А. Л. ГОРОДЕНЦЕВ*

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КАТЕГОРИЙ И ГОМОЛОГИЧЕСКУЮ АЛГЕБРУ

Это записки лекций, которые я читаю на факультете математики НИУ ВШЭ в осеннем семестре 2018 / 19 учебного года. Упражнения, встречающиеся в тексте существенны для его понимания и обычно используются в дальнейшем. Некоторые из них снабжены указаниями в конце книги.

Москва, 2018

* e-mail:gorod@itep.ru , http://gorod.bogomolov-lab.ru/

Оглавление

§1. Категории и функторы

1.1. Категории. Категория $\mathcal{C}$ это *класс*[1] объектов, обозначаемый $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$, в котором для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ задано *множество* морфизмов

$$\operatorname{Hom}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\,.$$

Для разных пар объектов эти множества не пересекаются. Морфизмы удобно представлять себе в виде стрелок $\varphi : X \to Y$. Объединение всех стрелок категории $\mathcal{C}$ обозначается $\operatorname{Mor}\mathcal{C} = \bigsqcup_{X,Y\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ и тоже является классом, а не множеством.

Кроме того, для каждой тройки объектов $X, Y, Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ имеется отображение

$$\operatorname{Hom}(Y,Z) \times \operatorname{Hom}(X,Y) \to \operatorname{Hom}(X,Z)\,, \quad (\varphi,\psi) \mapsto \varphi\circ\psi \ (=\varphi\psi)\,,$$

именуемое *композицией*[2] и ассоциативное в том смысле, что $(\chi\circ\varphi)\circ\psi = \chi\circ(\varphi\circ\psi)$ всякий раз, когда эти композиции определены.

Наконец, у каждого объекта $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ есть *тождественный эндоморфизм*

$$\operatorname{Id}_X \in \operatorname{Hom}(X,X)\,,$$

удовлетворяющий условиям[3] $\varphi\circ\operatorname{Id}_X = \varphi$ и $\operatorname{Id}_X\circ\psi = \psi$ для любых стрелок $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Z \to X$.

Подкатегория $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ это категория, все объекты, стрелки и композиции которой наследуются из $\mathcal{C}$. Подкатегория называется *полной*, если для всех $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\,.$$

Категория $\mathcal{C}$ называется *малой*, если $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ это *множество*, а не больший класс. В этом случае $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$ тоже является множеством.

Пример 1.1 (категории, не являющиеся малыми)
Примеры категорий, которые *не* являются малыми, это категория $\mathcal{S}et$ всех множеств и всех отображений, категория $\mathcal{T}op$ топологических пространств и непрерывных отображений, категория $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ векторных пространств над полем $\Bbbk$ и $\Bbbk$-линейных отображений и её полная подкатегория $vec_{\Bbbk}$ конечномерных пространств, категории R-$\mathcal{M}od$ и $\mathcal{M}od$-R левых и правых модулей над кольцом R и R-линейных отображений и их полные подкатегории R-mod и mod-R конечно представимых[4] модулей, категория абелевых групп $\mathcal{A}b = \mathbb{Z}$-$\mathcal{M}od$, категория $\mathcal{G}rp$ всех групп и групповых гомоморфизмов, категория $\mathcal{C}mr$ коммутативных колец с единицей и гомоморфизмов, переводящих единицу в единицу, и т. п.

---

[1]Не хотелось бы вдаваться в точную формализацию этого термина (содержательную в той же мере, как формализация арифметики и теории множеств, изучаемые в стандартном курсе математической логики). Для наших нужд достаточно, что такая формализация существует и позволяет говорить, например, о «категории множеств», объекты которой, по понятным причинам, множества не образуют.

[2]Значок композиции «$\circ$», как и знак умножения, принято опускать, когда ясно, о чём речь.

[3]Выкладка $\operatorname{Id}' = \operatorname{Id}'\circ\operatorname{Id}'' = \operatorname{Id}''$ показывает, что тождественный морфизм единствен.

[4]Модуль называется *конечно представимым*, если он изоморфен фактору свободного модуля конечного ранга по конечно порождённому подмодулю.

Пример 1.2 (предпорядки, чумы и топологии)
Каждое множество M с предпорядком[1] $\leqslant$ может рассматриваться как малая категория, объекты которой суть элементы $m \in M$, стрелки суть неравенства:

$$\mathrm{Hom}_M(n,m) = \begin{cases} \text{одноэлементное множество, когда } n \leqslant m, \\ \varnothing \text{ в остальных случаях}, \end{cases}$$

а композиция стрелок $k \leqslant \ell$ и $\ell \leqslant n$ это стрелка $k \leqslant n$. Таким образом, наличие композиции и тождественных морфизмов превращаются в транзитивность и рефлексивность отношения $\leqslant$.

