовательные производные — в следующие таблицы  $E_2, E_3, \dots$ , мы получим спектральную последовательность, имеющую  $E_1 = E$  и для всех последующих  $r \geq 2$

$$E_r^{p,q} \simeq k^{-1} (i^{r-1} D^{p+r-1, q-r+1}) / j (\ker(i^{r-1}|_{D^{p,q}})) \quad (4-31)$$

$$\begin{array}{cccccccc} D^{p-1, q+2} & \xrightarrow{j} & E^{p-1, q+2} & \xrightarrow{k} & D^{p, q+2} & \xrightarrow{j} & E^{p, q+2} & \xrightarrow{k} & D^{p+1, q+2} & \xrightarrow{j} & E^{p+1, q+2} & \xrightarrow{k} & D^{p+2, q+2} \\ & \swarrow i & & & & \swarrow i & & & & \swarrow i & & & \\ D^{p-1, q+1} & \xrightarrow{j} & E^{p-1, q+1} & \xrightarrow{k} & D^{p, q+1} & \xrightarrow{j} & E^{p, q+1} & \xrightarrow{k} & D^{p+1, q+1} & \xrightarrow{j} & E^{p+1, q+1} & \xrightarrow{k} & D^{p+2, q+1} \\ & \swarrow i & & & & \swarrow i & & & & \swarrow i & & & \\ D^{p-1, q} & \xrightarrow{j} & E^{p-1, q} & \xrightarrow{k} & D^{p, q} & \xrightarrow{j} & E^{p, q} & \xrightarrow{k} & D^{p+1, q} & \xrightarrow{j} & E^{p+1, q} & \xrightarrow{k} & D^{p+2, q} \\ & \swarrow i & & & & \swarrow i & & & & \swarrow i & & & \\ D^{p-1, q-1} & \xrightarrow{j} & E^{p-1, q-1} & \xrightarrow{k} & D^{p, q-1} & \xrightarrow{j} & E^{p, q-1} & \xrightarrow{k} & D^{p+1, q-1} & \xrightarrow{j} & E^{p+1, q-1} & \xrightarrow{k} & D^{p+2, q-1} \end{array}$$

Рис. 4◊1. Биградуированная точная пара.

с дифференциалом  $d_r = j_{r-1} k_{r-1} = j i^{1-r} k : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$ , переводящим класс  $[e] \in k^{-1} (i^{r-1} D^{p+r-1, q-r+1})$  элемента  $e \in E$  с  $k(e) = i^{r-1}(x)$  в класс  $[j(x)]$  элемента  $j(x) \in E$ .

#### ПРИМЕР 4.8 (ФИЛЬТРОВАННЫЕ КОМПЛЕКСЫ)

Если у комплекса  $C$  имеется убывающая фильтрация подкомплексами  $F^p C \subset C$ , то точные тройки комплексов  $0 \rightarrow F^{p+1} C \xrightarrow{\iota} F^p C \xrightarrow{\pi} \text{Gr}^p C \rightarrow 0$  производят длинные точные последовательности когомологий

$$\dots \xrightarrow{\delta} H^n(F^{p+1} C) \xrightarrow{\iota_*} H^n(F^p C) \xrightarrow{\pi_*} H^n(\text{Gr}^p C) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(F^{p+1} C) \xrightarrow{\iota_*} \dots$$

которые собираются в точную пару биградуированных модулей

$$E^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} H^{p+q}(\text{Gr}^p C), \quad D^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} H^{p+q}(F^p C)$$

и однородных морфизмов

$$\begin{aligned} i &\stackrel{\text{def}}{=} \iota_* : H^{p+q}(F^p C) \rightarrow H^{p+q}(F^{p-1} C) \\ j &\stackrel{\text{def}}{=} \pi_* : H^{p+q}(F^p C) \rightarrow H^{p+q}(\text{Gr}^p C) \\ k &\stackrel{\text{def}}{=} \delta : H^{p+q}(\text{Gr}^p C) \rightarrow H^{p+q+1}(F^{p+1} C) \end{aligned}$$

бистепеней  $|i| = (-1, 1)$ ,  $|j| = (0, 0)$  и  $|k| = (1, 0)$ , как в диаграмме на предыдущей странице. Спектральная последовательность этой точной пары имеет

$$E_r^{p,q} \simeq \frac{\delta^{-1} \text{im} (i^{r-1} : H^{p+q+1}(F^{p+r} C) \rightarrow H^{p+q+1}(F^p C))}{\pi_* \ker (i^{r-1} : H^{p+q}(F^p C) \rightarrow H^{p+q}(F^{p-r+1} C))}. \quad (4-32)$$

