Сопряжённые функторы и (ко)пределы.

ГА2◇1. Покажите, что функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, если и только если существуют естественные преобразования $t : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ и $s : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$, для которых композиции естественных преобразований[1] $F \xrightarrow{F\circ s} FGF \xrightarrow{t\circ F} F$ и $G \xrightarrow{s\circ G} GFG \xrightarrow{G\circ t} G$ равны тождественным эндоморфизмам функторов F и G.

ГА2◇2. Покажите, что для козамкнутости категории $\mathcal{C}$ достаточно существования в $\mathcal{C}$ начального объекта, прямых копроизведений любых множеств объектов и коуравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом.

ГА2◇3*. Покажите, что замкнутая категория $\mathcal{C}$ тогда и только тогда обладает начальным объектом, когда имеется такое множество $S \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, что в каждый объект категории $\mathcal{C}$ ведёт стрелка из некоторого объекта, лежащего в S.

ГА2◇4*. Покажите, что функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ на замкнутой категории $\mathcal{C}$ копредставим, если и только если он сохраняет пределы и в $\mathcal{C}$ имеется такое множество объектов S, что для любых $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $x \in FX$ есть стрелка $\varphi : Y \to X$ с $Y \in S$ и $x \in \mathrm{im}\,F\varphi$.

ГА2◇5. В категории $\mathcal{A}b$ для простого $p \in \mathbb{N}$ положим $A_n = \mathbb{Z}/(p^n)$, и при $n < m$ обозначим через $\psi_{nm} : A_m \twoheadrightarrow A_n$ факторизацию, а через $\varphi_{mn} : A_n \hookrightarrow A_m$ вложение $[1] \mapsto [p^{m-n}]$. Покажите, что **а)** $\lim A_n$ вдоль стрелок ψ_{mn} изоморфен группе целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_{(p)}$ **б)** $\mathrm{colim}\,A_n$ вдоль стрелок φ_{mn} изоморфен подгруппе классов дробей вида q/p^ℓ в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

ГА2◇6. В категории $\mathcal{A}b$ положим $B_n = \mathbb{Z}/(n)$, и при $n|m$ обозначим через $\psi_{nm} : B_m \twoheadrightarrow B_n$ факторизацию, а через $\varphi_{mn} : B_n \hookrightarrow B_m$ вложение $[1] \mapsto [m/n]$. Покажите, что **а)** $\lim B_n$ по стрелкам ψ_{nm} изоморфен неархимедову пополнению $\prod_p \mathbb{Z}_{(p)}$ группы $\mathbb{Z}$ **б)** $\mathrm{colim}\,B_n$ по стрелкам φ_{mn} изоморфен $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

ГА2◇7. Пусть подмножество S в кольце[2] R с единицей таково, что $1 \in S$, $s,t \in S \Rightarrow st \in S$ и выполнены *условия Оре*: (O_1) $\forall\,\varrho \in R\ \forall\,s \in S\ \exists\,\lambda \in R\ \exists t \in S$: $\lambda s = t\varrho$ (O_2) $\forall\,\varphi,\psi \in R$ из $\exists\,s \in S$: $\phi s = \psi s$ следует, что $\exists\,t \in S$: $t\phi = t\psi$. Рассмотрим S как категорию, в которой $\mathrm{Hom}_S(s,t) \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in R \mid \lambda s = t\}$, и определим функтор $S \to \mathcal{M}od\text{-}R$, отправляя объект $s \in S$ в свободный правый R-модуль ранга один, базисный вектор в котором обозначим символом $[s^{-1}]$, а стрелку $\lambda \in \mathrm{Hom}_S(s_1,s_2)$ — в гомоморфизм $[s_1^{-1}] \mapsto [s_2^{-1}]\cdot\lambda$. Покажите, что копредел этого функтора это (правый) *R-модуль левых дробей $S^{-1}R$* образованный классами пар $s^{-1}\varrho$ по отношению эквивалентности $s_1^{-1}\varrho_1 \sim s_2^{-1}\varrho_2$, означающему существование таких $\lambda_1,\lambda_2 \in R$, что $\lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$ и $\lambda_1\varrho_1 = \lambda_2\varrho_2$. Проверьте, что это и впрямь отношение эквивалентности и задайте на $S^{-1}R$ структуру ассоциативного кольца с единицей.

ГА2◇8. Покажите, что все левые сопряжённые функторы перестановочны с копределами, а правые — с пределами[3].

ГА2◇9. Для функтора $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ и объекта $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ обозначим через $\mathcal{G}^X$ категорию, объектами которой являются пары (Y,f), где $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ и $f : X \to GY$ — стрелка в $\mathcal{C}$, а морфизм $\varphi : (Y_1,f_1) \to (Y_2,f_2)$ это такая стрелка $\varphi : Y_1 \to Y_2$ в $\mathcal{D}$, что $f_2 = G\varphi \circ f_1$ в $\mathcal{C}$. Рассмотрим в $\mathcal{D}$ тавтологическую диаграмму $G^X : \mathcal{G}^X \to \mathcal{D}$ из стрелок $\varphi : Y_1 \to Y_2$, $\varphi \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{G}^X$. Покажите, что функтор G обладает левым сопряжённым функтором $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, если и только если G перестановочен с пределами и диаграмма G^X имеет предел в $\mathcal{D}$, причём в этом случае $FX = \lim G^X$.

ГА2◇10*. Покажите, что функтор $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ на замкнутой категории $\mathcal{D}$ тогда и только тогда обладает левым сопряжённым, когда он перестановочен с пределами и для каждого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ имеется множество $S_X \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ и такое семейство стрелок $\varphi_Y : X \to GY$, по одной для каждого $Y \in S_X$, что любая стрелка $\psi : X \to GZ$ с любым $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ раскладывается в композицию $G\xi \circ \varphi_Y$ для некоторых $Y \in S_X$ и $\xi : Y \to Z$.

---

[1] Здесь $(F \circ s)_X \stackrel{\text{def}}{=} F(s_X)$, $(t \circ F)_X \stackrel{\text{def}}{=} t_{F(X)}$ и т. д.

[2] Ассоциативном, но не обязательно коммутативном.

[3] Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *перестановочен с (ко) пределами*, если для любого $L \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и любой диаграммы $\Phi : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ из того, что L является (ко) пределом Φ в $\mathcal{C}$, вытекает, что $F(L)$ является (ко) пределом диаграммы $F \circ \Phi$ в $\mathcal{D}$.

Персональный табель ____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 2 (20.09.2018)

№	**дата**	**кто принял**	**подпись**
1			
2			
3			
4			
5а			
б			
6а			
б			
7			
8			
9			
10			