§4. Комплексы и когомологии

4.1. Исчисление градуированных объектов. Диаграмма $V : \mathbb{Z} \to \mathcal{A}$, где $\mathbb{Z}$ рассматривается как дискретная категория, называется *градуированным объектом* абелевой категории $\mathcal{A}$. Такой объект представляет собою набор занумерованных целыми числами объектов $V^k \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$, которые называются *однородными компонентами* степени k в V. Если компоненты $V^k = 0$ при всех $k \ll 0$ (соотв. при всех $k \gg 0$) градуированный объект V называется *ограниченным слева* (соотв. *справа*).

Через $V[m]$ обозначается градуированный объект с компонентами

$$V[m]^k \overset{\text{def}}{=} V^{k+m} .$$

Для градуированного объекта $V : \mathbb{Z} \to \mathcal{A}$ мы по определению полагаем

$$V_k \overset{\text{def}}{=} V^{-k} . \tag{4-1}$$

Сопоставление $k \mapsto V_k$ является композицией функтора V с оборачивающей стандартный линейный порядок на $\mathbb{Z}$ инволюцией $k \mapsto -k$. При этом

$$V[m]_k = V[m]^{-k} = V^{m-k} = V_{k-m} .$$

Спуск и подъём индексов позволяет избегать отрицательных чисел. Верхняя индексация обычно называется *когомологической*, а нижняя — *гомологической*. В категориях модулей про элементы $v \in V_k$ говорят, что они имеют *нижнюю* (или *гомологическую*) степень k или *верхнюю* (или *когомологическую*) степень $-k$. Вычет $k \pmod 2$ называется *чётностью* элемента $v \in V^k$ и обозначается $|v| \in \mathbb{Z}/(2)$. Чётность не зависит от того, верхние или нижние индексы используются.

Естественное преобразование $f : U \to W[k]$ диаграммы $U : \mathbb{Z} \to \mathcal{A}$ в диаграмму $W[k] : \mathbb{Z} \to \mathcal{A}$ называется *однородным морфизмом* степени k между градуированными объектами U и W. Такой морфизм представляет собою набор морфизмов $f_\nu : U^\nu \to W^{\nu+k}$ в категории $\mathcal{A}$. Например, *сдвиг градуировки* $s : V \to V[1]$, тождественно отображающий V^ν в $V^\nu = V[1]^{\nu-1}$, однороден степени -1.

При использовании нижних индексов однородные морфизмы степени k

$$f : (D_\nu) \to (B_\mu) , \quad g : (D_\nu) \to (U^\mu) \quad \text{и} \quad g : (U^\mu) \to (B_\nu)$$

представляют собою наборы стрелок

$$f_\nu : D_\nu \to B_{\nu-k} , \quad g_\nu : D_\nu \to U^{k-\nu} \quad \text{и} \quad h_\nu : U^\nu \to B_{-\nu-k} ,$$

соответственно, уменьшающих нижний индекс на k и сохраняющих сумму верхнего и нижнего индексов, которая будет равна k, если морфизм «поднимает» индексы, и равна $-k$, если он их «опускает».

Однородные морфизмы степени k из V в W образуют абелеву группу, обозначаемую $\operatorname{GrHom}^k(V, W)$. При композиции однородных гомоморфизмов их степени складываются: $\operatorname{GrHom}^i \circ \operatorname{GrHom}^j \subset \operatorname{GrHom}^{i+j}$. Прямая сумма

$$\operatorname{GrHom}(V, W) \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_k \operatorname{GrHom}^k(V, W) \tag{4-2}$$

называется *градуированной группой морфизмов* из V в W. Градуированная группа эндоморфизмов $\operatorname{GrHom}(V, V)$ всякого градуированного объекта V является ассоциативным градуированным кольцом с единицей.

4.1.1. Кошулево правило знаков. При работе с градуированными объектами мы всегда придерживаемся так называемых *s-версий*[1] стандартных операций над отображениями и векторами, которые отличаются от обычных использованием *кошулева правила знаков*: если результат применения операции к аргументам a_i в неградуированной теории является однородной линейной комбинацией (некоммутативных) мономов от этих аргументов и каких-либо вспомогательных операторов f_j, где все мономы отличаются друг от друга только перестановками участвующих в них символов, то в s-версии этой операции каждая транспозиция любых двух символов x, y должна дополнительно сопровождаться умножением соответствующего монома на $(-1)^{|x|\cdot|y|}$. Например, *s-коммутатор* однородных эндоморфизмов определяется как

$$[f,g] \stackrel{\text{def}}{=} f \circ g - (-1)^{|f||g|} g \circ f\,,$$

а *s-правило Лейбница* для однородного оператора D на градуированной алгебре и однородных элементов a, b этой алгебры имеет вид

$$D(ab) = (Da)b + (-1)^{|D|\cdot|a|} a(Db)\,.$$

Результат применения тензорного произведения $f_1 \otimes \ldots \otimes f_n$ однородных гомоморфизмов градуированных модулей $f_i : V_i \to V_i$ к тензорному моному

$$v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$$

из однородных векторов v_i будет всегда вычисляться как

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_m \left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m\right) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\varepsilon} f_1(v_1) \otimes \cdots \otimes f_m(v_m)\,, \tag{4-3}$$

где $\varepsilon = |f_m|\big(|v_1| + \cdots + |v_{m-1}|\big) + |f_{m-1}|\big(|v_1| + \cdots + |v_{m-2}|\big) + \cdots + |f_2||v_1|$. Композиция тензорных произведений однородных гомоморфизмов тоже вычисляется как

$$\left(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m\right) \circ \left(g_1 \otimes \cdots \otimes g_m\right) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\varepsilon} (f_1 \circ g_1) \otimes \cdots \otimes (f_m \circ g_m) \tag{4-4}$$

где $\varepsilon = |f_m|\big(|g_1| + \cdots + |g_{m-1}|\big) + |f_{m-1}|\big(|g_1| + \cdots + |g_{m-2}|\big) + \cdots + |f_2||g_1|$.

4.1.2. Комплексы и (ко)гомологии. Градуированный объект V, оснащённый однородным эндоморфизмом $d : V \to V$ степени 1 с $d^2 = 0$ называется *комплексом* с *дифференциалом* d. Действие дифференциала удобно изображать диаграммой

$$\cdots \xrightarrow{d} V^{\nu-1} \xrightarrow{d} V^{\nu} \xrightarrow{d} V^{\nu+1} \xrightarrow{d} \cdots\,. \tag{4-5}$$

Равенство $d^2 = 0$ означает, что $\operatorname{im} d$ является подобъектом[2] в $\ker d$.

Упражнение 4.1. Покажите, что в абелевой категории для любой пары компонуемых стрелок α, β с $\beta\alpha = 0$ имеются канонические инъекция $\iota : \operatorname{im}\alpha \hookrightarrow \ker\beta$, сюрьекция $\pi : \operatorname{coker}\alpha \twoheadrightarrow \operatorname{im}\beta$ и изоморфизм $\operatorname{coker}\iota \simeq \ker\pi$.

[1]Префикс s- можно воспринимать как указание на присутствие дополнительных знаков (*signs*) или как сокращение для *super*- или *skew*-.

[2]Или, что то же самое, — фактором объекта $\operatorname{coker} d$.

Градуированный объект $H(V) \stackrel{\text{def}}{=} \ker d \,/\, \operatorname{im} d$ с однородными компонентами

$$H^\nu(V) = \frac{\ker\left(d : V^\nu \to V^{\nu+1}\right)}{\operatorname{im}\left(d : V^{\nu-1} \to V^\nu\right)}\,.$$

называется *когомологиями* комплекса V. Если $H(V) = 0$, т. е. $\ker d = \operatorname{im} d$, комплекс V называется *точным* или *ацикличным*. В категориях модулей элементы из $\ker d$ называются *коциклами*, а элементы из $\operatorname{im} d$ — *кограницами*.

При использовании нижней индексации (4-1) дифференциал принято обозначать кириллической буквой ∂. Диаграмма (4-5) приобретает при этом вид

$$\cdots \xrightarrow{\partial} V_{\nu+1} \xrightarrow{\partial} V_\nu \xrightarrow{\partial} V_{\nu-1} \xrightarrow{\partial} \cdots\,. \tag{4-6}$$

В таком контексте факторы $H_\nu(V) \stackrel{\text{def}}{=} \ker\left(\partial : V_\nu \to V_{\nu-1}\right) / \operatorname{im}\left(\partial : V_{\nu+1} \to V_\nu\right)$ называют *гомологиями*, элементы из $\ker \partial$ — *циклами*, а элементы из $\operatorname{im} \partial$ — *границами*[1].

Пример 4.1 (цепной комплекс симплициального множества)
Пусть $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}et$ — симплициальное множество, а K — коммутативное кольцо. Обозначим через $C_n = C_n(X, K)$ свободный K-модуль с базисом $X_n = X([n])$. Его элементы называются n-мерными *симплициальными цепями* в X с коэффициентами из K. Напомню[2], что мы обозначили через $\partial_n^{(i)} : [n-1] \hookrightarrow [n]$ — возрастающее вложение, образ которого не содержит i. Контравариантный функтор X переводит его в отображение i-той грани, которое мы обозначим просто через $\partial_i : X_n \to X_{n-1}$ и которое сопоставляет n-мерному симплексу $x \in X_n$ тот $(n-1)$-мерный симплекс $\partial_i x \in X_{n-1}$, что подклеивается к x в качестве гиперграни, натянутой на все вершины кроме i-той, где $i = 0, 1, \dots$ K-линейный оператор $\partial : C_n \to C_{n-1}$, действующий на базисный вектор $x \in X_n \subset C_n$ по формуле

$$\partial x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i x\,, \tag{4-7}$$

называется *граничным оператором*. Он сопоставляет каждому симплексу его ориентированную границу. Например, ориентированной границей треугольника 012 будет цепь 12−02+01, которую можно интерпретировать как контур треугольника, обходимый в направлении ориентированного ребра 01, если договориться, что смена знака перед симплексом означает смену ориентации у этого симплекса, т. е. $-02 = 20$.

Упражнение 4.2. Убедитесь, что $\partial^2 = 0$.

Комплекс (C, ∂) называется *цепным комплексом*, а его гомологии — *гомологиями* симплициального множества X с коэффициентами в K.