Если предпорядок $\leqslant$ кососимметричен, т. е. задаёт на M (частичный) порядок, то при $m \neq n$ как минимум одно из множеств $\mathrm{Hom}(m,n)$, $\mathrm{Hom}(n,m)$ пусто. Важным примером такой категории-чума[2] является категория $\mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств топологического пространства X, стрелками в которой являются включения:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(X)}(U,W) = \begin{cases} \text{вложение } U \hookrightarrow W, \text{ если } U \subseteq W \\ \text{пустое множество, когда } U \nsubseteq W. \end{cases}$$

Пример 1.3 (малые категории и ассоциативные алгебры)
Всякую ассоциативную алгебру[3] A с единицей $e \in A$ можно рассматривать как малую категорию с одним объектом e и множеством стрелок $\mathrm{Hom}(e,e) = A$, композиция на котором задаётся умножением в этой алгебре. Наоборот, со всякой малой категорией $\mathcal{C}$ и коммутативным кольцом K можно связать *алгебру стрелок* $K[\mathcal{C}]$, состоящую из формальных конечных линейных комбинаций стрелок категории $\mathcal{C}$ с коэффициентами в K. Условимся для заданного множества M обозначать через $K \otimes M$ свободный K-модуль с базисом M, образованный всеми конечными формальными линейными комбинациями элементов множества M с коэффициентами из K. Тогда

$$K[\mathcal{C}] \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{X,Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} K \otimes \mathrm{Hom}(X,Y) = \left\{ \sum x_i \varphi_i \;\middle|\; x_i \in K,\ \varphi_i \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \right\}.$$

Умножение стрелок в алгебре $K[\mathcal{C}]$ определяется их композицией в категории $\mathcal{C}$

$$\varphi\psi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \varphi \circ \psi & \text{если конец } \psi \text{ совпадает с началом } \varphi \\ 0 & \text{во всех прочих случаях} \end{cases}$$

и по дистрибутивности распространяется на произвольные конечные линейные комбинации стрелок. Алгебру $K[\mathcal{C}]$ можно представлять себе как алгебру финитных квадратных матриц[4], строки и столбцы которых занумерованы объектами категории, и в каждой клетке (Y,X) стоят элементы из своего K-модуля $K \otimes \mathrm{Hom}(X,Y)$. Эта алгебра, вообще говоря, некоммутативна и без единицы, однако, для всякого $f \in K[\mathcal{C}]$ существует идемпотент $e_f = e_f^2$ со свойствами $e_f \circ f = f \circ e_f = f$. В качестве такового можно взять сумму тождественных эндоморфизмов Id_X всех объектов X, служащих началами или концами стрелок, линейной комбинацией которых является стрелка f.

[1] Т. е. рефлексивным и транзитивным бинарным отношением.
[2] Т. е. частично упорядоченного множества.
[3] Более общим образом — любой ассоциативный моноид, т. е. полугруппу с единицей.
[4] Возможно, бесконечного размера, но с конечным числом ненулевых элементов.

1.1.1. Мономорфизмы, эпиморфизмы и изоморфизмы. Стрелка φ называется *мономорфизмом*[1] (соотв. *эпиморфизмом*[2]), если на неё можно сокращать слева (соотв. справа), т. е. когда $\varphi\alpha = \varphi\beta \Rightarrow \alpha = \beta$ (соотв. $\alpha\varphi = \beta\varphi \Rightarrow \alpha = \beta$). По умолчанию мы используем стрелки $\hookrightarrow$ для обозначения мономорфизмов, и стрелки $\twoheadrightarrow$ для эпиморфизмов. Стрелка $\varphi : X \to Y$ называется *изоморфизмом* (или *обратимой* стрелкой) и обозначается $\xrightarrow{\sim}$, если существует такая стрелка $\psi : Y \to X$, что $\varphi\psi = \mathrm{Id}_Y$ и $\psi\varphi = \mathrm{Id}_X$. В этой ситуации объекты X и Y называются *изоморфными*, а морфизмы φ и ψ — *обратными* друг к другу. Например, в предупорядоченном множестве M, рассматриваемом как категория[3], изоморфность элементов m и n означает, что $m \leqslant n$ и $n \leqslant m$, т. е. m и n принадлежат одному классу эквивалентности, ассоциированному с предпорядком.

1.1.2. Подобъекты и фактор объекты. Класс инъективной стрелки с концом в X по модулю её умножения справа на обратимые стрелки называется *подобъектом* объекта X, а класс сюрьективной стрелки с началом в X по модулю левого умножения на обратимые стрелки — *фактор объектом* объекта X. Категория называется *умеренно мощной*[4], если подобъекты любого её объекта образуют множество. Все категории из прим. 1.3 умеренно мощны.

