

НАЗВАНИЕ КУРСА: «Введение в теорию категорий и гомологическую алгебру»

ЛЕКТОР: А. Л. Городенцев

УЧЕБНАЯ НАГРУЗКА: осенний семестр 2018/19 уч. года, 4 часа в неделю, 5 кредитов.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: первый год бакалавриата (стандартные курсы алгебры, анализа, геометрии, комбинаторики, логики и топологии).

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: Язык категорий и функторов является универсальным средством для выражения алгебраических свойств объектов и отображений между ними в той или иной теории, к какой бы области математики она не относилась. Умение думать на этом языке позволяет находить простые концептуальные ответы на многие кажущиеся трудными вопросы и угадывать правильные постановки новых интересных задач. Целью курса является овладение категорными конструкциями на естественных содержательных примерах и приобретение навыков работы с основным для абелевых категорий вычислительным инструментом — комплексами и их гомологиями.

ПРИМЕРНАЯ ПРОГРАММА:

- Категории, функторы, предпучки. Примеры: симплициальные множества, предпучки на топологических пространствах. Естественные преобразования, эквивалентность категорий. Категория функторов, лемма Йонеды, представимые функторы и задание объектов универсальными свойствами. ([GM], [G], [M])
- Сопряжённые функторы. Пределы диаграмм. Фильтрующиеся категории. Примеры: \mathbb{Q}/\mathbb{Z} , неархимедово пополнение кольца \mathbb{Z} , локализация и некоммутативные дроби Ore. ([GM], [G], [M])
- Аддитивные, точные и абелевы категории. Диаграммный поиск, леммы о последовательностях. Прямые суммы и произведения. Инъективные, проективные, (ко)порождающие и (ко)компактные объекты. Характеризация категорий модулей, эквивалентность Мориты. Если позволит время: теорема о вложении. ([GM], [G], [M], [W])
- Категории комплексов, гомотопии и гомологии. Примеры: комплекс цепей симплициального множества, резольвента модуля, резольвенты мономиальных идеалов. Длинная точная последовательность гомологий. Конус морфизма. ([GM], [W])
- Спектральные последовательности точной пары, фильтрованного комплекса и свёртки бикомплекса. ([GM], [W])
- Ext и Tor на категории модулей. Инъективные и проективные резольвенты. Умножения и свёртки. Комплексы Кошуля, теорема Гильберта о сизигиях. ([B], [W])
- Бар-резольвента. Когомологии алгебр и групп. Классифицирующие пространства. ([B], [W])
- Если позволит время: триангулированные категории и производная категория от абелевой категории. ([GM], [W])

РЕКОМЕНДУЕМЫЕ УЧЕБНИКИ:

[B] Н. Бурбаки, «Гомологическая алгебра» (Алгебра X).

[GM] С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин, «Методы гомологической алгебры», часть I.

[G] А. Л. Городенцев, «Алгебра – 2».

http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/algebra-2_2015.VI.15.pdf.

[M] С. Маклейн, «Категории для работающего математика».

[W] С. А. Weibel, «An Introduction to Homological Algebra».