В случае, когда $X = S(T)$ является множеством сингулярных симплексов[3] топологического пространства T, эти гомологии называются *сингулярными гомологиями* пространства T с коэффициентами в K и обозначаются $H(T, K)$.

[1] Однако комплексы так и остаются *ком*плексами ☺

[2] См. прим. 1.4 на стр. 5.

[3] См. прим. 2.6 на стр. 25.

Всё вышесказанное в равной степени применимо и к полусимплициальным множествам $X : \Delta_s^{op} \to \mathcal{S}et$. Получающиеся при этом гомологии называют *симплициальными гомологиями* триангулированного топологического пространства $T = |X|$ — геометрической реализации полусимплициального множества X, и тоже обозначают[1] $H(T, K)$.

Упражнение 4.3. Вычислите гомологии $H(T, \mathbb{Z})$ стандартной триангуляции двумерного тора T с рис. 1◇1 на стр. 8.

4.1.3. Бикомплексы. Биградуированный объект $V = \bigoplus_{p,q} V^{p,q}$ с парой таких дифференциалов $d_1, d_2 : V \to V$, что $d_1^2 = 0$, $d_2^2 = 0$, $d_1 d_2 = -d_2 d_1$ и при всех p, q

$$d_1(V^{p,q}) \subset V^{p+1,q} \quad \text{и} \quad d_2(V^{p,q}) = V^{p,q+1}\,,$$

называется *бикомплексом*. С каждым бикомплексом связан обычный комплекс

$$\operatorname{Tot} V = \bigoplus_{\nu} \operatorname{Tot}^{\nu} V\,, \quad \text{где} \quad \operatorname{Tot}^{\nu} V \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{p+q=\nu} V^{p,q} \quad \text{и} \quad d_{\text{Tot}} \stackrel{\text{def}}{=} d_1 + d_2\,.$$

Он называется *свёрткой* или *тотальным комплексом* бикомплекса V.

Пример 4.2 (тензорное произведение комплексов модулей)
Тензорные произведения $U^p \otimes W^q$ однородных компонент комплексов модулей (U, d_U) и (W, d_W) образуют бикомплекс с дифференциалами $d_1 = d_U \otimes 1_W$ и $d_2 = 1_U \otimes d_W$, поскольку согласно кошулеву правилу знаков для $|d_U| = |d_V| = 1$ имеем:

$$(d_U \otimes 1) \circ (1 \otimes d_V) = d_U \otimes d_V = -(1 \otimes d_V) \circ (d_U \otimes 1)\,.$$

Тотальный комплекс этого бикомплекса обозначается $U \otimes W$ и называется *тензорным произведением* комплексов U и V. Он имеет однородные компоненты

$$(U \otimes W)^k = \bigoplus_{\mu+\nu=k} U^{\mu} \otimes W^{\nu}\,,$$

а его дифференциал продолжает дифференциалы комплексов U, V правилу Лейбница

$$d_{U \otimes V} \stackrel{\text{def}}{=} d_U \otimes 1 + 1 \otimes d_V \tag{4-8}$$

и действует на однородный тензор $u \otimes v$ по формуле

$$d_{U \otimes V}(u \otimes v) = (d_U \otimes 1)(u \otimes v) + (1 \otimes d_V)(u \otimes v) = (d_U u) \otimes v + (-1)^{|v|} v \otimes (d_V v)\,.$$

Тензорное произведение $V_1 \otimes \ldots \otimes V_m$ произвольного набора комплексов определяется аналогично: это градуированный объект с компонентами

$$\big(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n\big)^{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\sum \nu_i = \nu} V_1^{\nu_1} \otimes V_2^{\nu_2} \otimes \cdots \otimes V_n^{\nu_n} \tag{4-9}$$

[1] В начальных курсах алгебраической топологии доказывается, что симплициальные гомологии триангулируемого топологического пространства совпадают с сингулярными и, в частности, не зависят от выбора триангуляции. См. *А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс*, «Курс гомотопической топологии», М., Наука, 1989 или *В. В. Прасолов*, «Элементы теории гомологий», МЦНМО, 2006.

и дифференциалом, продолжающим дифференциалы $d_i : V_i \to V_i$ по правилу Лейбница:

$$d_{\otimes V_i} = \sum_{i=1}^{m} 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes d_i \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1\,, \tag{4-10}$$

причём отдельные слагаемые этой суммы перемножаются друг с другом и применяются к однородным тензорам согласно кошулеву правилу знаков.

Пример 4.3 (комплекс однородных гомоморфизмов)
Для любых двух комплексов (U, ∂_U), (W, d^W) в произвольной абелевой категории $\mathcal{A}$, абелевы группы $\mathrm{Hom}(U_p, W^q)$ образуют бикомплекс с дифференциалами

$$d_1 = \partial_U^* : \varphi \mapsto (-1)^{|\varphi|+1} \varphi \circ \partial_U \quad \text{и} \quad d_2 = d_*^W : \varphi \mapsto d_W \circ \varphi\,. \tag{4-11}$$

Тотальный комплекс этого бикомплекса обозначается $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(U, W)$ и называется *комплексом морфизмов* между комплексами U и V. Как градуированная абелева группа он совпадает с $\mathrm{GrHom}(U, W)$ из форм. (4-2) на стр. 64 и имеет

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}^k(U, W) = \mathrm{GrHom}^k(U, W) = \bigoplus_{\mu+\nu=k} \mathrm{Hom}(U_\mu, W^\nu)\,.$$

Мы пишем $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}$, а не GrHom, чтобы подчеркнуть что первая градуированная группа, в отличие от второй, рассматривается вместе с дифференциалом[1] d, переводящим однородный морфизм $\varphi : V \to W$ в его s-коммутатор с дифференциалами из V и W:

$$\begin{aligned} d :\ & \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}^k(U, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}^{k+1}(U, W) \\ & \varphi \mapsto [d, \varphi] \overset{\mathrm{def}}{=} d_W \circ \varphi - (-1)^{|\varphi|} \varphi \circ \partial_W\,. \end{aligned} \tag{4-12}$$

Упражнение 4.4. Убедитесь, что дифференциалы (4-11) антикоммутируют и дифференциал (4-12) имеет $d^2 = 0$.

Замечание 4.1. (мультикомплексы) Кроме бикомплексов можно рассматривать и более общие *m-комплексы*, т. е. $\mathbb{Z}^m$-градуированные K-модули $V = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Z}^m} V^\mu$, оснащённые m дифференциалами d_i так, что мультистепень каждого d_i равна стандартному базисному вектору[2] $e_i \in \mathbb{Z}^m$ и при всех i, j выполняются соотношения $d_i^2 = 0$ и $d_i d_j + d_j d_i = 0$. Иными словами, дифференциалы d_i задают на V действие грассмановой алгебры с m образующими, согласованное с $\mathbb{Z}^m$-градуировками на V и на грассмановой алгебре. Каждому m-комплексу V тоже можно сопоставить *полную свёртку* $\mathrm{Tot}\, V$ с $\mathrm{Tot}^\nu V \overset{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{\sum \mu_i = \nu} V^{\mu_1, \dots, \mu_m}$ и $d_{\mathrm{Tot}} = \sum d_i$. Тензорное произведение m комплексов $V_1, \dots, V_m$ можно воспринимать как свёртку m-комплекса с компонентами $V_1 \otimes \ldots \otimes V_m$ и m дифференциалами из правой части (4-10).

[1] Обозначение DG является аббревиатурой для «differential graded», т. е. *дифференциальная градуированная* группа.

[2] Т. е. $d_i(V^{\mu_1, \dots, \mu_m}) \subset V^{\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_i + 1, \mu_{i+1}, \dots, \mu_m}$

4.2. Категории комплексов. С заданной абелевой категорией $\mathcal{A}$ связаны три различных категории комплексов: *DG-категория* $\mathcal{C}om_{\mathrm{DG}}(\mathcal{A})$, «обычная» категория комплексов $\mathcal{C}om(\mathcal{A})$ и *гомотопическая категория* $\mathcal{H}o(\mathcal{A})$. Все они имеют один и тот же класс объектов — комплексы, состоящие из объектов категории $\mathcal{A}$, однако различаются множествами морфизмов между комплексами V, W.

DG-категория комплексов $\mathcal{C}om_{\mathrm{DG}}(\mathcal{A})$ имеет в качестве морфизмов из V в W *комплекс* морфизмов $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(V, W)$ из предыдущего прим. 4.3.

Определение 4.1
Аддитивная категория $\mathcal{C}$, в которой каждое из множеств $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ является комплексом абелевых групп, причём дифференциал композиции удовлетворяет s-правилу Лейбница

$$d(\varphi \circ \psi) = (d\varphi) \circ \psi + (-1)^{|\varphi|} \varphi \circ (d\psi)\,, \tag{4-13}$$

называется *дифференциальной градуированной* (или *DG*-) категорией.

Упражнение 4.5. Убедитесь, что категория $\mathcal{C}om_{\mathrm{DG}}(\mathcal{A})$ действительно является DG-категорией.

4.2.1. Категория комплексов $\mathcal{C}om(\mathcal{A})$ имеет в качестве морфизмов из V в W подгруппу в $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(V, W)$, состоящую из перестановочных с дифференциалами однородных морфизмов степени нуль

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}om}(V, W) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}^0_{\mathrm{DG}}(V, W) \cap \ker d = \{\varphi : V \to W \mid \forall \nu\ \varphi(V^\nu) \subset W^\nu \ \&\ d_W \varphi = \varphi d_V\}\,.$$

Каждый такой морфизм корректно задаёт морфизм когомологий $\varphi_* : H(V) \to H(W)$, переводящий класс коцикла[1] ξ по модулю кограниц в класс коцикла $\varphi(\xi)$.

Упражнение 4.6. Убедитесь в этом.

Для любой абелевой категории $\mathcal{A}$ категория $\mathcal{C}om(\mathcal{A})$ тоже абелева: ядро морфизма комплексов $\varphi : V \to W$ это подкомплекс в V, образованный ядрами $\ker f_\nu$ морфизмов $\varphi_\nu : V^\nu \to W^\nu$, а коядро образовано коядрами $\operatorname{coker} \varphi_\nu = W^\nu / \operatorname{im} \varphi_\nu$ этих морфизмов.