Поскольку связывающий гомоморфизм  $\delta : H^{p+q}(F^p C / F^{p+1} C) \rightarrow H^{p+q+1}(F^{p+r} C)$  задается дифференциалом  $d : C \rightarrow C$ , числитель в (4-32) состоит из классов  $\pi$ -образов

элементов  $c \in F^p C^{p+q}$  с  $dc \in F^{p+r} C^{p+q+1}$  по модулю  $\pi dF^p C^{p+q-1}$ , т. е. в обозначениях из доказательства [предл. 4.3](#) на стр. 77 равен  $\pi Z_r^{p,q}$ . Знаменатель в (4-32) состоит из  $\pi_*$ -образов классов когомологий тех коциклов  $c \in F^{p+1} C^{p+q+1}$  которые лежат в  $dF^{p-r+1} C^{p+q}$ , и стало быть, изоморфен  $\pi dZ_{r-1}^{p-r+1, q+r-2}$ . Таким образом, при каждом  $r \geq 1$  таблица  $E_r$  спектралки (4-32) состоит из тех же подфакторов в  $C$ , что и таблица  $E_r$  у спектралки из [предл. 4.3](#). Поскольку дифференциалы обеих таблиц являются ограничениями дифференциала  $d: C \rightarrow C$  на эти подфакторы, спектральные последовательности совпадают друг с другом, начиная с таблицы  $E_1$ .

#### Предложение 4.5

Пусть в представленной на [рис. 4◊1](#) биградуированной точной паре при каждом  $n$  модули  $D^{p,q}$  с  $p+q=n$  зануляются при всех  $p \gg 0$  и становятся равными одному и тому же модулю  $H^n$  при  $p \ll 0$ , причём при этих  $p$  все морфизмы  $i: D^{p,q} \rightarrow D^{p-1, q+1}$  между модулями  $H^n$  тождественны. Тогда спектральная последовательность такой точной пары сходится к присоединённым градуированным факторам убывающих фильтраций на модулях  $H^n$  подмодулями  $F^p H^n = i^{m(p,n)}(D^{p,n-p})$ , где степень  $m(p,n)$  настолько велика, чтобы  $i^{m(p,n)}$  отображал  $D^{p,n-p}$  в  $H^n$ .

Доказательство. Согласно форм. (4-31) на стр. 82 при фиксированных  $p, q$  и  $r \gg 0$

$$\begin{aligned} E_r^{p,q} &\simeq \frac{k^{-1}(i^{r-1} D^{p+r-1, q-r+1})}{j(\ker(i^{r-1}|_{D^{p,q}}))} \simeq \frac{k^{-1}(0) \cap D^{p,q}}{j \ker(i^{m(p,n)}: D^{p,q} \rightarrow H_n)} \simeq \\ &\simeq \frac{\ker(k: E_r^{p,q} \rightarrow D^{p+1, q})}{j \ker i^{m(p,n)}} \simeq \frac{j D^{p,q}}{j \ker i^{m(p,n)}} \simeq \frac{D^{p,q}}{\ker i^{m(p,n)}} \simeq \text{im } i^{m(p,n)}. \end{aligned}$$

□

## Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.1. Транзитивность очевидна, рефлексивность — взять  $\xi = \text{Id}$ , кососимметричность: в силу возможности сокращать слева (соотв. справа), равенства  $\varphi = \psi\xi = \varphi\xi'\xi$  (соотв.  $\varphi = \xi\psi = \xi\xi'\psi$ ) влекут  $\xi'\xi = \text{Id}$  (соотв.  $\xi\xi' = \text{Id}$ ), а равенства  $\psi = \varphi\xi' = \psi\xi\xi'$  (соотв.  $\psi = \varphi\xi' = \psi\xi\xi'$ ) влекут  $\xi\xi' = \text{Id}$  (соотв.  $\xi\xi' = \text{Id}$ )

Упр. 1.6. Типичный ответ: « $\ln|x| + C$ , где  $C$  — произвольная константа» неверен<sup>1</sup>. На самом деле  $C$  является сечением *постоянного пучка*  $\mathbb{R}^\sim$  над несвязным открытым множеством  $\mathbb{R} \setminus 0$ .