Упражнение 1.1 (частичный порядок на под- и фактор объектах). Проверьте, что в умеренно мощной категории отношение $\varphi \subseteq \psi$, означающее, что существует такая стрелка ξ, что $\varphi = \psi\xi$, задаёт частичный порядок на множестве подобъектов, а отношение $\varphi \geqslant \psi$, означающее наличие такой стрелки ξ, что $\varphi = \xi\psi$, задаёт частичный порядок на множестве фактор объектов.

Пример 1.4 (конечные упорядоченные множества и комбинаторные симплексы) Обозначим через Δ_{big} категорию, объектами которой являются конечные упорядоченные множества X, а морфизмами — сохраняющие порядок[5] отображения. Категория Δ_{big} не является малой[6], но содержит полную малую подкатегорию $\Delta \subset \Delta_{\mathrm{big}}$, объектами которой являются конечные подмножества в $\mathbb{Z}$ вида

$$[n] \overset{\mathrm{def}}{=} \{0, 1, \dots, n\}, \quad n \geqslant 0, \tag{1-1}$$

со стандартным порядком. Множество (1-1) называется n-мерным *комбинаторным симплексом*, а категория Δ — *симплициальной категорией*. Для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\Delta_{\mathrm{big}}$ имеется *единственный* изоморфизм $n_X : X \xrightarrow{\sim} [n]$ с *единственным* $[n] \in \mathrm{Ob}\,\Delta$, а именно нумерация элементов X в порядке возрастания.

Упражнение 1.2. Сколько всего стрелок в множестве $\mathrm{Hom}_\Delta([n],[m])$? Сколько среди них инъективных? Сколько сюрьективных? Покажите, что алгебра стрелок $\mathbb{Z}[\Delta]$,

[1] А также *вложением* или *инъективным* морфизмом.
[2] А также *наложением* или *сюрьективным* морфизмом.
[3] См. прим. 1.2 на стр. 4.
[4] По-английски: *well powered*.
[5] Т. е. такие отображения $\varphi : X \to Y$, что $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \leqslant \varphi(x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in X$.
[6] По упомянутым выше логическим причинам, см. сноску на стр. **??**.

как абстрактная ассоциативная алгебра, порождается стрелками

$$e_n = \mathrm{Id}_{[n]} \qquad \text{(тождественное отображение)} \tag{1-2}$$
$$\partial_n^{(i)} : [n-1] \hookrightarrow [n] \qquad \text{(вложение, образ которого не содержит } i\text{)} \tag{1-3}$$
$$s_n^{(i)} : [n] \twoheadrightarrow [n-1] \qquad \text{(наложение, склеивающее } i \text{ с } (i+1)\text{)} \tag{1-4}$$

и опишите образующие идеала соотношений между этими стрелками.

1.1.3. Обращение стрелок. С каждой категорией $\mathcal{C}$ связана *противоположная* категория $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ с теми же объектами, но с обращённым направлением всех стрелок:

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}\,, \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)\,, \quad \varphi^{\mathrm{opp}} \circ \psi^{\mathrm{opp}} = (\psi \circ \varphi)^{\mathrm{opp}}\,.$$

На языке алгебр такое обращение стрелок означает переход от алгебры $C = K[\mathcal{C}]$ к противоположной алгебре C^{opp} из тех же элементов, но с происходящим в противоположном порядке умножением. Мономорфизмы и подобъекты категории $\mathcal{C}$ являются эпиморфизмами и фактор объектами категории $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ и наоборот.

1.2. Функторы. Функтор[1] $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ это отображение классов $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, $X \mapsto F(X)$, и набор таких отображений множеств[2]

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))\,, \quad \varphi \mapsto F(\varphi)\,, \tag{1-5}$$

что $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$ для всех $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$ всякий раз, когда композиция $\varphi \circ \psi$ определена. На языке ассоциативных алгебр, каждый функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ задаёт *гомоморфизм* алгебр стрелок $F : K[\mathcal{C}] \to K[\mathcal{D}]$. Если все отображения (1-5) сюрьективны, функтор F называется *полным*[3]. Образ такого функтора является полной подкатегорией. Если все отображения (1-5) инъективны, функтор F называется *строгим*[4]. Такой функтор задаёт вложение алгебр стрелок. Полные строгие функторы иначе называются *вполне строгими*.

Простейшие функторы — это *тождественный функтор* $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, тождественно действующий на объектах и морфизмах, и *забывающие функторы*, действующие из какой-либо категории множеств с дополнительной структурой[5], морфизмы в которой суть сохраняющие эту структуру отображения множеств, в категорию $\mathcal{S}et$ всех множеств — такие функторы просто забывают о структуре. Забывающий функтор не строг, если имеются различные морфизмы структур, одинаково действующие на подлежащих множествах, и не полон, если не всякое отображение множеств сохраняет рассматриваемую структуру.