Упражнение 4.7. Убедитесь, что ядра $\ker \varphi_\nu$ действительно образуют подкомплекс в V, т. е. d_V переводит $\ker \varphi_\nu$ в $\ker \varphi_{\nu+1}$, и что коядра $\operatorname{coker} \varphi_\nu$ образуют фактор комплекс комплекса W, т. е. d_W корректно задаёт отображение фактор объектов $W^\nu / \operatorname{im} \varphi_\nu \to W^{\nu+1} / \operatorname{im} \varphi_{\nu+1}$.

Существование прямых сумм, наличие нулевого объекта и совпадение образа с кообразом имеют место постольку, поскольку они имеют место в категории диаграмм[2] $\mathbb{Z} \to \mathcal{A}$ и их естественных преобразований, которая, как легко видеть, абелева.

Упражнение 4.8. Убедитесь в этом.

[1] Всюду далее мы будем рассуждать в терминах элементов объектов, как будто подлежащая абелева категория $\mathcal{A}$ является категорией модулей над ассоциативным кольцом. Справедливость получаемых таким образом результатов для произвольной абелевой категории $\mathcal{A}$ может быть установлена при помощи сильной теоремы о вложении: минимальная по включению полная абелева подкатегория, содержащая заданное множество объектов из $\mathcal{A}$, является малой и по сильной теореме о вложении может быть точно и вполне строго вложена в категорию модулей над ассоциативным кольцом.

[2] Где $\mathbb{Z}$ рассматривается как дискретная категория.

Предложение 4.1
С точной тройкой комплексов $0 \to U \xrightarrow{\iota} W \xrightarrow{\pi} W/U \to 0$ функториально[1] связана длинная точная последовательность когомологий

$$\cdots \xrightarrow{\iota_*} H^i(W) \xrightarrow{\pi_*} H^i(W/U) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(U) \xrightarrow{\iota_*} H^{i+1}(W) \xrightarrow{\pi_*} \cdots, \tag{4-14}$$

в которой *связывающий гомоморфизм* $\delta : H^i(W/U) \to H^{i+1}(U)$ переводит когомологический класс коцикла $\pi(w) \in \ker d_{W/U}$ в когомологический класс коцикла $d_W(w)$.

Доказательство. Проверим, что δ является корректно определённым отображением из $H(W/U)$ в $H(U)$. Поскольку $\pi d_W(w) = d_{W/U}\pi(w) = 0$, элемент $d_W(w) \in \ker \pi = U$. Он является коциклом, так как $d_U d_W(w) = d_W^2(w) = 0$. Его когомологический класс в $H(U)$ не зависит от выбора элемента $w \in W$, представляющего класс когомологий $[\pi(w)] \in H(W/U)$, поскольку $d_W(U + dW) = d_U(U) = 0$ в $H(U)$. По построению, каждый из морфизмов φ_*, ψ_* и δ функториально зависит от исходной точной тройки комплексов, и композиция любой пары последовательных стрелок в (4-14) нулевая. Проверку точного совпадения ядер с образами мы оставляем читателю. □

Упражнение 4.9. Сделайте эту проверку.

Определение 4.2 (сдвиг градуировки)
Функтор сдвига $S : \mathcal{C}om \to \mathcal{C}om$, $V \mapsto SV = V[1]$, действует на комплекс по правилу $SV^\nu = V^{\nu+1}$, $d_{SV} = -d_V$, так что *естественное преобразование сдвига* $s : V \to V[1]$, тождественно действующее на элементы и лежащее в $\mathrm{Hom}^{-1}_{\mathrm{DG}}(V, V[1])$, s-коммутирует с дифференциалом: $[d, s] = d_{SV}s + sd_V = 0$. Действие функтора S на морфизмы тождественно. Функтор S обратим в сильном смысле: тождественно действующий на морфизмы функтор $T : V \mapsto V[-1]$, где $V[-1]^\nu = V^{\nu-1}$ и $d_{TV} = -d_V$, таков что $TS = ST = \mathrm{Id}$ (точное равенство, а не эквивалентность функторов). Итерации функтора сдвига обозначаются $S^kV = T^{-k}V = V[k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 4.4 (конус морфизма)
Со всяким морфизмом комплексов $\varphi : U \to W$ функториально связан сосредоточенный в двух столбцах с номерами -1 и 0 бикомплекс

$$\begin{tikzcd} {} & {} \\ U^{i+1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[u, "-d_U"] & W^{i+1} \arrow[u, "d_W"'] \\ U^i \arrow[r, "\varphi"] \arrow[u, "-d_U"] & W^i \arrow[u, "d_W"'] \\ U^{i-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[u, "-d_U"] & W^{i-1} \arrow[u, "d_W"'] \\ {} \arrow[u, "-d_U"] & {} \arrow[u, "d_W"'] \end{tikzcd} \tag{4-15}$$

[1]В том смысле, что сопоставление точной тройке её длинной последовательности когомологий является функтором из категории точных диаграмм вида $0 \to * \to * \to * \to 0$ в $\mathcal{C}om(\mathcal{A})$ в категорию бесконечных точных диаграмм $\cdots \to * \to * \to \cdots$ в $\mathcal{A}$.

свёртка которого называется *конусом* морфизма φ и обозначается $\mathrm{Con}(\varphi)$. Как градуированный модуль, $\mathrm{Con}(\varphi) \simeq U[1] \oplus W$ имеет $\mathrm{Con}^i(\varphi) = U^{i+1} \oplus W^i$, но дифференциал

$$d_{\mathrm{Con}(\varphi)} : U[1] \oplus W \to U[1] \oplus W\,, \quad \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -d_U & 0 \\ \varphi & d_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \tag{4-16}$$

не равен прямой сумме дифференциалов. Комплекс $W \subset \mathrm{Con}(\varphi)$ является подкомплексом в $\mathrm{Con}(\varphi)$ с фактором $\mathrm{Con}(\varphi)/W \simeq V[1]$, причём точная тройка комплексов

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{\iota_\varphi} \mathrm{Con}(\varphi) \xrightarrow{\pi_\varphi} U[1] \longrightarrow 0\,, \tag{4-17}$$

вообще говоря, *не расщепляется* в категории $\mathcal{C}om$. Длинная точная последовательность когомологий тройки (4-17) имеет вид

$$\cdots \longrightarrow H^i(\mathrm{Con}\,\varphi) \xrightarrow{\pi_{\varphi *}} H^{i+1}(U) \xrightarrow{\varphi_*} H^{i+1}(W) \xrightarrow{\iota_{\varphi *}} H^{i+1}(\mathrm{Con}\,\varphi) \longrightarrow \cdots\,, \tag{4-18}$$

и её связывающий гомоморфизм $\delta : H^i(U[1]) = H^{i+1}(U) \to H^{i+1}(W)$ совпадает с φ_*.

4.2.2. Гомотопическая категория комплексов $\mathcal{H}o$ и имеет в качестве морфизмов нулевые когомологии комплексов $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}o}(V,W) \overset{\text{def}}{=} H^0\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(V,W)\right) = \frac{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}om}(V,W)}{\mathrm{im}\left(d : \ \mathrm{Hom}^{-1}_{\mathrm{DG}}(V,W) \to \mathrm{Hom}^0_{\mathrm{DG}}(V,W)\right)}\,.$$

Иначе говоря, морфизмы в $\mathcal{H}o$ суть классы морфизмов $\varphi : V \to W$ в $\mathcal{C}om$ по модулю сложения с морфизмами вида $[d,\gamma] = d_W\gamma + \gamma d_V$, где $\gamma \in \mathrm{Hom}^{-1}_{\mathrm{DG}}(V,W)$. Морфизмы вида $[d,\gamma]$ называются *гомотопными нулю*. Морфизмы комплексов φ и ψ называются *гомотопными*, если их разность гомотопна нулю. При этом любое однородное степени -1 отображение $\gamma : V \to W$, такое что $\varphi - \psi = [d,\gamma]$, называется *гомотопией* между φ и ψ, что записывается как $\varphi \underset{\gamma}{\sim} \psi$. Итак, морфизмы в категории $\mathcal{H}o$ суть морфизмы комплексов, рассматриваемые с точностью до гомотопии.

Упражнение 4.10. Убедитесь, что если $\varphi \underset{\gamma}{\sim} 0$, то $\varphi\psi \underset{\gamma\psi}{\sim} 0$ и $\eta\varphi \underset{\eta\gamma}{\sim} 0$ всякий раз, когда композиции $\varphi\psi$ и $\eta\varphi$ определены.

Таким образом, гомотопные нулю морфизмы образуют в $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}om)$ двусторонний идеал, и значит, композиция морфизмов в $\mathcal{C}om$ корректно спускается на классы гомотопных морфизмов, так что $\mathcal{H}o$ действительно является категорией.

Всякий гомотопный нулю морфизм комплексов $\varphi = d_W\gamma + \gamma d_V : V \to W$ задаёт нулевой морфизм когомологий $\varphi_* : H(V) \to H(W)$, так как для любого коцикла $\xi \in \ker d_V$ коцикл $\varphi(\xi) = d_W(\gamma\xi) + \varphi\gamma(d_V\xi) = d_W(\gamma\xi)$ является кограницей. Поэтому гомотопные морфизмы комплексов одинаково действуют на когомологиях. В частности, при вычислении когомологий произвольного комплекса $V \in \mathcal{C}om$ можно заменить этот комплекс любым другим комплексом W, изоморфным V в категории $\mathcal{H}o$ — когомологии у W будут те же, что и у V, хотя изоморфизма между V и W в категории $\mathcal{C}om$ при этом может и не быть.

Определение 4.3

Комплекс V называется *стягиваемым*, если $\mathrm{Id}_V \underset{\gamma}{\sim} 0$. Гомотопия γ между нулевым и тождественным эндоморфизмами называется *стягивающей гомотопией*.

Упражнение 4.11. Убедитесь, что в категории $\mathcal{Ho}$ все стягиваемые комплексы изоморфны нулевому комплексу (в частности, ацикличны).