Упр. 1.12. Элементу  $a \in F(A)$  отвечает естественное преобразование

$$f_X : \text{Hom}(A, X) \rightarrow F(X),$$

посылающее стрелку  $\varphi : A \rightarrow X$  в значение отображения  $F(\varphi) : F(A) \rightarrow F(X)$  на элементе  $a$ . Обратное отображение сопоставляет естественному преобразованию  $f_*$  значение отображения  $f_A : h^A(A) \rightarrow F(A)$  на элементе  $\text{Id}_A \in h^A(A)$ . Проверяется это с помощью построенной по произвольной стрелке  $\varphi : A \rightarrow X$  диаграммы

$$\begin{array}{ccc} h^A(A) = \text{Hom}(A, A) & \xrightarrow{h^A(\varphi)} & \text{Hom}(A, X) = h^A(X) \\ f_A \downarrow & & \downarrow f_X \\ F(A) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(X), \end{array} \quad (4-33)$$

верхняя строка которой переводит  $\text{Id}_A$  в  $\varphi$ , так что  $f_X(\varphi) = F(\varphi)(f_A(\text{Id}_A))$ .

Упр. 2.7. Отображения  $\text{Hom}_{\text{Mod-}B}(B, Y) \rightarrow Y$ ,  $\varphi \mapsto \varphi(1)$ , и  $Y \rightarrow \text{Hom}_{\text{Mod-}B}(B, Y) \rightarrow Y$ ,  $y \mapsto (\varphi : b \mapsto yb)$ , являются взаимно обратными  $A$ -линейными справа изоморфизмами.

Упр. 2.9. Отображения  $x \otimes_B b \mapsto xb$  и  $x \mapsto x \otimes \otimes_B 1$  являются взаимно обратными  $A$ -линейными справа изоморфизмами между  $X \otimes_B B$  и  $X$ .

Упр. 2.11. См. последний раздел 7.3.3 лекции <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/lec-07.pdf>.

Упр. 2.12. Непрерывному отображению  $f : |X| \rightarrow Y$  из  $\text{Hom}_{\mathcal{T}op}(|X|, Y)$  биективно соответствует естественное по  $[n] \in \text{Ob } \Delta$  преобразование  $f_n : X_n \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y)$  из  $\text{Hom}_{\text{pSh}}(X, S(Y))$ , сопоставляющее точке  $x \in X_n$  композицию

$$f \circ \iota|_{x \times \Delta^n} : \Delta^n \rightarrow |X| \rightarrow Y,$$

где  $\iota|_{x \times \Delta^n} : \Delta^n \rightarrow |X|$  это ограничение отображения факторизации<sup>2</sup>

$$\iota : \bigsqcup_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n \rightarrow |X|$$

на правильный симплекс  $\{x\} \times \Delta^n \subset X_n \times \Delta^n$  (убедитесь, что  $f_n$  функториально зависит от комбинаторного симплекса  $[n]$ ). Обратная биекция сопоставляет естественному

<sup>1</sup>И в былые годы абитуриентам мехмата случалось получать за такой ответ двойку на устном вступительном экзамене по математике.

<sup>2</sup>Непрерывного в силу определения фактор топологии.

по  $[n] \in \text{Ob } \Delta$  набору отображений  $f_n : X_n \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y)$  отображение  $|X| \rightarrow Y$ , переводящее класс точки  $(x, s) \in X_n \times \Delta^n$  по модулю соотношений  $(X(\varphi)x, s) = (x, \varphi s)$  в значение непрерывного отображения  $f_n(x) : \Delta^n \rightarrow Y$  в точке  $s \in \Delta^n$  (убедитесь, что это значение не зависит от выбора представителя  $(x, s)$  в его классе эквивалентности). Естественное преобразование  $t_Y : |S(Y)| \rightarrow Y$  переводит класс пары

$$(g : \Delta^n \rightarrow Y, t \in \Delta^n) \in S_n(Y) \times \Delta^n = \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y) \times \Delta^n,$$

представляющей точку из фактор пространства  $|S(Y)|$ , геометрической реализации симплициального множества  $S(Y)$ , в точку  $g(t) \in Y$  (убедитесь, что отображение  $t_Y$  корректно определено, непрерывно и функториально по топологическому пространству  $Y$ ). Действие естественного преобразования  $s_X : X \rightarrow S(|X|)$  над комбинаторным симплексом  $[n] \in \text{Ob } \Delta$  переводит точку  $x \in X_n$  в сингулярный симплекс

$$\iota|_{x \times \Delta^n} : \Delta^n \rightarrow |X|$$

топологического пространства  $|X|$  (убедитесь, что он функториален по  $[n] \in \text{Ob } \Delta$  и предпучку  $F \in \text{Ob } \mathcal{F}un(\Delta^{\text{op}}, \mathcal{S}et)$ ).