[1] Иногда вместо «функтор» говорят *ковариантный функтор*.
[2] По одному отображению для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.
[3] По-английски: *full*.
[4] По-английски: *faithful*.
[5] Например, геометрической — такой, как топология или структура гладкого многообразия, или алгебраической — такой, как структура группы, кольца или модуля.

Пример 1.5 (геометрическая реализация комбинаторных симплексов)
Зададим функтор $\varDelta \to \mathcal{T}op$ из категории комбинаторных симплексов в категорию топологических пространств, сопоставляя n-мерному комбинаторному симплексу $[n]$ стандартный n-мерный симплекс[1]

$$\varDelta^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum x_\nu = 1\,,\; x_\nu \geqslant 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}\,, \tag{1-6}$$

а стрелке $\varphi : [n] \to [m]$ — единственное аффинное отображение $\varphi_* : \varDelta^n \to \varDelta^m$, действующее на базисные векторы по правилу $e_\nu \mapsto e_{\varphi(\nu)}$. Это строгий, но не полный функтор. Образующие элементы (1-3) и (1-4) алгебры стрелок категории $\varDelta$ переводятся этим функтором, соответственно, во *вложение i-той грани* $\varDelta^{(n-1)} \hookrightarrow \varDelta^n$ и в *вырождение вдоль i-того ребра*[2] $\varDelta^n \twoheadrightarrow \varDelta^{(n-1)}$.

1.2.1. Предпучки. Функтор $F : \mathcal{C}^{\text{opp}} \to \mathcal{D}$ называется *контравариантным функтором* из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ или *предпучком*[3] объектов категории $\mathcal{D}$ на категории $\mathcal{C}$. Такой функтор оборачивает композицию: $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$ и на языке ассоциативных алгебр является *антигомоморфизмом* алгебр стрелок.

Пример 1.6 (триангулированные пространства)
Обозначим через $\varDelta_s \subset \varDelta$ неполную подкатегорию, объектами которой тоже являются комбинаторные симплексы, $\operatorname{Ob}\varDelta_s = \operatorname{Ob}\varDelta$, но в качестве морфизмов допускаются только *строго возрастающие*[4] отображения. Категория $\varDelta_s$ называется *полусимплициальной категорией*.

Упражнение 1.3. Убедитесь, что алгебра стрелок $K[\varDelta_s]$ порождается тождественными стрелками $e_n = \mathrm{Id}_{[n]}$ и отображениями вложения граней $\partial_n^{(i)}$ из (1-3).

Предпучок множеств $X : \varDelta_s^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ на полусимплициальной категории $\varDelta_s$ называется *полусимплициальным множеством* и является ни чем иным, как комбинаторным описанием *триангулированного топологического пространства* $|X|$, которое называется *геометрической реализацией* полусимплициального множества X. В самом деле, функтор X задаёт для каждого целого неотрицательного n множество $X_n = X([n])$, каждый элемент которого мы будем воспринимать как стандартный n-мерный симплекс (1-6). Таким образом, каждое множество X_n представляет собою набор одинаковых n-мерных симплексов $\varDelta^n$. Пространство $|X|$ склеивается из них так. Стрелки $\varphi : [n] \to [m]$ категории $\varDelta_s$ биективно соответствуют n-мерным граням m-мерного симплекса $\varDelta^m$. Будем воспринимать отображение $X(\varphi) : X_m \to X_n$, которое функтор X сопоставляет стрелке φ, как *правило склейки*: оно указывает каждому m-мерному симплексу $x \in X_m$, какой именно n-мерный симплекс $X(\varphi)x \in X_n$ надлежит приклеить к x в качестве φ-той n-мерной грани.

Так, на рис. 1◇1 показана стандартная триангуляция двумерного тора, склеенного из прямоугольника, изображённого на рис. 1◇2. Эта триангуляция состоит из одного 0-мерного симплекса, в который склеятся все вершины прямоугольника, трёх 1-

[1] Т. е. выпуклую оболочку концов стандартных базисных векторов $e_0, e_1, \dots, e_n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$.
[2] Т. е. в проекцию симплекса на грань вдоль ребра, соединяющего i-тую вершину с $(i+1)$-й.
[3] Термин «предпучок» употребляется чаще в ситуациях, когда категоря $\mathcal{C}$ малая.
[4] Т. е. сохраняющие порядок и инъективные.