Пример 4.5 (конус тождественного морфизма)
Конус[1] $\mathrm{Con}\,\mathrm{Id}_V$ тождественного морфизма $\mathrm{Id}_V : V \to V$, как градуированный модуль равный $V[1] \oplus V$, изоморфен нулю в категории $\mathcal{Ho}$. Стягивающая гомотопия между тождественным и нулевым эндоморфизмами задаётся формулой

$$\gamma : V[1] \oplus V \to V \oplus V[-1], \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 4.12. Убедитесь в этом и покажите, что вложение ι_{Id} и проекция π_{Id} из точной в категории $\mathcal{Com}$ тройки[2] $0 \longrightarrow V \xrightarrow{\iota_{\mathrm{Id}}} \mathrm{Con}\,\mathrm{Id}_V \xrightarrow{\pi_{\mathrm{Id}}} V[1] \longrightarrow 0$ тоже гомотопны нулю.

4.3. Комплексы Кошуля. Для произвольного элемента $f \in K$ обозначим через K_f сосредоточенный в степенях -1 и 0 двучленный комплекс

$$0 \to K \xrightarrow{f} K \to 0, \tag{4-19}$$

с дифференциалом $f : x \mapsto fx$ и когомологиями

$$H^0(K_f) = K/(f) \quad \text{и} \quad H^{-1}(K_f) = \mathrm{Ann}\,f = \{a \in K \mid af = 0\}.$$

Лемма 4.1
Всякий комплекс K-модулей C вписывается в категории $\mathcal{Com}$ в точную тройку

$$0 \to C \hookrightarrow K_f \otimes C \twoheadrightarrow C[1] \to 0, \tag{4-20}$$

которая производит длинную точную последовательность когомологий

$$\cdots \to H^i(C) \xrightarrow{f} H^i(C) \to H^i(K_f \otimes C) \to H^{i+1}(C) \xrightarrow{f} H^{i+1}(C) \to \cdots$$

со связывающим гомоморфизмом $f : [x] \mapsto [fx]$.

Доказательство. Комплекс $K_f \otimes C$ имеет компонентой степени k прямую сумму

$$\left(K_f^{-1} \otimes C^{k+1}\right) \oplus \left(K_f^0 \otimes C^k\right) = C^{k+1} \oplus C^k.$$

Согласно Кошулеву правилу знаков, дифференциал $f \otimes 1 + 1 \otimes d_C$ действует на эти слагаемые как $1 \otimes c^{k+1} \mapsto f \otimes c^{k+1} - 1 \otimes dc^{k+1}$, $1 \otimes c^k \mapsto 1 \otimes dc^k$. Таким образом, комплекс $K_f \otimes C$ совпадает с конусом морфизма $f : C \to C$, $c \mapsto fc$, и все утверждения вытекают из прим. 4.4 на стр. 70. □

[1] См. прим. 4.4 на стр. 70.
[2] См. формулу (4-17) из прим. 4.4 на стр. 70.

Следствие 4.1
Если $f \in K$ обратим, то комплекс $K_f \otimes C$ ацикличен для любого комплекса C. □

Следствие 4.2
Если f не делит нуль в K-модуле $H(C)$, то $H^i\left(K_f \otimes C\right) \simeq H^i(C)/fH^i(C)$ при всех i. □

4.3.1. Комплекс Кошуля последовательности элементов. Для конечной упорядоченной последовательности элементов $f_1, \dots, f_m \in K$ тензорное произведение

$$K_{f_1 \cdots f_m} \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_{\alpha=1}^{m} K_{f_\alpha}$$

двучленных комплексов (4-19) называется *комплексом Кошуля* последовательности $f_1, \dots, f_m$. Комплекс $K_{f_1 \cdots f_m}$ сосредоточен в степенях от $-m$ до 0, и его компонента степени $-k$ является прямой суммой $\binom{m}{k}$ свободных модулей ранга один

$$K^{\otimes m} = K \otimes K \otimes \cdots \otimes K \simeq K\,,$$

занумерованных последовательностями $I = (i_1, \dots, i_k)$ возрастающих индексов

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant m\,,$$

равных номерам тех k из m тензорных сомножителей, что имеют степень -1. Сопоставим базисному вектору $1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$ того произведения, в котором степень -1 имеют в точности k сомножителей, стоящих на местах с номерами $i_1, \dots, i_k$, грассманов моном $\xi_I = \xi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_k} \in \Lambda^k(K^m)$ из внешней алгебры $\Lambda(K^m)$ свободного K-модуля ранга m с базисом $\xi_1, \dots, \xi_m$. Таким образом мы изоморфно отображаем компоненту степени $-k$ комплекса $K_{f_1 \cdots f_m}$ на $\Lambda^k(K^m)$. Этот изоморфизм превращает дифференциал комплекса $K_{f_1 \cdots f_m}$ в грассманов дифференциальный оператор[1]

$$\partial = \sum_{\alpha=1}^{m} f_\alpha \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} : \Lambda^k\left(K^m\right) \to \Lambda^{k-1}\left(K^m\right)\,, \quad \omega \mapsto \sum_{\alpha=1}^{m} f_\alpha \cdot \partial\omega/\partial\xi_\alpha\,, \tag{4-21}$$

так что комплекс Кошуля перепишется в виде

$$0 \to \Lambda^m\left(K^m\right) \to \Lambda^{m-1}\left(K^m\right) \to \cdots \to \Lambda^2\left(K^m\right) \to K^m \to K \to 0\,, \tag{4-22}$$

где самый правый ненулевой дифференциал ∂ переводит базисный вектор $\xi_i \in K^m$ в элемент $f_i \in K$, так что $\mathrm{im}(\partial : K^m \to K) = (f_1, \dots, f_m)$ это идеал, порождённый элементами f_i в K.

Определение 4.4
Последовательность $f_1, \dots, f_m \in K$ называется *регулярной*, если при каждом i класс элемента f_i не делит нуль в факторе[2] $K/(f_1, \dots, f_{i-1})$.

[1] Напомню, что грассмановы частные производные антикоммутируют и подчиняются s-правилу Лейбница, см. раздел 2.5 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/lec-02.pdf.

[2] Для $i = 1$ это означает, что f_1 не делит нуль в K.

Предложение 4.2
Если элементы $f_1, \dots, f_m \in K$ образуют регулярную последовательность, то комплекс Кошуля (4-22) имеет $H^0(K_{f_1 \cdots f_m}) \simeq K/(f_1, \dots, f_m)$ и ацикличен во всех отрицательных степенях.

Доказательство. Индукция по m с использованием сл. 4.2. □

Следствие 4.3
Если хоть один из элементов f_i обратим в K, то комплекс Кошуля $K_{f_1 \cdots f_m}$ ацикличен всюду.

Доказательство. Это вытекает из сл. 4.1. □

Пример 4.6 (комплексы Кошуля и Де Рама кольца многочленов)
Возьмём в качестве $K = SV^* \simeq \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ симметрическую алгебру векторного пространства V^* с базисом $x_1, \dots, x_n$ над полем $\Bbbk$ и положим $f_i = x_i$. В силу изоморфизма $\Lambda^k(K^n) \simeq \Lambda^k V^* \underset{\Bbbk}{\otimes} SV^*$ комплекс (4-22), дополненный справа фактором $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]/(x_1, \dots, x_n) \simeq \Bbbk$, можно переписать как сосредоточенный в степенях от $-m$ до $+1$ комплекс свободных SV^*-модулей

$$0 \to \Lambda^m V^* \underset{\Bbbk}{\otimes} SV^* \to \cdots \to \Lambda^2 V^* \underset{\Bbbk}{\otimes} SV^* \to V^* \underset{\Bbbk}{\otimes} SV^* \to SV^* \to \Bbbk \to 0 \tag{4-23}$$

с дифференциалом

$$\begin{gathered} \partial = \sum \frac{\partial}{\partial \xi_i} \otimes x_i : \Lambda^k V^* \otimes S^m V^* \to \Lambda^{k-1} V^* \otimes S^{k+1} V^* \\ \omega \otimes f \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial \xi_i} \otimes x_i \cdot f \,, \end{gathered} \tag{4-24}$$

где x_i и ξ_i суть базисные векторы пространства V^*, рассматриваемые как образующие симметрической и внешней алгебр пространства V соответственно. Будучи комплексом Кошуля регулярной последовательности $x_1, \dots, x_n$, комплекс (4-23) ацикличен. Если $\operatorname{char} \Bbbk = 0$, это можно увидеть без предл. 4.2 при помощи следующего гомотопического соображения.

На пространстве[1] $\Lambda V^* \underset{\Bbbk}{\otimes} SV^*$ помимо дифференциала Кошуля, который является гомоморфизмом SV^*-модулей и имеет бистепень $(-1, 1)$ по грассмановым и коммутирующим переменным, имеется хорошо известный из курса анализа *дифференциал Де Рама* d, который является гомоморфизмом ΛV^*-модулей, имеет бистепень $(1, -1)$ и задаётся формулой

$$\begin{gathered} d = \sum \xi_i \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} : \Lambda^k V^* \otimes S^m V^* \to \Lambda^{k+1} V^* \otimes S^{k-1} V^* \\ \omega \otimes f \mapsto \sum_{i=1}^n \xi_i \wedge \omega \otimes \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{gathered}$$

[1]Известном у физиков как *алгебра полиномиальных суперфункций* на V.

и может восприниматься как $\Bbbk$-линейный эндоморфизмом степени -1 комплекса векторных пространств (4-23).

Упражнение 4.13. Убедитесь, что $d^2 = 0$ и что s-коммутатор $[\partial, d] = \partial d + d\partial$ действует на компоненте $\Lambda^k V^* \otimes S^m V^*$ гомотетией с коэффициентом[1] $(k+m)$.