Упр. 2.14. Начальное множество и начальное топологическое пространство пусты, конечное множество и конечное топологическое пространство это одна точка. Начальный и конечный объекты категории групп это единичная группа<sup>1</sup>. В категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей начальный и конечный объект это ноль.

Упр. 2.15. В категории групп нулевым объектом является единичная группа. В категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей нулевой объект это нулевая абелева группа.

Упр. 2.19. Гомоморфизмы коммутативных колец  $A \leftarrow K \rightarrow A$  наделяют  $A$  и  $B$  структурами  $K$ -алгебр, и копроизведение  $A \otimes_K B$  это тензорное произведение  $K$ -алгебр, т. е. фактор свободного  $K$ -модуля с базисом  $A \times B$  (произведение в категории множеств) по подмодулю, порождённому всевозможными разностями

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \kappa_1 b_1 + \kappa_2 b_2) - \sum_{i,j=1}^2 \lambda_i \kappa_j (a_i, b_j)$$

с  $\lambda_i, \kappa_i \in K, a_i \in A, b_j \in B$  (ср. с н° 2.2). Произведение на классах эквивалентности задаётся покомпонентно:  $(a_1 \otimes_K b_1) \cdot (a_2 \otimes_K b_2) = (a_1 a_2) \otimes_K (b_1 b_2)$ .

Упр. 2.23. Применяя первое условие Ore<sup>2</sup> к произвольным элементам  $s = s_1$  и  $\varrho = s_2$  из  $S$  получаем ведущие из  $s_1$  и  $s_2$  стрелки  $\lambda$  и  $t$  с общим концом  $\lambda s_1 = t s_2 \in S$ . Применяя второе условие Ore<sup>3</sup> к паре стрелок  $\varphi, \psi \in \text{Hom}_S(s, s')$ , где  $s' = \varphi s = \psi s$ , получаем такую стрелку  $t \in \text{Hom}_S(s', t s')$ , что  $t \varphi = t \psi$ .

Упр. 2.24. Так как по предыдущему упр. 2.23 категория  $S$  фильтрующаяся, у дробей  $s_1^{-1} \varrho_1$  и  $s_2^{-1} \varrho_2$  есть общий знаменатель  $t = \lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$  с  $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ . Тогда  $s_1^{-1} \varrho_1 + s_2^{-1} \varrho_2 = t^{-1}(\lambda_1 \varrho_1 + \lambda_2 \varrho_2)$ .

<sup>1</sup>Т. е. группа, состоящая только из единичного элемента.

<sup>2</sup>См. формулу (LO<sub>1</sub>) на стр. 34.

<sup>3</sup>См. формулу (LO<sub>2</sub>) на стр. 34.

Упр. 3.1. Всё вытекает из дистрибутивности:  $\varphi\alpha = \varphi\beta \iff \varphi(\alpha - \beta) = 0$ .

Упр. 3.3. Морфизмы  $\nabla_Y : Y \oplus Y \rightarrow Y$ ,  $\varphi \oplus \psi : X \oplus X \rightarrow Y \oplus Y$  и  $\Delta_X : X \rightarrow X \oplus X$  задаются матрицами

$$\begin{pmatrix} \text{Id}_Y \\ \text{Id}_Y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}, \quad (\text{Id}_X \quad \text{Id}_X),$$

произведение которых равно  $1 \times 1$ -матрице  $(\varphi + \psi)$ .

Упр. 3.4. Инъективность  $\iota_\nu$  и сюръективность  $\pi_\nu$  вытекает из равенства  $\pi_\nu \iota_\nu = \text{Id}_{X_\nu}$ . Инъективность  $\sigma$  редуцируется к инъективности морфизма  $X \oplus Y \rightarrow X \oplus Y$  между суммами двух объектов при помощи леммы Цорна: рассмотрите чум таких подмножеств  $S \subset N$ , что отображение  $\prod_{\nu \in S} X_\nu \rightarrow \prod_{\nu \in S} X_\nu$  инъективно.

Упр. 3.8. Ядро задаёт правый сопряжённый функтор к функтору  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}r$ ,  $X \mapsto \{X \rightarrow 0\}$ , а коядро — левый сопряжённый функтор к функтору  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}r$ ,  $X \mapsto \{X \rightarrow 0\}$ .