мерных симплексов, в которые склеятся, соответственно, две горизонтальных стороны, две вертикальных стороны, и диагональ прямоугольника, а также пары 2-мерных симплексов, на которые прямоугольник разрезается диагональю. Стрелки на рис. 1◇2 изображают порядок на множестве вершин каждого симплекса и направлены от меньших вершин к большим. Вертикальные рёбра e_2 с рис. 1◇2 изображаются на рис. 1◇1 меридианом тора, а горизонтальные рёбра e_1 — экватором тора. Соответствующее полусимплициальное множество X имеет $X_0 = \{v\}$, $X_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$, $X_2 = \{f_1, f_2\}$, и $X_i = \varnothing$ для всех $i \geqslant 3$, а отображения склейки $X(\varphi)$ действуют по правилам

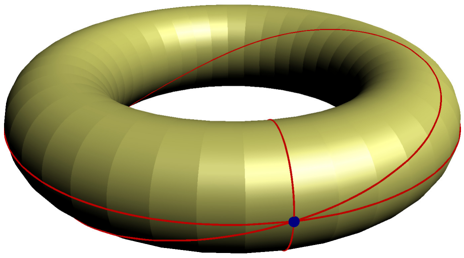

Рис. 1◇1. Триангуляция тора.

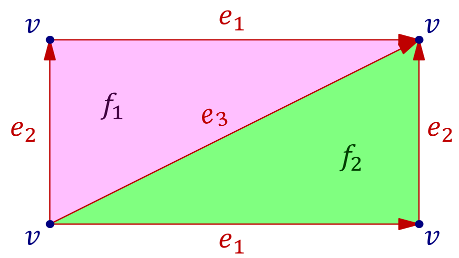

Рис. 1◇2. Симплексы триангуляции.

$$\begin{aligned} X(\partial_1^0) = X(\partial_1^1)\colon\ X_1 \to X_0\,, &\quad e_i \mapsto v \text{ для всех } i = 1,2,3\\ X(\partial_2^0)\colon\ X_2 \to X_1\,, &\quad f_1 \mapsto e_1\,,\ f_2 \mapsto e_2\,,\\ X(\partial_2^1)\colon\ X_2 \to X_1\,, &\quad f_1 \mapsto e_3\,,\ f_2 \mapsto e_3\,,\\ X(\partial_2^2)\colon\ X_2 \to X_1\,, &\quad f_1 \mapsto e_2\,,\ f_2 \mapsto e_1\,. \end{aligned} \tag{1-7}$$

Упражнение 1.4. Существует ли триангуляция окружности S^1 а) тремя 0-мерными и тремя 1-мерным симплексами[1] б) одним 0-мерным и одним 1-мерным симплексом? Существует ли триангуляция двумерной сферы S^2 в) четырьмя 0-мерными, шестью 1-мерными и четырьмя 2-мерным симплексами г) двумя 0-мерными, одним 1-мерным и одним 2-мерным симплексом? Если да, задайте все отображения $X(\varphi)$ явно, если нет, объясните почему.

Пример 1.7 (симплициальные множества)

Предпучок множеств $X : \varDelta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на всей симплициальной категории называется *симплициальным множеством*. Из каждого симплициального множества X также, как и в предыдущем примере, можно изготовить топологическое пространство $|X|$, называемое его *геометрической реализацией*. Для этого, как и выше, сопоставим каждой точке $x \in X_n$ стандартный n-мерный симплекс $\varDelta^n_x$ и обозначим через $\varphi^* \overset{\text{def}}{=} X(\varphi)$ отображение $X_m \to X_n$, которое функтор X сопоставляет каждому неубывающему отображению $\varphi : [n] \to [m]$ из категории $\varDelta$, а через $\varphi_* : \varDelta^n \to \varDelta^m$ — аффинное отображение симплексов, переводящее вершины симплекса $\varDelta^n$ в вершины симплекса $\varDelta^m$ так, как предписывает φ. После чего для каждого m, каждого $x \in X_m$ и каждой стрелки $\varphi : [n] \to [m]$ склеим каждую точку $s \in \varDelta^n_{\varphi^*(x)}$ с точкой $\varphi_*(s) \in \varDelta^m_x$. На языке

[1] Т. е. можно ли получить окружность в качестве геометричекой реализации полусимплициального множества X, у которого X_0 и X_1 состоят из трёх элементов, а все остальные X_i пусты.

формул результат такой склейки описывается как топологическое фактор пространство дизъюнктного объединения[1] $\bigsqcup_{n\geqslant 0} X_n \times \varDelta^n$ по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему отождествления $\left(\varphi^* x, s\right) \simeq \left(x, \varphi_* s\right)$ для всех точек $x \in X_m$, $s \in \varDelta^n$ и стрелок $\varphi : [n] \to [m]$.