Из этого упражнения вытекает, что дифференциал Де Рама задаёт гомотопию между нулевым эндоморфизмом комплекса (4-23) и эндоморфизмом $\deg = \partial d + d\partial$, действующим на каждую однородную компоненту $\Lambda^k V^* \otimes S^m V^*$ как $(k+m)\cdot \mathrm{Id}$. Поэтому эндоморфизм $\deg_*$ пространства когомологий комплекса (4-23), умножающий все лежащие в $\Lambda^k V^* \underset{\Bbbk}{\otimes} S^m V^*$ циклы на $k+m$, является нулевым. Таким образом, если $\operatorname{char} \Bbbk = 0$, то нетривиальные циклы в комплексе (4-23) могут быть только в компоненте нулевой степени самого правого дифференциала $\Lambda^0 V^* \underset{\Bbbk}{\otimes} S^0 V^* \to \Bbbk$, равной $\mathrm{Id}_{\Bbbk}$ и тоже не имеющей когомологий. Тем самым, комплекс (4-23) ацикличен. Это рассуждение заодно устанавливает и ацикличность над полем характеристики нуль *комплекса ДеРама*

$$\cdots \xrightarrow{d} S^3 V^* \underset{\Bbbk}{\otimes} \Lambda V^* \xrightarrow{d} S^2 V^* \underset{\Bbbk}{\otimes} \Lambda V^* \xrightarrow{d} V^* \underset{\Bbbk}{\otimes} \Lambda V^* \xrightarrow{d} \Bbbk \to 0$$

который с алгебраической точки зрения представляет собою бесконечный влево комплекс свободных модулей над алгеброй ΛV^*, а в геометрии интерпретируется[2] как комплекс *дифференциальных форм с полиномиальными коэффициентами* на аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$.

4.3.2. Комплекс Кошуля квадратичной алгебры. Предыдущий пример допускает следующее некоммутативное обобщение. Обозначим через $T(V) = \bigoplus_{k \geqslant 0} V^{\otimes k}$ свободную ассоциативную алгебру конечномерного векторного пространства V над полем $\Bbbk$. Градуированная алгебра $A = T(V)/(I)$, являющаяся фактором алгебры $T(V)$ по однородному двустороннему идеалу $(I) \subset T(V)$, порождённому каким-нибудь векторным подпространством $I \subset V \otimes V$, называется *квадратичной алгеброй*. Симметрическая алгебра SV и грассманова алгебра ΛV являются примерами квадратичных алгебр: их идеалы соотношений порождаются линейными оболочками квадратичных тензоров вида $v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1$ и $v \otimes v$ соответственно. Квадратичная алгебра $A^! \overset{\text{def}}{=} T(V^*)/(I^\perp)$, где $I^\perp = \operatorname{Ann} I \subset V^* \otimes V^*$, называется *двойственной* к квадратичной алгебре $A = T(V)/(I)$. Обратите внимание, что $A^{!!} \simeq A$.

Упражнение 4.14. Убедитесь, что квадратичные алгебры SV и ΛV^* двойственны друг другу.

Из пары двойственных квадратичных алгебр A и $B = A^!$ можно изготовить ассоциативную алгебру $A \otimes B$, которая как векторное пространство представляет собою тензорное произведение векторных пространств A и B над полем $\Bbbk$, а умножение однородных разложимых тензоров производится с учётом кошулева правила знаков по формуле $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \overset{\text{def}}{=} (-1)^{|a_2||b_1|} (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$ и распространяется на все остальные тензоры по линейности.

[1] Этот факт известен как *теорема Эйлера об однородных суперфункциях*.

[2] При этом буквы $\xi_1, \dots, \xi_n$ заменяются традиционными для анализа символами $dx_1, \dots, dx_n$.

Упражнение 4.15. Убедитесь, что так определённое умножение корректно определено и ассоциативно.

Тензор $\mathrm{Id}_V \in \operatorname{End} V \simeq V \otimes V^* \subset A \otimes B$ называется *элементом Казимира* алгебры $A \otimes B$ и обозначается $\varkappa$. В двойственных базисах e_i и x_i пространств V и V^* он записывается как $\varkappa = \sum e_i \otimes x_i$.

Упражнение 4.16. Покажите, что $\varkappa^2 = 0$ в алгебре $A \otimes B$.

Тензорное произведение векторных пространств $\mathcal{K}_A \stackrel{\text{def}}{=} A \otimes B^*$ является правым $A \otimes B$-модулем, на котором элемент $a \otimes b$ действует оператором $\varrho_a \otimes \lambda_b^*$, где $\varrho_a : A \to A$, $x \mapsto xa$, это оператор правого умножения на a в алгебре A, а $\lambda_b^* : B^* \to B^*$, это оператор, двойственный к оператору $\lambda_b : B \to B$, $x \mapsto bx$, левого умножения на b в алгебре B. В силу упр. 4.16 правое действие оператора Казимира $\varkappa$ задаёт на $\mathcal{K}_A$ структуру комплекса векторных пространств. Он называется *комплексом Кошуля* квадратичной алгебры A. В терминах двойственных базисов $e_i \in V$ и $x_i \in V^*$ действие дифференциала задаётся формулой

$$\partial : a \otimes \beta \mapsto \sum_i (a \cdot e_i) \otimes (x_i \llcorner \beta),$$

где $\beta \in TV$ рассматривается как полилинейная форма на пространстве V^*, и $x_i \llcorner \beta$ означает подстановку ковектора x_i в её первый аргумент.

Упражнение 4.17. Убедитесь, что для двойственных квадратичных алгебр $A = SV^*$ и $B = \Lambda V$ оператор Казимира $\varkappa$ переводит $S^k V^* \otimes \Lambda^m V^*$ в $\otimes S^{k+1} V^* \otimes \Lambda^{k-1} V^*$, и его действие на этой однородной компоненте связано с кошулевым дифференциалом ∂ из форм. (4-24) на стр. 74 соотношением $\varkappa = k^{-1}\partial$.

Квадратичная алгебра A называется *кошулевой*, если её комплекс Кошуля $\mathcal{K}_A$ точен. Поскольку комплекс Кошуля $\mathcal{K}_B = B \otimes A^* \simeq \mathcal{K}_A^*$ двойственной к A квадратичной алгебры $B = A^!$ двойствен комплексу Кошуля алгебры A, кошулевость квадратичной алгебры A равносильна кошулевости двойственной алгебры $A^!$.

4.4. Спектральные последовательности. Рассмотрим последовательность таблиц $E_0, E_1, E_2, \dots$, клетки которых занумерованы целыми числами $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ так, что p увеличивается по горизонтали, а q по вертикали. Если при каждом r

- в клетках таблицы E_r располагаются модули $E_r^{p,q}$ и задан дифференциал d_r бистепени $(r, 1-r)$ по (p, q), действующий из клеток диагонали $p + q = n$ в клетки следующей диагонали $p + q = n + 1$ со сдвигом на r единиц вправо:
$$d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+1-r}, \quad d_r^2 = 0$$
- очередная таблица E_{r+1} состоит из когомологий предыдущей таблицы E_r:
$$E_{r+1}^{p,q} = \ker\left(d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+1-r}\right) / d_r\left(E_r^{p-r,q-1+r}\right)$$

то говорят, что эти таблицы образуют *спектральную последовательность*[1] *когомологического типа*[2]. Скажем, что спектральная последовательность *стабилизируется*,

[1]В просторечии — *спектралку*.

[2]Согласно договорённостям из n° 4.1.2, в спектралке *гомологического типа* таблицы нумеруются верхним индексами: $E^0, E^1, E^2, \dots$ и заполняются модулями $E^r_{p,q}$ с дифференциалами

если содержимое каждой клетки с какого-то момента перестаёт меняться, т. е.

$$\forall\,(p,q)\ \exists\,N=N(p,q)\,:\,\forall\,r\geqslant N\quad d_r\left(E_r^{p,q}\right)=0\quad\text{и}\quad d_r\left(E_r^{p-r,q+r-1}\right)=0\,. \tag{4-25}$$

Например, такое заведомо происходит, когда в одной из таблиц E_r на каждой диагонали $p+q=\mathrm{const}$ имеется лишь конечное число ненулевых модулей. Если спектральная последовательность стабилизируется, то модуль $E_r^{p,q}$ с $r\geqslant N(p,q)$ из условия (4-25) обозначается $E_\infty^{p,q}$ и называется *предельным*. В этой ситуации говорят, что спектралка *сходится* к градуированным модулям $E_\infty^n \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{p+q=n} E_\infty^{p,q}$ и пишут $E_r^{p,q}\Rightarrow E_\infty^n$. Спектральные последовательности являются основным инструментом для получения информации о когомологиях комплексов, тем или иным способом «собранных» из более элементарных комплексов.

Предложение 4.3 (спектральная последовательность фильтрованного комплекса) Пусть комплекс C обладает такой убывающей системой подкомплексов[1] $F^pC\subseteq C$,

$$C\supseteq\cdots\supseteq F^{p-1}C\supseteq F^pC\supseteq F^{p+1}C\supseteq\cdots\supseteq 0\,, \tag{4-26}$$

что для каждого $n\in\mathbb{Z}$ подмодули F^pC^n совпадают с C^n при всех $p\ll 0$ и зануляются при всех $p\gg 0$. Тогда существует спектральная последовательность с

$$E_1^{p,q}=H^{p+q}\left(\mathrm{Gr}^pC\right)\,,\quad\text{где}\quad \mathrm{Gr}^pC\stackrel{\text{def}}{=}F^pC/F^{p+1}C\,,$$

сходящаяся к присоединённым факторам $\mathrm{Gr}^pH^{p+q}(C)\stackrel{\text{def}}{=}F^pH^{p+q}(C)/F^{p+1}H^{p+q}(C)$ убывающей фильтрации $F^\bullet H(C)$ на модуле когомологий $H(C)$, относящей в подмодуль $F^pH(C)\subseteq H(C)$ все коциклы, лежащие в подкомплексе F^pC, по модулю всех попавших в этот подкомплекс кограниц.

Доказательство. Расположим в столбцах таблицы E_0 фактор комплексы Gr^pC так, чтобы дифференциал комплекса C действовал в них снизу вверх, а присоединённые факторы каждого модуля C^n из комплекса C располагались на диагонали $p+q=n$, т. е. положим $E_0^{p,q}=\mathrm{Gr}^pC^{p+q}$. Обозначим через $\pi:\ F^pC\twoheadrightarrow\mathrm{Gr}^pC$ каноническую проекцию с ядром $F^{p+1}C$, и для каждого r рассмотрим в модуле F^pC^{p+q}, который накрывает $E_0^{p,q}$ при этой проекции, подмодуль

$$Z_r^{p,q}=\{c\in F^pC^{p+q}\mid dc\in F^{p+r}C^{p+q}\}\,.$$

При $r\to\infty$ он аппроксимирует «снаружи» лежащие в F^pC^{p+q} коциклы дифференциала d в том смысле, что с ростом r кограницы элементов из $Z_r^{p,q}$ оказываются во всё более глубоких стратах фильтрации и полностью зануляются при $r\gg 0$. В том же самом смысле кограницы дифференциала d, лежащие в F^pC^{p+q}, аппроксимируются «изнутри» подмодулями $dF^{p-r}C^{p+q}\cap F^pC^{p+q}=dZ_r^{p-r,q+r-1}$, которые содержатся в подмодуле всех кограниц $dC^{p+q-1}\cap F^pC^{p+q}$ и совпадают с ним при $r\gg 0$.