Упр. 3.9. Коядро является фактором по замыканию образа. Вложение дискретной группы  $\mathbb{Q}$  в  $\mathbb{R}$  со стандартной топологией и плотные обмотки торов мономорфны и эпиморфны, но не обратимы.

Упр. 3.10. Если  $\varphi$  обратим, то он не делит нуль ни справа, ни слева, откуда  $\ker \varphi = 0$  и  $\text{coker } \varphi = 0$ . Если  $\ker \varphi = 0$  и  $\text{coker } \varphi = 0$ , то по ?? диаграмма (3-6) приобретает вид

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longleftarrow & Y & \xleftarrow{\text{Id}_Y} & Y \\ & & \uparrow \varphi & & \uparrow \bar{\varphi} \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\text{Id}_X} & X, \end{array}$$

и обратимость  $\bar{\varphi}$  влечёт обратимость  $\varphi$ . Если  $\varphi$  мономорфен или эпиморфен, его каноническое разложение (3-6) имеет, соответственно, вид

$$\begin{array}{ccc} \text{coker } \varphi \xleftarrow{\varsigma} Y \xleftarrow{\kappa'} \ker \varsigma & & 0 \longleftarrow Y \xrightarrow{\text{Id}_Y} Y \\ \uparrow \varphi & \text{или} & \uparrow \varphi \\ 0 \longrightarrow X \xrightarrow{\text{Id}_X} X & & \ker \varphi \xrightarrow{\kappa} X \xrightarrow{\varsigma'} \text{coker } \kappa, \\ & & \uparrow \bar{\varphi} \end{array}$$

и  $\bar{\varphi}$  задаёт канонические изоморфизмы  $X \simeq \ker \varsigma$  и  $\text{coker } \kappa \simeq Y$ .

Упр. 3.11.  $\beta'$  и  $\varphi$  выражаются друг через друга как  $\beta' = \pi_A \varphi$  и  $\varphi = \iota_A \beta' + \iota_B \beta$ . Симметрично,  $\alpha'$  и  $\varphi^{-1}$  связаны формулами  $\alpha' = \varphi^{-1} \iota_B$  и  $\varphi^{-1} = \alpha \pi_A + \alpha' \pi_B$  (убедитесь, что и  $\varphi$ , и  $\varphi^{-1}$  в обоих случаях обратимы!). Точная тройка абелевых групп

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{z \mapsto 2z} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(2) \longrightarrow 0$$

нерасщепима, т. к.  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(2), \mathbb{Z}) = 0$ .

Упр. 3.12. Если функтор  $F$  сохраняет точность троек, то он переводит каноническое разложение (3-7) любого морфизма  $\varphi$  в каноническое разложение морфизма  $F(\varphi)$ , в частности — переводит  $\text{im } \varphi$  в  $\text{im}(F(\varphi))$ .

Упр. 3.18.  $\mathbb{Q}$  и  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  очевидно удовлетворяют условиям лем. 3.2 на стр. 54. Гомоморфизм  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  с  $\varphi(a) \neq 0$  сначала строится на порождённом элементом  $a$  подмодуле

$\mathbb{Z} \cdot a$  (изоморфном либо  $\mathbb{Z}$  либо  $\mathbb{Z}/(n)$ ), а потом по инъективности продолжается на весь модуль  $A$ .

Упр. 3.19. Согласно [предл. 3.3](#) на стр. 49 все четыре стрелки в декартовом квадрате

$$\begin{array}{ccccc} A \times_M B & \xrightarrow{\alpha'} & B & \xleftarrow{\kappa} & K \\ \beta' \downarrow & & \downarrow \beta & & \\ A & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\pi} & M/A \end{array}$$

инъективны. Всякий подобъект  $\kappa : K \hookrightarrow B$ , для которого  $\pi\beta\kappa = 0$  допускает такое вложение  $\kappa' : K \hookrightarrow B = \ker \pi$ , что  $\alpha\kappa' = \beta\kappa'$ . Поэтому он вкладывается и в  $A \times_M B$ .

Упр. 3.20. Подобъекты любого объекта  $X$  инъективно вкладываются в множество подгрупп группы  $h^P(X) = \text{Hom}(P, X)$ .