Если стрелка $\varphi : [n] \to [m]$ является композицией наложения $\sigma : [n] \twoheadrightarrow [k]$ и вложения $\delta : [k] \hookrightarrow [m]$, то каждый n-мерный симплекс $\varDelta^n_z$, лежащий в образе φ^* и помеченный точкой $z = \sigma^* y = \sigma^* \delta^* x$, вклеится в пространство $|X|$ в виде k-мерного симплекса $\varDelta^k_y = \sigma_* \varDelta^n_z$, полученного из $\varDelta^n_z$ аффинно линейной проекцией $\sigma_* : \varDelta^n \twoheadrightarrow \varDelta^k$. При этом он окажется δ-той k-мерной гранью m-мерного симплекса $\varDelta^m_x$. Таким образом, каждый симплекс $z \in X_n$, лежащий в образе отображения σ^*, отвечающего какой-нибудь стрелке $\sigma : [n] \to [k]$ с $k < n$, виден в итоговом пространстве $|X|$ как симплекс меньшей, чем n размерности. Такие симплексы называются *вырожденными*. Их использование позволяет описывать более общие клеточные структуры, чем стандартные триангуляции. Платой за это является громоздкость получающегося описания: для любого функтора $X : \varDelta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ каждое из множеств X_n непусто.

Например, n-мерная сфера S^n гомеоморфна топологическому фактору стандартного n-мерного симплекса по его границе[2] $S^n \simeq \varDelta^n / \partial \varDelta^n$. Этот гомеоморфизм задаёт на сфере S^n клеточную структуру, состоящую из одной 0-нульмерной вершины, в которую склеится граница симплекса, и одной n-мерной клетки, в которую превратится весь симплекс. Она описывается предпучком $X : \varDelta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, у которого при всех k множество $X_k = X([k])$ получается из множества $\mathrm{Hom}_\varDelta([k], [n])$ отождествлением всех неэпиморфных стрелок в один элемент, а правило склейки $\varphi^* : X_m \to X_k$, отвечающее неубывающему отображению $\varphi : [k] \to [m]$, переводит класс стрелки $\zeta : [m] \to [n]$ в класс стрелки $\zeta\varphi : [k] \to [n]$.

Упражнение 1.5. Убедитесь, что это описание корректно задаёт предпучок X с геометрической реализацией $|X| \simeq S^n$, и найдите количество элементов в каждом множестве X_k, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Пример 1.8 (предпучки и пучки на топологических пространствах)
Исторически, термин «предпучок» впервые возник в контексте категории $\mathcal{C} = \mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств $U \subset X$ заданного топологического пространства X. Предпучок $F : \mathcal{U}(X)^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$ сопоставляет каждому открытому множеству $U \subset X$ объект $F(U) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, который называется *сечениями* предпучка F над U. В зависимости от категории $\mathcal{D}$ сечения могут образовывать множество, кольцо, алгебру, векторное или топологическое пространство и т. п. Морфизм $F(W) \to F(U)$, отвечающий включению $U \subset W$, называется *ограничением сечений*, определённых над W, на подмножество U, а результат его применения к сечению $s \in F(W)$ обозначается через $s|_U$. Вот несколько типичных примеров таких предпучков:

1) предпучок Γ_E локальных сечений непрерывного отображения $p : E \to X$ имеет в качестве $\Gamma_E(U)$ множество таких непрерывных отображений $s : U \to E$,

[1] В котором множества X_n рассматриваются с *дискретной*, а симплексы $\varDelta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ со стандартной топологией объемлющего вещественного аффинного пространства.

[2] Т. е. склеивании всех точек границы в одну. Например, двумерная сфера S^2 получается таким способом из треугольника.

что[1] $p \circ s = \mathrm{Id}_U$, а его отображения ограничения — это обычные ограничения сечений с большего подмножества на меньшее

2) беря в предыдущем примере в качестве отображения проекцию $p : X \times Y \to X$, получаем предпучок локальных непрерывных отображений $\mathcal{C}^0(X, Y)$ пространства X в пространство Y, имеющий в качестве сечений над $U \subset X$ непрерывные отображения $s : U \to Y$

3) дальнейшими специализациями являются так называемые *структурные предпучки* $\mathcal{O}_X$: предпучок дифференцируемых функций $X \to \mathbb{R}$ на гладком вещественном многообразии X, предпучок локальных голоморфных функций $X \to \mathbb{C}$ на комплексно аналитическом многообразии X, предпучок локальных рациональных функций $X \to \Bbbk$ на алгебраическом многообразии X над полем $\Bbbk$ и т. п. (все они являются предпучками алгебр над соответствующим полем)

4) постоянный *предпучок* S имеет в качестве $S(U)$ одно и то же фиксированное множество S для всех $U \subset X$, и все его отображения ограничения — тождественные морфизмы Id_S.