$\partial_r:\ E^r_{p,q}\to E^r_{p-r,q+r-1}$ бистепени $(-r,r-1)$, бьющими из клеток диагонали $p+q=n$ в клетки предыдущей диагонали $p+q=n-1$ со сдвигом на r единиц в влево.

[1]Это означает, что $d_C(F^pC)\subset F^pC$ при всех $p\in\mathbb{Z}$.

Приступим к построению спектралки. Ядро выходящего из клетки (p,q) дифференциала $d: E_0^{p,q} \to E_0^{p,q+1}$ равно $\pi Z_1^{p,q}$, а образ дифференциала $d: E_0^{p,q-1} \to E_1^{p,q}$, входящего в эту клетку, равен $\pi d Z_0^{p,q-1}$. Тем самым, таблица когомологий $E_1 = H(E_0)$ имеет в клетке (p,q) модуль

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(\mathrm{Gr}^p C) = \frac{\pi Z_1^{p,q}}{\pi d Z_0^{p,q-1}} \simeq \frac{Z_1^{p,q} + F^{p+1}C^{p+q}}{dZ_0^{p,q-1} + F^{p+1}C^{p+q}} \simeq$$
$$\simeq \frac{Z_1^{p,q}}{dZ_0^{p,q-1} + (Z_1^{p,q} \cap F^{p+1}C^{p+q})} \simeq \frac{Z_1^{p,q}}{dZ_0^{p,q-1} + Z_0^{p+1,q-1}}$$

(в последних двух переходах мы воспользовались перечисленными в упр. 4.18 ниже стандартными соображениями из линейной алгебры, включением $dZ_0^{p,q-1} \subset Z_1^{p,q}$ и равенством $Z_1^{p,q} \cap F^{p+1}C^{p+q} = Z_0^{p+1,q-1}$).

Упражнение 4.18. Покажите, что во всяком модуле для любых подмодулей V и $W \supset U$ имеют место равенство $W \cap (U+V) = U + (W \cap V)$ и естественные изоморфизмы

$$\frac{W+V}{V} \simeq \frac{W}{V \cap W} \quad \text{и} \quad \frac{W+V}{U+V} \simeq \frac{W}{U + (V \cap W)}\,.$$

Поскольку $dZ_1^{p,q} \subset Z_1^{p+1,q}$ и $d^2 = 0$, дифференциал комплекса C корректно факторизуется до дифференциала бистепени $(1,0)$ на таблице E_1

$$d: E_1^{p,q} = \frac{Z_1^{p,q}}{dZ_0^{p,q-1} + Z_0^{p+1,q-1}} \to \frac{Z_1^{p+1,q}}{dZ_0^{p+1,q-1} + Z_0^{p+2,q-1}} = E_1^{p+1,q}\,.$$

Следующие таблицы $E_2, E_3, \dots$ строятся дословно также. Для каждого r положим

$$E_r^{p,q} \overset{\text{def}}{=} \frac{\pi Z_r^{p,q}}{\pi d Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}} \simeq \frac{Z_r^{p,q} + F^{p+1}C^{p+q}}{dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} + F^{p+1}C^{p+q}} \simeq \frac{Z_r^{p,q}}{dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}$$

(мы пользуемся тем, что $dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} \subset Z_r^{p,q}$ и $Z_r^{p,q} \cap F^{p+1}C^{p+q} = Z_{r-1}^{p+1,q-1}$). Поскольку $dZ_r^{p,q} \subset Z_r^{p+r,q-r+1}$ и $d^2 = 0$, дифференциал d комплекса C корректно факторизуется до дифференциала бистепени $(p, 1-p)$ на таблице E_r:

$$d_r^{p,q}: E_r^{p,q} \simeq \frac{Z_r^{p,q}}{dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}} \to \frac{Z_r^{p+r,q-r+1}}{dZ_{r-1}^{p+1,q-1} + Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}} \simeq E_r^{p+r,q-r+1}\,,$$

ядро которого изоморфно фактору подмодуля $\{c \in Z_r^{p,q} \mid dc \in dZ_{r-1}^{p+1,q-1} + Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}\}$ по его пересечению с $dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}$. Если $dc = dz' + z''$, где $z' \in Z_{r-1}^{p+1,q-1}$, $z'' \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}$, то элемент $c' = c - z'$ имеет $dc' = z'' \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}$. Поэтому каждый элемент из $\ker d_r^{p,q}$ является классом некоторого элемента $c' \in Z_r^{p,q}$ с $dc' \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}$. Все такие c' образуют подмодуль $Z_{r+1}^{p,q} \subset Z_r^{p,q}$. Мы заключаем, что

$$\ker d_r^{p,q} \simeq \frac{Z_{r+1}^{p,q}}{Z_{r+1}^{p,q} \cap \left(dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}\right)}\,.$$

Снова пользуясь тем, что $dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} \subset Z_{r+1}^{p,q}$ и $Z_{r+1}^{p,q} \cap Z_{r-1}^{p+1,q-1} = Z_r^{p+1,q-1}$, получаем

$$\ker d_r^{p,q} \simeq \frac{Z_{r+1}^{p,q}}{dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} + Z_r^{p+1,q-1}}\,. \tag{4-27}$$

Образ приходящего в клетку (p,q) дифференциала $d_r^{p-r,q+r-1} : E_r^{p-r,q+r-1} \to E_r^{p,q}$ имеет вид $dZ_r^{p-r,q+r-1}/dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}$. Факторизуя по нему ядро (4-27) получаем

$$H^{p,q}(E_r) \simeq \frac{Z_{r+1}^{p,q}}{dZ_r^{p-r,q+r-1} + Z_r^{p+1,q-1}} \simeq E_{r+1}^{p,q}\,.$$

Таким образом, таблицы E_r образуют спектральную последовательность с нужным E_1. Модули, из которых состоят все таблицы E_r, являются подфакторами в C, и дифференциалы во всех таблицах являются корректно определёнными ограничениями дифференциала d комплекса C на эти подфакторы.

Наложенные на фильтрацию $F^\bullet C$ условия гарантируют, что на каждой диагонали таблицы E_0 имеется лишь конечное число ненулевых модулей. Поэтому спектральная последовательность E_r сходится к градуированным модулям $E_\infty^n = \bigoplus_{p+q=n} E_\infty^{p,q}$ с компонентами

$$E_\infty^{p,q} = \frac{\pi\{c \in F^pC^{p+q} \mid dc = 0\}}{\pi\{c \in C^{p+q-1} \mid dc \in F^pC^{p+q}\}} \simeq \mathrm{Gr}^p H^{p+q}(C)\,,$$

что и утверждалось. □

Пример 4.7 (двучленная фильтрация)
Точная тройка комплексов $0 \to U \to V \to W \to 0$ задаёт на среднем комплексе V двучленную фильтрацию $V = F^0V \supset U = F^1V \supset 0 = F^2V$ с присоединёнными факторами $\mathrm{Gr}^0V = V/U = W$ и $\mathrm{Gr}^1V = U/0 = U$. В этом случае таблица E_1 спектральной последовательности из предл. 4.3 сосредоточена в двух столбцах $p = 0, 1$ и имеет вид

$$\begin{array}{c}
H^{q+1}(W) \xrightarrow{d_V} H^{q+2}(U) \\[2em]
H^{q}(W) \xrightarrow{d_V} H^{q+1}(U) \\[2em]
H^{q-1}(W) \xrightarrow{d_V} H^{q}(U) \\[2em]
H^{q-2}(W) \xrightarrow{d_V} H^{q-1}(U)\,,
\end{array}$$

где каждая горизонтальная стрелка переводят являющийся d_W-коциклом класс элемента $v \in V$ в факторе $W = V/U$ в когомологический класс элемента $d_V v$, т. е. совпадает со связывающим гомоморфизмом[1] δ из длинной точной последовательности

[1]См. предл. 4.1 на стр. 70.

когомологий точной тройки $0 \to U \to V \to W \to 0$. Таблица $E_2 = H(E_1)$ уже является предельной таблицей E_∞ и состоит из присоединённых факторов индуцированной двучленной фильтрации на $H(V)$, т. е. при каждом n мы имеем точную тройку

$$\operatorname{coker}\left(H^{n-1}(W) \xrightarrow{\delta} H^n(U)\right) \hookrightarrow H^n(V) \twoheadrightarrow \ker\left(H^n(W) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(U)\right),$$

что несёт ровно ту же информацию об $H(V)$, что и длинная точная последовательность когомологий $\cdots \to H^{n-1}(W) \xrightarrow{\delta} H^n(U) \to H^n(V) \to H^n(W) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(U) \to \cdots$.

4.4.1. Спектральные последовательности бикомплекса. Тотальный комплекс[1]

$$C^n = \operatorname{Tot}^n(V) = \bigoplus_{p+q=n} V^{p,q}$$

каждого бикомплекса $V = V^{p,q}$ обладает двумя симметричными фильтрациями, переводимыми одна в другую отражением $p \leftrightarrow q$ относительно диагонали $p = q$. Первая из них имеет

$$F^p \operatorname{Tot}^n(V) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\nu \geqslant p} V^{\nu, n-\nu} \tag{4-28}$$

и задаёт убывающую фильтрацию на $H^n(\operatorname{Tot}(V))$ с присоединёнными градуированными факторами, которые можно вычислять при помощи спектральной последовательности из предл. 4.3. Поскольку горизонтальная компонента $d_1 : V^{p,q} \to V^{p+1,q}$ дифференциала тотального комплекса аннулирует присоединённые факторы фильтрации (4-28), дифференциал $d = d_1 + d_2$ действует на них только своей вертикальной компонентой $d_2 : V^{p,q} \to V^{p,q+1}$. Поэтому стартовая таблица E_0 спектралки, связанной фильтрацией (4-28), образована комплексами-столбцами $V^{p,*}$ бикомплекса V. Следующая таблица $E_1 = H(E_0)$ состоит из когомологий $E_1^{p,q} = H^q_{d_2}(V^{p,*})$ дифференциала d_2, и d действует на них как d_1.

