Когомологии алгебр 2

ГА7½◇1 (комплекс Шевалле). Обозначим через $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ и $\Lambda\mathfrak{g}$ универсальную обёртывающую и внешнюю алгебры алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и вложим $\Lambda\mathfrak{g}$ в $\mathsf{T}\mathfrak{g} \subset \mathsf{T}\mathfrak{U}$ по правилу

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_m \mapsto \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(m)} .$$

Покажите, что **а)** $\mathfrak{U} \otimes \Lambda\mathfrak{g} \subset \mathfrak{U} \otimes \mathsf{T}(\mathfrak{U}) = \mathbb{B}(\mathfrak{U}) \underset{\mathfrak{U}}{\otimes} \Bbbk$ переводится в себя бар-дифференциалом и подкомплекс $\cdots \to \mathfrak{U} \otimes \Lambda^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{U} \xrightarrow{\varepsilon} \Bbbk \to 0$ тоже является свободной резольвентой тривиального $\mathfrak{U}$-модуля $\Bbbk$ **б)** ограничение на неё бар-дифференциала имеет вид $\partial\left(u \otimes x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_m\right) = $ $= \sum\limits_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} u x_i \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_m + \sum\limits_{i<j} (-1)^{i+j} u \otimes [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_i \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_m .$

ГА7½◇2. Покажите, что сопоставление точной тройке $\mathfrak{g}$-модулей $0 \to V \to W \xrightarrow{\pi} \Bbbk \to 0$ отображения $\xi : \mathfrak{g} \to V$, $x \mapsto xw$, где $w \in W$ — произвольно фиксированный элемент с $\pi(w) = 1$, корректно задаёт биекцию между классами изоморфных расширений $\mathfrak{g}$-модуля V тривиальным одномерным модулем $\Bbbk$ и группой $H^1(\mathfrak{g}, M)$ первых гомологий комплекса, полученного применением $\operatorname{Hom}(\,*\,, M)$ к комплексу Шевалле.

ГА7½◇3. Для произвольного $\mathfrak{g}$-модуля M зададим на пространстве $\mathfrak{h} = M \oplus \mathfrak{g}$ скобку правилами $[m_1, m_2]_{\mathfrak{h}} = 0$, $[x, m]_{\mathfrak{h}} = xm$, $[x, y]_{\mathfrak{h}} = [x, y]_{\mathfrak{g}} + \beta(x, y)$, где $m \in M$, $x, y \in \mathfrak{g}$, а $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to M$ билинейная форма. Покажите, что сопоставление $\mathfrak{h} \mapsto \beta$ задаёт биекцию между группой $H^2(\mathfrak{g}, M)$ и классами алгебр Ли $\mathfrak{h}$, содержащих M в качестве абелева идеала с $\mathfrak{h}/M \simeq \mathfrak{g}$, которые рассматриваются с точностью до изоморфизма алгебр Ли, тождественного и на M и $\mathfrak{g}$.

ГА7½◇4 (квадратичные алгебры). Для конечномерного векторного пространства V над полем $\Bbbk$ алгебра $A = \mathsf{T}(V)/(I)$, где (I) — двусторонний идеал, порождённый подпространством $I \subset V \otimes V$, и алгебра $B = A^! = \mathsf{T}(V^*)/(I^\perp)$, где $I^\perp = \operatorname{Ann} I \subset V^* \otimes V^*$, называются *двойственными квадратичными алгебрами*. Зададим на $B \otimes A$ умножение правилом $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (-1)^{|a_2||b_1|} (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$, а на $K_B \overset{\text{def}}{=} B \otimes A^*$ — структуру правого модуля над полученной алгеброй $B \otimes A$ так, что элемент $\beta \otimes a$ действует на $B \otimes A^*$ оператором $\varrho_\beta \otimes \lambda_a^*$, где $\varrho_\beta : B \to B$, $\beta' \mapsto \beta'\beta$, а $\lambda_a * : A^* \to A^*$ двойствен оператору $\lambda_a : A \to A$, $a' \mapsto aa'$. Покажите что элемент Казимира $\varkappa \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Id}_V \in \operatorname{End}(V) = V \otimes V^* \subset B \otimes A$ имеет $\varkappa^2 = 0$ в алгебре $B \otimes A$ и что правое умножение на него задаёт на $B \otimes A^*$ структуру комплекса[1] левых B-модулей с дифференциалом $\partial : \beta \otimes \alpha \mapsto \sum (\beta \cdot x_i) \otimes (e_i \llcorner \alpha)$, где $x_i \in V^*$ и $e_i \in V$ — двойственные базисы.

ГА7½◇5. Покажите, что алгебры $S(V)$ и $\Lambda(V^*)$ квадратично двойственны, и опишите когомологии их комплекса Кошуля.

ГА7½◇6. Докажите равносильность следующих условий на двойственные квадратичные алгебры A и B: **а)** комплекс Кошуля $B \otimes A^*$ является свободной резольвентой тривиального модуля $\Bbbk$ в категории градуированных левых B-модулей **б)** отображение $1 \otimes \tau : B \otimes A^* \to B \otimes \mathsf{T}(B)$, где оператор $\tau : A^* \to \mathsf{T}(V^*) = \mathsf{T}(B_1) \subset \mathsf{T}(B)$ двойствен факторизации $\mathsf{T}(V) \twoheadrightarrow A = \mathsf{T}(V)/(I)$, является квазиизорфизмом[2] левых DG-B-модулей между комплексом Кошуля $B \otimes A^*$ и $B \otimes \mathsf{T}(B) = \mathbb{B}(B) \underset{B}{\otimes} \Bbbk$ — тензорным произведением над B бар-конструкции алгебры B с тривиальным B-модулем $\Bbbk$ **в)** компонента степени j градуированного B-модуля $H^i(B, \Bbbk) = \operatorname{Ext}^i_B(\Bbbk, \Bbbk)$ зануляется при всех $i \neq j$ **г)** для каждого $m \geqslant 3$ подпространства $W_\nu = V^{*\otimes\nu} \otimes I^\perp \otimes V^{*\otimes(m-\nu-2)} \subset V^{*\otimes m}$ с $0 \leqslant \nu \leqslant (m-2)$ образуют *дистрибутивную решётку*, т. е. $W_\alpha \cap (W_\beta + W_\gamma) = W_\alpha \cap W_\beta + W_\alpha \cap W_\gamma$ и $W_\alpha + (W_\beta \cap W_\gamma) = (W_\alpha + W_\beta) \cap (W_\alpha + W_\gamma)$ при всех α, β, γ **д)** для каждого $m \geqslant 3$ в $V^{\otimes m}$ имеется такой базис $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_M\}$, что $W_\alpha \cap E$ является базисом в W_α для всех подпространств $W_a \subset V^{\otimes m}$ из предыдущего пункта.

---

[1] он называется *комплексом Кошуля* квадратично двойственных алгебр

[2] морфизмом комплексов, индуцирующим изоморфизм когомологий

Персональный табель ____ . **Листок № 7½ (необязательный)**

(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата	кто принял	подпись
1а			
б			
2			
3			
4			
5			
6а			
б			
в			
г			
д			