Упр. 3.21. Для любого  $Y \in \text{Ob } \mathcal{A}$  функтор  $h_Y : Z \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, Y)$  переведёт точную последовательность  $\text{Hom}(G, X) \otimes G \xrightarrow{c} X \rightarrow \text{coker } c \rightarrow 0$  в точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\text{coker } c, Y) \otimes \text{Hom}(X, Y) \xrightarrow{c^*} \text{Hom}(G, Y)^{\text{Hom}(G, X)},$$

в которой  $c^*$  сопоставляет стрелке  $\varphi : X \rightarrow Y$  график функции

$$h^G(\varphi) = \varphi^* : \text{Hom}(G, X) \rightarrow \text{Hom}(G, Y), \quad \psi \mapsto \varphi\psi.$$

Инъективность  $c^*$  равносильна инъективности  $h^G : \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(h^G(X), h^G(Y))$ . Если  $\text{coker } c = 0$ , отображение  $c^*$  инъективно и  $h^G$  строг. Наоборот, если  $h^G$  строг, то  $\text{Hom}(\text{coker } c, Y) = 0$  для всех  $Y$ , и беря  $Y = \text{coker } c$ , заключаем, что  $Y = 0$ .

Упр. 3.22. Воспользуйтесь функториальным по  $X$  изоморфизмом  $\text{Hom}_R(X, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X \otimes_{\mathbb{Z}} R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ .

Упр. 3.23. Если обе стрелки в  $A \hookrightarrow B \hookrightarrow C$  являются существенными расширениями, то для любого подобъекта  $S \hookrightarrow C$  сквозное отображение  $\beta : B \hookrightarrow C \twoheadrightarrow C/S$  имеет ненулевое ядро  $K$ , и сквозное отображение  $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow B/K$  имеет ненулевое ядро. Поэтому композиция  $A \rightarrow B/K = \text{im } \beta \rightarrow C/S$  тоже имеет ненулевое ядро.

Упр. 3.24. Для любого подобъекта  $N \hookrightarrow E_\omega$  в силу гротендиковости имеем  $N \simeq N \times_{E_\omega} E_\omega \simeq N \times_{E_\omega} \text{colim}_{\nu < \omega} E_\nu \simeq \text{colim}_{\nu < \omega} N \times_{E_\omega} E_\nu$ . Поэтому найдётся такой  $\eta$ , что  $N \times_{E_\omega} E_\eta \neq 0$ , и стало быть,  $N$  имеет непустое пересечение со всеми  $E_\tau$  с  $\tau \geq \eta$ . Так как расширение  $X \hookrightarrow E_\eta$  и все расширения  $E_\nu \hookrightarrow E_\eta$  с  $\nu < \eta$  существенны, то и  $X$ , и все  $E_\nu$  имеют непустое пересечение с ненулевым подобъектом  $N \times_{E_\omega} E_\eta \hookrightarrow E_\eta$ , а значит и с  $N$ , поскольку каноническая стрелка  $N \times_{E_\omega} E_\eta \hookrightarrow N$  тоже инъективна.

Упр. 3.25. Для конечной диаграммы компактных объектов  $K_\kappa$  и любой фильтрованной диаграммы  $X_\nu$  имеем

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\text{colim } K_\kappa, \text{colim } X_\nu) &= \lim \text{Hom}(K_\kappa, \text{colim } X_\nu) = \lim_{\kappa} \text{colim}_{\nu} \text{Hom}(K_\kappa, X_\nu) = \\ &= \text{colim}_{\nu} \lim_{\kappa} \text{Hom}(K_\kappa, X_\nu) = \text{colim}_{\nu} \text{Hom}(\text{colim } K_\kappa, X_\nu) \end{aligned}$$

(в третьем равенстве мы воспользовались [предл. 2.9](#) на стр. 39).

Упр. 3.26. Поскольку всякий эпиморфизм  $\pi : R^m \rightarrow P$  расщепляется,  $\ker \pi$  является прямым слагаемым в  $R^m$ . Поэтому имеется сюръекция  $R^m \rightarrow \ker \pi$ .

Упр. 4.1. Пусть стрелка  $\alpha$  ведёт в объект  $C$ , а  $\beta$  — из  $C$ . Поскольку  $\beta\alpha = 0$ , вложение  $\alpha' : \text{im } \alpha \hookrightarrow C$  и сюръекция  $\beta' : C \twoheadrightarrow \text{im } \beta$  пропускаются, соответственно, через  $\ker \beta$  и  $\text{coker } \alpha$  при помощи единственных стрелок  $\iota$  и  $\pi$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{coker } \kappa = \text{im } \beta & & \\
 & & \uparrow \beta' & \swarrow \pi & \\
 \ker \zeta = \text{im } \alpha & \xrightarrow{\alpha'} & C & \xrightarrow{\zeta} & \text{coker } \alpha \\
 & \searrow \iota & \downarrow \kappa & & \\
 & & \ker \beta & & 
 \end{array} \tag{4-34}$$