Предпучок F называется *пучком*, если для любого семейства открытых подмножеств U_i и любого набора таких локальных сечений $s_i \in F(U_i)$, что $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ при всех i, j, существует единственное такое сечение $s \in F(\bigcup_i U_i)$, что $s|_{U_i} = s_i$ при всех i. В случае, когда имеется не более одного такого сечения (но может не быть и ни одного), предпучок F называется *отделимым*. Все предпучки (1) – (4) отделимы, и только последний из них — постоянный *предпучок* — не является пучком, поскольку для непересекающихся открытых множеств U_1, U_2 не всякая пара констант $s_i \in S(U_i)$ является ограничением одной константы $s \in S(U_1 \sqcup U_2)$. Тем не менее, наряду с постоянным предпучком в природе имеется и

5) постоянный *пучок* $S^{\sim}$, у которого $S^{\sim}(U)$ это *непрерывные* отображения $U \to S$ в множество S, рассматриваемое с *дискретной* топологией, или — что то же самое — *локально* постоянные функции со значениями в S.

Упражнение 1.6. Опишите множество первообразных действительной функции $1/x$.

1.2.2. Функторы Hom. С каждым объектом $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ любой категории $\mathcal{C}$ связаны функтор $h^X : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, который переводит объект Y в множество морфизмов

$$h^X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(X, Y),$$

а стрелку $\varphi : Y_1 \to Y_2$ в отображение $\varphi_* : \mathrm{Hom}(X, Y_1) \to \mathrm{Hom}(X, Y_2)$, $\psi \mapsto \varphi \circ \psi$, левого умножения на эту стрелку, а также предпучок $h_X : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, который переводит объект Y в множество морфизмов

$$h_X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(Y, X),$$

а стрелку $\varphi : Y_1 \to Y_2$ в отображение $\varphi^* : \mathrm{Hom}(Y_2, X) \to \mathrm{Hom}(Y_1, X)$, $\psi \mapsto \psi \circ \varphi$, правого умножения на эту стрелку.

[1] Это требование означает, что каждая точка $x \in U$ отображается в слой $p^{-1}(x)$ над нею.

Например, предпучок $h_{[n]} : \Delta_s \to \mathcal{S}et$ на полусимплициальной категории Δ_s задаёт стандартную триангуляцию стандартного n-мерного симплекса: множество её k-мерных симплексов $h_{[n]}([k]) = \mathrm{Hom}([k],[m])$ это в точности множество всех k-мерных граней. Предпучок $h_U : \mathcal{U}(X) \to \mathcal{S}et$ на топологическом пространстве X имеет ровно одно сечение над всеми $W \subseteq U$ и пустое множество сечений над любым $W \not\subseteq U$. Вот ещё несколько примеров.

Пример 1.9 (двойственность в категории векторных пространств)
Предпучок $h_{\Bbbk} : \mathcal{V}ec_{\Bbbk}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ сопоставляет векторному пространству V двойственное векторное пространство $h_{\Bbbk}(V) = \mathrm{Hom}(V, \Bbbk) = V^*$, а линейному отображению $\varphi : V \to W$ — двойственное отображение $\varphi^* : W^* \to V^*$, переводящее линейную форму $\xi : W \to \Bbbk$ в линейную форму $\xi \circ \varphi : V \to \Bbbk$.

Пример 1.10 (двойственность конечных упорядоченных множеств)
Это комбинаторная версия предыдущего примера. Обозначим через через ∇_{big} категорию конечных упорядоченных множеств из не менее двух элементов, морфизмами в которой являются неубывающие отображения, переводящие минимальный элемент в минимальный, а максимальный — в максимальный[1]. Тавтологическое включение $\nabla_{\mathrm{big}} \hookrightarrow \Delta_{\mathrm{big}}$ является строгим, но не полным функтором. Предпучки

$$h_{[1]} : \Delta_{\mathrm{big}}^{\mathrm{opp}} \to \nabla_{\mathrm{big}} \quad \text{и} \quad h_{[1]} : \nabla_{\mathrm{big}}^{\mathrm{opp}} \to \Delta_{\mathrm{big}}$$

переводят упорядоченные множества $X \in \mathrm{Ob}\,\Delta_{\mathrm{big}}$ и $Y \in \mathrm{Ob}\,\nabla_{\mathrm{big}}$ в множества

$$X^* \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\Delta_{\mathrm{big}}}(X,[1]) \quad \text{и} \quad Y^* \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\nabla_{\mathrm{big}}}(Y,[1]),$$

