

Ext и Tor.

ГА6♦1. Пусть $M = \mathbb{C}[x, y]/(x, y)$, $N = \mathbb{C}[x, y]/(x - 2)$, $K = \mathbb{C}[x, y]/((x - 1)^2 + y^2 - 1)$. В категории $\mathbb{C}[x, y]$ -модулей вычислите все Ext^v и все Tor_v между всеми девятью парами модулей M, N, K .

ГА6♦2. Покажите, что $\text{Ext}^1(\mathbb{Z}[p^{-1}], \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_p / \mathbb{Z}$, где \mathbb{Z}_p — целые p -адические числа.

ГА6♦3. Вычислите все $\text{Ext}_{\mathbb{Z}/(n)}^i(\mathbb{Z}/(p), \mathbb{Z}/(p))$ для всех $n : p^2$.

ГА6♦4. Для двусторонних идеалов $I, J \subset R$ докажите, что $\text{Tor}_1^R(R/I, R/J) \simeq (I \cap J)/(IJ)$.

ГА6♦5. Для идеала I в коммутативном кольце K докажите, что $\text{Ext}_K^1(K/I, K/I) \simeq \text{Hom}_K(I/I^2, K/I)$.

ГА6♦6. Для левого R -модуля L и правых R -модулей M, N определите несколькими способами¹ произведение $\text{Ext}_R^\alpha(N, M) \otimes \text{Tor}_\beta^R(N, L) \rightarrow \text{Tor}_{\beta-\alpha}^R(M, L)$, убедитесь, что все эти способы приводят к одному результату, и для любых $\xi \in \text{Ext}(X, Y)$, $\zeta \in \text{Ext}(Y, Z)$, $\eta \in \text{Tor}(X, A)$, $\alpha \in \text{Ext}(A, B)$, $\gamma \in \text{Ext}(B, C)$ докажите равенства $(\zeta\xi)\eta = \zeta(\xi\eta)$ в $\text{Tor}(Z, A)$, $(\gamma\alpha)\eta = \gamma(\alpha\eta)$ в $\text{Tor}(X, C)$, $\xi(\alpha\eta) = (-1)^{|\alpha||\xi|} \alpha(\xi\eta)$ в $\text{Tor}(Y, B)$.

ГА6♦7. Назовём *классом* точной тройки $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow N \rightarrow 0$ образ $\vartheta = \delta_M(\text{Id}_M) \in \text{Ext}^1(N, M)$ при связывающем гомоморфизме $\delta_M : \text{Hom}(M, M) \rightarrow \text{Ext}^1(N, M)$ последовательности Ext'ов, возникающей от применения к этой тройке функтора $h_M = \text{Hom}(*, M)$. Докажите, что

- а) этот же класс $\vartheta = \delta^N(\text{Id}_N)$ при связывающем гомоморфизме $\delta^N : \text{Hom}(N, N) \rightarrow \text{Ext}^1(N, M)$ последовательности Ext'ов, возникающей от применения к тройке функтора $h^N = \text{Hom}(N, *)$.
- б) каждый класс $\vartheta \in \text{Ext}^1(N, M)$ реализуется точной тройкой
- в) две тройки имеют равные классы, если и только если между их средними элементами имеется изоморфизм, тождественно действующий на крайних элементах
- г) связывающий гомоморфизм $\text{Ext}^k(L, N) \rightarrow \text{Ext}^{k+1}(L, M)$ задаётся левым умножением на ϑ
- д) связывающий гомоморфизм $\text{Ext}^k(M, L) \rightarrow \text{Ext}^{k+1}(N, L)$ задаётся правым умножением на $(-1)^k \vartheta$
- е) связывающий гомоморфизм $\text{Tor}_k(N, L) \rightarrow \text{Tor}_{k-1}(M, L)$ задаётся умножением на ϑ в смысле зад. ГА6♦6.
- ж) Какой тройкой реализуется сумма классов $\vartheta_1 + \vartheta_2 \in \text{Ext}^1(N, M)$ двух данных троек?
- з) Вычислите класс расщепимой тройки.

ГА6♦8 (формула Кюннета).

а) Для любого комплекса левых R -модулей Q и такого комплекса правых R -модулей P , у которого все модули P_n и dP_n плоские, постройте точную тройку

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(P) \otimes H_q(Q) \rightarrow H_n(P \otimes_R Q) \rightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}_1^R(H_p(P), H_q(Q)) \rightarrow 0.$$

б) Покажите, что для коммутативного кольца главных идеалов R и комплекса свободных модулей P эта тройка (неканонически) расщепляется.

ГА6♦9 (теорема Гильберта о сизигиях). Рассмотрим градуированную \mathbb{k} -алгебру $S = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Покажите, что а) каждый конечно порождённый градуированный S -модуль M обладает такой свободной резольвентой $\dots \rightarrow F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, где $F_p = \bigoplus_q W_{p,q} \otimes_{\mathbb{k}} S[-q]$, $W_{p,q}$ — векторные

пространства, что дифференциал $d : F_p \rightarrow F_{p-1}$ аннулируется тензорным умножением на тривиальный S -модуль² $\mathbb{k} = S/(x_1, x_2, \dots, x_n)$ б) размерности $\dim W_{p,q}$ не зависят от выбора минимальной резольвенты в) длина минимальной резольвенты не превышает $n + 1$.

ГА6♦10. Пусть $U = \mathbb{C}^2$. Постройте минимальную резольвенту однородного идеала кривой³ Веронезе

- а) $C_3 = \{\psi^3 \mid \psi \in U\}$ в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(U^{\otimes 3})$
- б*) $C_d = \{\psi^d \mid \psi \in U\}$ в $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(U^{\otimes d})$.

¹Комбинируя различные сочетания инъективных и проективных резольвент.

²Резольвенты с этим свойством называются *минимальными*.

³Т. е. идеала, порождённого всеми однородными многочленами, зануляющимися на этой кривой.

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
з			
8а			
б			
9а			
б			
в			
10а			
б			