Покажем, что  $\iota$  является ядром, а  $\pi$  — коядром композиции  $\zeta\kappa : \ker \beta \rightarrow \text{coker } \alpha$ . Тогда  $\iota$  автоматически будет инъективен,  $\pi$  — сюръективен, а  $\text{coker } \iota = \text{coim}(\zeta\kappa)$  будет канонически изоморфен  $\text{im}(\zeta\kappa) = \ker \pi$  в силу абелевости объёмлющей категории. Во-первых,  $\zeta\iota = \zeta\alpha' = 0$ . Во-вторых, если  $\zeta\kappa\eta = 0$  для некоторого  $\eta : X \rightarrow \ker \beta$ , то существует единственный такой  $\eta' : X \rightarrow \ker \zeta = \text{im } \alpha$ , что  $\kappa\eta = \alpha'\eta' = \kappa\eta'$ . В силу инъективности  $\kappa$ , это равносильно  $\eta = \eta'$ . Рассуждение про  $\pi$  полностью симметрично.

Упр. 4.2. Пусть симплекс  $x$  имеет вершины  $0, 1, \dots, n$ , упорядоченные по возрастанию.

Цепь  $\partial^2 x = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^n (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i (0, 1, \dots, n)$  является суммой  $(n-2)$ -мерных симплексов вида

$$0, 1, \dots, \hat{\mu}, \dots, \hat{\nu}, \dots, n,$$

где  $\mu < \nu$  и крышки означают пропуск  $\mu$ -той и  $\nu$ -той вершины. Каждый такой симплекс появляется в сумме ровно два раза: как  $\partial_\mu \partial_\nu x$  и как  $\partial_{\nu-1} \partial_\mu x$ , и эти вхождения имеют противоположные знаки.

Упр. 4.3. В обозначениях с рис. 1◊1 на стр. 8 модуль  $C_2 \simeq \mathbb{Z}^2$  имеет базис  $f_1, f_2$ , модуль  $C_1 \simeq \mathbb{Z}^3$  имеет базис  $e_1, e_2, e_3$ , модуль  $C_0 \simeq \mathbb{Z}$  имеет базис  $e$ , а граничный оператор действует на симплексы триангуляции по формулам<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
 \partial(f_1) &= e_1 - e_3 + e_2 & \partial(f_2) &= e_2 - e_3 + e_1 \\
 \partial(e_1) &= \partial(e_2) = \partial(e_3) = v - v = 0 \\
 \partial(v) &= 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, комплекс имеет вид  $0 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ , где стрелка  $\mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$  нулевая, а стрелка  $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^3$  имеет матрицу  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ . Поэтому  $H_2 \simeq \mathbb{Z}$  с базисом  $f_1 - f_2$ ,

$H_1 \simeq \mathbb{Z}^2$  с базисом  $e_1, e_2$ ,  $H_0 \simeq \mathbb{Z}^2$  с базисом  $v$ .

Упр. 4.6.  $\varphi(\xi)$  является коциклом, поскольку  $d_W \varphi \xi = \varphi d_V \xi = 0$ . Класс  $\varphi(\xi + d_V \zeta) = \varphi(\xi) + d_W(\varphi(\zeta))$  по модулю кограниц совпадает с классом  $\varphi(\xi)$ .

<sup>1</sup>См. формулу (1-7) на стр. 8.



Упр. 4.10. Пусть  $\psi : U \rightarrow V$  и  $d_V \psi = \psi d_U$ . Тогда для  $\varphi = \delta_W \gamma + \gamma d_V$  имеем  $\varphi \psi = \delta_W \gamma \psi + \gamma d_V \psi = \delta_W \gamma \psi + \gamma \psi d_U$ .

Упр. 4.11. Если  $A$  стягиваем, то единственные отображения  $\iota : 0 \rightarrow A$  и  $\pi : A \rightarrow 0$  являются взаимно обратными изоморфизмами в категории  $\mathcal{H}o$ , т. к.  $\pi \iota = \text{Id}_0$ , а  $\iota \pi = 0 \sim \text{Id}_A$ .