Упражнение 4.19. Убедитесь, что всякий антикоммутирующий с дифференциалами d_U, d_W комплексов U, W морфизм $\varphi \in \operatorname{Hom}^0_{\mathrm{DG}}(U, W)$ также, как и морфизм комплексов, корректно задаёт морфизм когомологий $\varphi_* : H(U) \to H(W)$.

Таким образом, таблица E_2 состоит из модулей когомологий $E_2^{p,q} = H^p_{d_1}\left(H^q_{d_2}(V)\right)$ дифференциала d_1, действующего на когомологиях дифференциала d_2.

Вторая убывающая фильтрация на $\operatorname{Tot}^n(V)$ получается из первой перестановкой букв p, q и имеет

$$F^q \operatorname{Tot}^n(V) = \bigoplus_{\nu \geqslant q} V^{n-\nu, \nu}.$$

С нею связана спектралка с дифференциалами $E_r^{p,q} \to E_r^{p-r+1,q+r}$, которые наклоняются с ростом r влево и вверх, симметрично относительно диагонали $p = q$ тому, как вели себя дифференциалы первой спектралки, а в клетке (p, q) её второй таблицы стоят $H^p_{d_2}\left(H^q_{d_1}(V)\right)$. Чтобы сделать индексацию и поведение дифференциалов стандартными, какими они были описаны в начале n° 4.4 на стр. 76, следует ещё раз поменять местами буквы p и q. Получаем

[1] См. n° 4.1.3 на стр. 67.

Предложение 4.4
С каждым бикомплексом V связаны две спектральные последовательности с E_2-членами

$$ {}^{I}E_2^{p,q} = H^p_{d_1}\left(H^q_{d_2}(V)\right) \quad \text{и} \quad {}^{II}E_2^{p,q} = H^p_{d_2}\left(H^q_{d_1}(V)\right). \tag{4-29}$$

Если на каждой диагонали $p + q = \text{const}$ бикомплекса V имеется лишь конечное число ненулевых модулей $V^{p,q}$, обе спектралки сходятся к присоединённым градуированным факторам некоторых убывающих с ростом p фильтраций на $H^{p+q}(\text{Tot}(V))$. □

4.4.2. Спектральная последовательность точной пары. Наиболее общим источником спектралок являются точные в каждом члене диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd} , \tag{4-30}$$

называемые *точными парами*[1]. Композиция $d \stackrel{\text{def}}{=} jk : E \to E$ имеет $d^2 = jkjk = 0$ и называется *дифференциалом* точной пары (4-30). Диаграмма

$$\begin{tikzcd} iD \arrow[rr, "i"] & & iD \arrow[dl, "j_1"] \\ & H(E) \arrow[ul, "k_1"] & \end{tikzcd} ,$$

в которой $H(E) = \ker d / \operatorname{im} d$, $j_1 : i(x) \mapsto j(x)$, $k_1 : [x] \mapsto k(x)$, называется *производной* от точной пары (4-30).

Упражнение 4.20. Убедитесь, что морфизмы j_1, k_1 определены корректно и производная тоже является точной парой.

Модуль $H(E)$ в производной паре является подфактором исходного модуля E:

$$H(E) = \ker(jk)/\operatorname{im}(jk) = k^{-1}(\ker j)/j(\operatorname{im} k) = k^{-1}(\operatorname{im} i)/j(\ker i).$$

Повторяя эти рассуждения m раз, приходим к m-той производной паре от (4-30)

$$\begin{tikzcd} i^mD \arrow[rr, "i"] & & i^mD \arrow[dl, "j_m"] \\ & E_m \arrow[ul, "k_m"] & \end{tikzcd} ,$$

где $E_m = H(E_{m-1}) \simeq k^{-1}\left(\operatorname{im} i^m\right) / j\left(\ker i^m\right)$ является подфактором модуля E из исходной пары (4-30), морфизм $k_m : [x] \mapsto k(x)$ является (корректно определённым) ограничением исходного морфизма k на этот подфактор, а $j_m = ji^{-m} : i^m(x) \mapsto j(x)$.

Если точная пара (4-30) образована биградуированными модулями

$$D = \bigoplus D^{p,q}, \quad E = \bigoplus E^{p,q}$$

[1]По-английски *exact couple*.

а морфизмы i, j, k однородны бистепеней $|i| = (-1, 1)$, $|j| = (0, 0)$, $|k| = (1, 0)$, как в диаграмме на рис. 4◇1 ниже, то размещая модули $E^{p,q}$ в клетки таблицы E_1, а их последовательные производные — в следующие таблицы $E_2, E_3, \dots$, мы получим спектральную последовательность, имеющую $E_1 = E$ и для всех последующих $r \geqslant 2$

$$E_r^{p,q} \simeq k^{-1}\left(i^{r-1}D^{p+r-1,q-r+1}\right)/j\left(\ker(i^{r-1}|_{D^{p,q}})\right) \tag{4-31}$$

$$\begin{tikzcd}
D^{p-1,q+2} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q+2} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q+2} \arrow[r, "j"] & E^{p,q+2} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q+2} \arrow[r, "j"] & E^{p+1,q+2} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q+2} \\
D^{p-1,q+1} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q+1} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q+1} \arrow[ull, "i" description] \arrow[r, "j"] & E^{p,q+1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q+1} \arrow[ull, "i" description] \arrow[r, "j"] & E^{p+1,q+1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q+1} \arrow[ull, "i" description] \\
D^{p-1,q} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q} \arrow[ull, "i" description] \arrow[r, "j"] & E^{p,q} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q} \arrow[ull, "i" description] \arrow[r, "j"] & E^{p+1,q} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q} \arrow[ull, "i" description] \\
D^{p-1,q-1} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q-1} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q-1} \arrow[ull, "i" description] \arrow[r, "j"] & E^{p,q-1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q-1} \arrow[ull, "i" description] \arrow[r, "j"] & E^{p+1,q-1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q-1} \arrow[ull, "i" description]
\end{tikzcd}$$

Рис. 4◇1. Биградуированная точная пара.

с дифференциалом $d_r = j_{r-1}k_{r-1} = ji^{1-r}k : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$, переводящим класс $[e] \in k^{-1}\left(i^{r-1}D^{p+r-1,q-r+1}\right)$ элемента $e \in E$ с $k(e) = i^{r-1}(x)$ в класс $[j(x)]$ элемента $j(x) \in E$.

Пример 4.8 (фильтрованные комплексы)
Если у комплекса C имеется убывающая фильтрация подкомплексами $F^pC \subset C$, то точные тройки комплексов $0 \to F^{p+1}C \xrightarrow{\iota} F^pC \xrightarrow{\pi} \mathrm{Gr}^pC \to 0$ производят длинные точные последовательности когомологий

$$\dots \xrightarrow{\delta} H^n(F^{p+1}C) \xrightarrow{\iota_*} H^n(F^pC) \xrightarrow{\pi_*} H^n(\mathrm{Gr}^pC) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(F^{p+1}C) \xrightarrow{\iota_*} \dots$$

которые собираются в точную пару биградуированных модулей

$$E^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} H^{p+q}\left(\mathrm{Gr}^pC\right), \quad D^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} H^{p+q}\left(F^pC\right)$$

и однородных морфизмов

$$\begin{aligned}
i \stackrel{\text{def}}{=} \iota_* &: H^{p+q}(F^pC) \to H^{p+q}(F^{p-1}C) \\
j \stackrel{\text{def}}{=} \pi_* &: H^{p+q}(F^pC) \to H^{p+q}(\mathrm{Gr}^pC) \\
k \stackrel{\text{def}}{=} \delta &: H^{p+q}(\mathrm{Gr}^pC) \to H^{p+q+1}(F^{p+1}C)
\end{aligned}$$

бистепеней $|i| = (-1, 1)$, $|j| = (0, 0)$ и $|k| = (1, 0)$, как в диаграмме на предыдущей странице. Спектральная последовательность этой точной пары имеет

$$E_r^{p,q} \simeq \frac{\delta^{-1}\,\mathrm{im}\left(i^{r-1} : H^{p+q+1}(F^{p+r}C) \to H^{p+q+1}(F^pC)\right)}{\pi_*\ker\left(i^{r-1} : H^{p+q}(F^pC) \to H^{p+q}(F^{p-r+1}C)\right)}\,. \tag{4-32}$$

Поскольку связывающий гомоморфизм $\delta : H^{p+q}(F^pC/F^{p+1}C) \to H^{p+q+1}(F^{p+r}C)$ задаётся дифференциалом $d : C \to C$, числитель в (4-32) состоит из классов π-образов элементов $c \in F^pC^{p+q}$ с $dc \in F^{p+r}C^{p+q+1}$ по модулю πdF^pC^{p+q-1}, т. е. в обозначениях из доказательства предл. 4.3 на стр. 77 равен $\pi Z_r^{p,q}$. Знаменатель в (4-32) состоит из π_*-образов классов когомологий тех коциклов $c \in F^{p+1}C^{p+q+1}$ которые лежат в $dF^{p-r+1}C^{p+q}$, и стало быть, изоморфен $\pi dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}$. Таким образом, при каждом $r \geqslant 1$ таблица E_r спектралки (4-32) состоит из тех же подфакторов в C, что и таблица E_r у спектралки из предл. 4.3. Поскольку дифференциалы обеих таблиц являются ограничениями дифференциала $d : C \to C$ на эти подфакторы, спектральные последовательности совпадают друг с другом, начиная с таблицы E_1.

Предложение 4.5
Пусть в представленной на рис. 4◇1 биградуированной точной паре при каждом n модули $D^{p,q}$ с $p+q=n$ зануляются при всех $p \gg 0$ и становятся равными одному и тому же модулю H^n при $p \ll 0$, причём при этих p все морфизмы $i : D^{p,q} \to D^{p-1,q+1}$ между модулями H^n тождественны. Тогда спектральная последовательность такой точной пары сходится к присоединённым градуированным факторам убывающих фильтраций на модулях H^n подмодулями $F^pH^n = i^{m(p,n)}(D^{p,n-p})$, где степень $m(p,n)$ настолько велика, чтобы $i^{m(p,n)}$ отображал $D^{p,n-p}$ в H^n.