Упр. 4.12. Первое проверяется прямой выкладкой:

$$\begin{pmatrix} -d_V & 0 \\ 1 & d_V \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -d_V & 0 \\ 1 & d_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d_V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & d_V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Id}_{\text{Con}(\text{Id}_V)}.$$

Аналогично проверяется, что  ${}^1 \iota_{\text{Id}} = [d, \gamma']$  для  $\gamma' : v \mapsto \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$ , а  $\pi_{\text{Id}} = [d, \gamma'']$  для

$$\gamma'' : \begin{pmatrix} v_1 \\ v \end{pmatrix} \mapsto v_1.$$

Упр. 4.13. Базисный моном  $\xi_I \otimes x^M = \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k} \otimes x_1^{m_1} \dots x_m^{m_m}$  переводится дифференциалом  $d$  в

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i \in I} m_i \right) \cdot \xi_I \otimes x^M + \\ & + \sum_{j \notin I} \sum_{v=1}^k (-1)^{v-1} m_{i_v} \cdot \xi_j \wedge \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{\xi}_{i_v} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k} \otimes x_1^{m_1} \dots x_{i_v}^{m_{i_v}-1} \dots x_j^{m_j+1} \dots x_n^{m_n}, \end{aligned}$$

а дифференциалом  $d\partial$  — в

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{j \notin I} (m_j + 1) \right) \cdot \xi_I \otimes x^M + \\ & + \sum_{j \notin I} \sum_{v=1}^k (-1)^v m_{i_v} \cdot \xi_j \wedge \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{\xi}_{i_v} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k} \otimes x_1^{m_1} \dots x_{i_v}^{m_{i_v}-1} \dots x_j^{m_j+1} \dots x_n^{m_n}. \end{aligned}$$

где «крышка» означает пропуск стоящего под нею сомножителя.

Упр. 4.16. Выберем в  $V \otimes V$  и  $V^* \otimes V^*$  двойственные базисы  $\xi_\nu$  и  $\xi_\nu^*$  так, чтобы  $\xi_\nu$  с  $\nu \in N$  составляли базис в подпространстве  $I \subset V \otimes V$ , а  $\xi_\mu^*$  с  $\mu \notin N$  — базис в  $I^\perp \subset V^* \otimes V^*$ . Поскольку  $\kappa = \sum_i e_i \otimes x_i$ , где  $e_i$  и  $x_i$  суть двойственные базисы в  $V$  и в  $V^*$ , его квадрат

$$\kappa^2 = - \sum_{ij} (e_i \otimes e_j) \otimes (x_i \otimes x_j) \pmod{I \otimes (V^* \otimes V^*) + (V \otimes V) \otimes I^\perp}$$

является классом (по модулю соотношений в алгебре  $A \otimes B$ ) эндоморфизма

$$-\text{Id}_{V \otimes V} \in (V \otimes V) \otimes (V^* \otimes V^*) \simeq \text{End}(V \otimes V),$$

который в двойственных базисах  $\xi_\nu$  и  $\xi_\nu^*$  в  $V \otimes V$  и  $V^* \otimes V^*$  тоже запишется как

$$\kappa^2 = - \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \otimes \xi_{\alpha}^* = - \sum_{\nu \in N} \xi_{\nu} \otimes \xi_{\nu}^* - \sum_{\mu \notin N} \xi_{\mu} \otimes \xi_{\mu}^* \in I \otimes (V^* \otimes V^*) + (V \otimes V) \otimes I^\perp.$$

<sup>1</sup>Напомним, что  $\iota_{\text{Id}} : v \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ , а  $\pi_{\text{Id}} : \begin{pmatrix} v_1 \\ v \end{pmatrix} \mapsto v_1$ .

Упр. 4.20. Корректность  $j_1: j(x)$  коцикл, т. к.  $dj(x) = jkj(x) = 0$ ; если  $i(x') = i(x_2)$ , то  $x_2 = x' + k(y)$ , и  $j(x_2) = j(x') + dy$  когомологичен  $j(x')$ . Корректность  $k_1: k(d(E)) \subset kj(D) = 0$ . Равенство нулю композиций  $ik_1$ ,  $j_1i$  и  $k_1j_1$  вытекает из равенства нулю композиций  $ik$ ,  $ji$  и  $kj$ . Если  $i(i(x)) = 0$ , то  $i(x) = k(y)$ , причём  $d(y) = jk(y) = j(i(x)) = 0$ , т. е.  $\ker(i) \subset k_1(H(E))$ . Если  $j_1(i(x)) \in d(E)$ , т. е.  $j(x) = jk(y)$ , то  $x = k(y) + i(x')$  и  $i(x) = i^2(x')$ , т. е.  $\ker j_1 \subset i^2(D)$ . Если  $k_1(y) = k(y) = 0$ , то  $y = j(x) = j_1(i(x))$ , т. е.  $\ker(k_1) \subset j_1(i(D))$ .