Доказательство. Согласно форм. (4-31) на стр. 82 при фиксированных p, q и $r \gg 0$

$$E_r^{p,q} \simeq \frac{k^{-1}\left(i^{r-1}D^{p+r-1,q-r+1}\right)}{j\left(\ker(i^{r-1}|_{D^{p,q}})\right)} \simeq \frac{k^{-1}(0)\cap D^{p,q}}{j\ker\left(i^{m(p,n)} : D^{p,q}\to H_n\right)} \simeq$$
$$\simeq \frac{\ker(k : E_r^{p,q}\to D^{p+1,q})}{j\ker i^{m(p,n)}} \simeq \frac{jD^{p,q}}{j\ker i^{m(p,n)}} \simeq \frac{D^{p,q}}{\ker i^{m(p,n)}} \simeq \operatorname{im} i^{m(p,n)}\,.$$

□

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 4.1. Пусть стрелка α ведёт в объект C, а β — из C. Поскольку $\beta\alpha = 0$, вложение $\alpha' : \operatorname{im}\alpha \hookrightarrow C$ и сюрьекция $\beta' : C \twoheadrightarrow \operatorname{im}\beta$ пропускаются, соответственно, через $\ker\beta$ и $\operatorname{coker}\alpha$ при помощи единственных стрелок ι и π:

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{coker}\varkappa = \operatorname{im}\beta & \\
\ker\zeta = \operatorname{im}\alpha \arrow[r, hook, "\alpha'"] \arrow[dr, hook, "\iota"'] & C \arrow[u, two heads, "\beta'"'] \arrow[r, two heads, "\zeta"'] & \operatorname{coker}\alpha \arrow[ul, "\pi"'] \\
& \ker\beta \arrow[u, hook, "\varkappa"'] &
\end{tikzcd} \tag{4-33}$$

Покажем, что ι является ядром, а π — коядром композиции $\zeta\varkappa : \ker\beta \to \operatorname{coker}\alpha$. Тогда ι автоматически будет инъективен, π — сюрьективен, а $\operatorname{coker}\iota = \operatorname{coim}(\zeta\varkappa)$ будет канонически изоморфен $\operatorname{im}(\zeta\varkappa) = \ker\pi$ в силу абелевости объемлющей категории. Во-первых, $\zeta\varkappa\iota = \zeta\alpha' = 0$. Во-вторых, если $\zeta\varkappa\eta = 0$ для некоторого $\eta : X \to \ker\beta$, то существует единственный такой $\eta' : X \to \ker\zeta = \operatorname{im}\alpha$, что $\varkappa\eta = \alpha'\eta' = \varkappa\iota\eta'$. В силу инъективности $\varkappa$, это равносильно $\eta = \iota\eta'$. Рассуждение про π полностью симметрично.

Упр. 4.2. Пусть симплекс x имеет вершины $0, 1, \dots, n$, упорядоченные по возрастанию. Цепь $\partial^2 x = \sum\limits_{j=0}^{n-1}\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_i(0, 1, \dots, n)$ является суммой $(n-2)$-мерных симплексов вида

$$0, 1, \dots, \widehat{\mu}, \dots, \hat{\nu}, \dots, n,$$

где $\mu < \nu$ и крышки означают пропуск μ-той и ν-той вершины. Каждый такой симплекс появляется в сумме ровно два раза: как $\partial_\mu\partial_\nu x$ и как $\partial_{\nu-1}\partial_\mu x$, и эти вхождения имеют противоположные знаки.

Упр. 4.3. В обозначениях с рис. 1◇1 на стр. 8 модуль $C_2 \simeq \mathbb{Z}^2$ имеет базис f_1, f_2, модуль $C_1 \simeq \mathbb{Z}^3$ имеет базис e_1, e_2, e_3, модуль $C_0 \simeq \mathbb{Z}$ имеет базис e, а граничный оператор действует на симплексы триангуляции по формулам[1]

$$\partial(f_1) = e_1 - e_3 + e_2 \qquad \partial(f_2) = e_2 - e_3 + e_1$$
$$\partial(e_1) = \partial(e_2) = \partial(e_3) = v - v = 0$$
$$\partial(v) = 0\,.$$

Таким образом, комплекс имеет вид $0 \to \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z} \to 0$, где стрелка $\mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$ нулевая, а стрелка $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^3$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Поэтому $H_2 \simeq \mathbb{Z}$ с базисом $f_1 - f_2$, $H_1 \simeq \mathbb{Z}^2$ с базисом e_1, e_2, $H_0 \simeq \mathbb{Z}^2$ с базисом v.

Упр. 4.6. $\varphi(\xi)$ является коциклом, поскольку $d_W\varphi\xi = \varphi d_V\xi = 0$. Класс $\varphi(\xi + d_V\zeta) = \varphi(\xi) + d_W(\varphi(\zeta))$ по модулю кограниц совпадает с классом $\varphi(\xi)$.

[1] См. формулу (1-7) на стр. 8.

Упр. 4.10. Пусть $\psi : U \to V$ и $d_V\psi = \psi d_U$. Тогда для $\varphi = \delta_W\gamma + \gamma d_V$ имеем $\varphi\psi = \delta_W\gamma\psi + \gamma d_V\psi = \delta_W\gamma\psi + \gamma\psi d_U$.

Упр. 4.11. Если A стягиваем, то единственные отображения $\iota : 0 \to A$ и $\pi : A \to 0$ являются взаимно обратными изоморфизмами в категории $\mathcal{H}o$, т. к. $\pi\iota = \mathrm{Id}_0$, а $\iota\pi = 0 \sim \mathrm{Id}_A$.

Упр. 4.12. Первое проверяется прямой выкладкой:

$$\begin{pmatrix} -d_V & 0 \\ 1 & d_V \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -d_V & 0 \\ 1 & d_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d_V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & d_V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V)} .$$

Аналогично проверяется, что[1] $\iota_{\mathrm{Id}} = [d, \gamma']$ для $\gamma' : v \mapsto \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$, а $\pi_{\mathrm{Id}} = [d, \gamma'']$ для $\gamma'' : \begin{pmatrix} v_1 \\ v \end{pmatrix} \mapsto v_1$.

Упр. 4.13. Базисный моном $\xi_I \otimes x^M = \xi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_k} \otimes x_1^{n_1} \ldots x_m^{n_m}$ переводится дифференциалом ∂d в

$$\Big(\sum_{i\in I} m_i\Big) \cdot \xi_I \otimes x^M +$$

$$+ \sum_{j\notin I} \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{\nu-1} m_{i_\nu} \cdot \xi_j \wedge \xi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{\xi}_{i_\nu} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_k} \otimes x_1^{m_1} \cdots x_{i_\nu}^{m_{i_\nu}-1} \cdots x_j^{m_j+1} \cdots x_n^{m_n} ,$$

а дифференциалом $d\partial$ — в

$$\left(\sum_{j\notin I} (m_j + 1)\right) \cdot \xi_I \otimes x^M +$$

$$+ \sum_{j\notin I} \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{\nu} m_{i_\nu} \cdot \xi_j \wedge \xi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{\xi}_{i_\nu} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_k} \otimes x_1^{m_1} \cdots x_{i_\nu}^{m_{i_\nu}-1} \cdots x_j^{m_j+1} \cdots x_n^{m_n} .$$

где «крышка» означает пропуск стоящего под нею сомножителя.

Упр. 4.16. Выберем в $V \otimes V$ и $V^* \otimes V^*$ двойственные базисы ξ_ν и ξ_ν^* так, чтобы ξ_ν с $\nu \in N$ составляли базис в подпространстве $I \subset V \otimes V$, а ξ_μ^* с $\mu \notin N$ — базис в $I^\perp \subset V^* \otimes V^*$. Поскольку $\varkappa = \sum_i e_i \otimes x_i$, где e_i и x_i суть двойственные базисы в V и в V^*, его квадрат

$$\varkappa^2 = -\sum_{ij} \big(e_i \otimes e_j\big) \otimes \big(x_i \otimes x_j\big) \pmod{I \otimes \big(V^* \otimes V^*\big) + \big(V \otimes V\big) \otimes I^\perp}$$

является классом (по модулю соотношений в алгебре $A \otimes B$) эндоморфизма

$$-\mathrm{Id}_{V\otimes V} \in \big(V \otimes V\big) \otimes \big(V^* \otimes V^*\big) \simeq \mathrm{End}(V \otimes V) ,$$

который в двойственных базисах ξ_ν и ξ_ν^* в $V \otimes V$ и $V^* \otimes V^*$ тоже запишется как

$$\varkappa^2 = -\sum_\alpha \xi_\alpha \otimes \xi_\alpha^* = -\sum_{\nu\in N} \xi_\nu \otimes \xi_\nu^* - \sum_{\mu\notin N} \xi_\mu \otimes \xi_\mu^* \in I \otimes \big(V^* \otimes V^*\big) + \big(V \otimes V\big) \otimes I^\perp .$$

[1] Напомню, что $\iota_{\mathrm{Id}} : v \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$, а $\pi_{\mathrm{Id}} : \begin{pmatrix} v_1 \\ v \end{pmatrix} \mapsto v_1$.

Упр. 4.20. Корректность j_1: $j(x)$ коцикл, т. к. $dj(x) = jkj(x) = 0$; если $i(x') = i(x_2)$, то $x_2 = x' + k(y)$, и $j(x_2) = j(x') + dy$ когомологичен $j(x')$. Корректность k_1: $k(d(E)) \subset kj(D) = 0$. Равенство нулю композиций ik_1, $j_1 i$ и $k_1 j_1$ вытекает из равенства нулю композиций ik, ji и kj. Если $i(i(x)) = 0$, то $i(x) = k(y)$, причём $d(y) = jk(y) = j(i(x)) = 0$, т. е. $\ker(i) \subset k_1(H(E))$. Если $j_1(i(x)) \in d(E)$, т. е. $j(x) = jk(y)$, то $x = k(y) + i(x')$ и $i(x) = i^2(x')$, т. е. $\ker j_1 \subset i^2(D)$. Если $k_1(y) = k(y) = 0$, то $y = j(x) = j_1(i(x))$, т. е. $\ker(k_1) \subset j_1(i(D))$.