порядок на которых задаётся поточечным сравнением значений:

$$\varphi \leqslant \psi\,, \quad \text{если } \varphi(x) \leqslant \psi(x) \text{ для всех } x.$$

Стрелка $\varphi : Z_1 \to Z_2$ переводится обоими функторами в морфизм правого умножения $\varphi^* : \mathrm{Hom}(Z_2,[1]) \to \mathrm{Hom}(Z_1,[1])$, $\xi \mapsto \xi \circ \varphi$. Иначе можно сказать, что множество Z^* это множество «дедекиндовых сечений» множества Z, т. е. множество таких разбиений $Z = Z_0 \sqcup Z_1$, что $z_0 < z_1$ для всех $z_0 \in Z_0$, $z_1 \in Z_1$, причём оба множества Z_i должны быть непусты, когда $Z \in \mathrm{Ob}\,\nabla_{\mathrm{big}}$, но одно из них может быть пусто, когда $Z \in \mathrm{Ob}\,\Delta_{\mathrm{big}}$. Обратите внимание, что сечения ведут себя *контра*вариантно по отношению к морфизмам: при наличии неубывающего отображения $Z_1 \to Z_2$ разбиение второго множества Z_2 индуцирует разбиение на Z_1, но не наоборот.

1.3. Естественные преобразования. Для пары функторов $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *естественным* (или *функториальным*) *преобразованием* F в G называется такое занумерованное объектами $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ семейство стрелок $f_X : F(X) \to G(X)$ в категории $\mathcal{D}$, что для любой стрелки $\varphi : X \to Y$ из $\mathcal{C}$ возникающая в категории $\mathcal{D}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "f_X"'] & F(Y) \arrow[d, "f_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(\varphi)"'] & G(Y) \end{tikzcd} \tag{1-8}$$

[1] Отметим, что минимальный и максимальный элементы различны.

коммутативна. На языке алгебр, гомоморфизм $F : K[\mathcal{C}] \to K[\mathcal{D}]$ наделяет алгебру $K[\mathcal{D}]$ структурой модуля над алгеброй $K[\mathcal{C}]$, в которой умножение элемента $b \in K[\mathcal{D}]$ на элемент $a \in K[\mathcal{C}]$ определяется правилом $a \cdot b \stackrel{\text{def}}{=} F(a) \cdot b$. Пара функторов F, G задаёт на алгебре $K[\mathcal{D}]$ две различных структуры $K[\mathcal{C}]$-модуля, и естественное преобразование $f : F \to G$ это гомоморфизм $K[\mathcal{C}]$-модулей, переводящий стрелку ψ с концом в $F(X)$ в стрелку $f_X \circ \psi$ с концом в $G(X)$, а все не заканчивающиеся в объектах вида $F(X)$ стрелки — в нуль.

Упражнение 1.7. Убедитесь, что $K[\mathcal{C}]$-линейность описанного отображения действительно означает, что для любого $\varphi \in K[\mathcal{C}]$ действие на $K[\mathcal{D}]$ операторов $F(\varphi)$ и $G(\varphi)$ удовлетворяет соотношению $f \circ F(\varphi) = G(\varphi) \circ f$.

1.3.1. Категории функторов. Функторы из малой категории $\mathcal{C}$ в произвольную категорию $\mathcal{D}$ образуют категорию $\mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, объектами которой являются функторы $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, а морфизмами — естественные преобразования $f : F \to G$. Для малой категории $\mathcal{C}$ мы будем обозначать категорию предпучков $\mathcal{F}un(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \mathcal{D})$ через $p\mathcal{S}h(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Опущенная буква $\mathcal{D}$ в этой записи по умолчанию означает, что $\mathcal{D} = \mathcal{S}et$, т. е. $p\mathcal{S}h(\mathcal{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}un(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \mathcal{S}et)$.

Упражнение 1.8. Проверьте, что описанное в n° 1.2.2 сопоставление $X \mapsto h_X$ задаёт функтор $\mathcal{C} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{C})$, а сопоставление $X \mapsto h^X$ — предпучок $\mathcal{C}^{\text{opp}} \to \mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{S}et)$.

Пример 1.11 (категория предпучков)
Предпучки на категории $\mathcal{U}(X)$ открытых множеств топологического пространства X обычно называются просто предпучками на X. Они образуют категорию, обозначаемую $p\mathcal{S}h(X)$. Морфизм предпучков $f : F \to G$ на X задаётся набором согласованных с ограничениями отображений между множествами сечений $f_U : F(U) \to G(U)$, по одному отображению для каждого открытого $U \subset X$. Согласованность с ограничениями означает, что $f_W(s)|_U = f_U(s|_U)$ для любой пары вложенных открытых множеств $U \subset W$ и любого сечения $s \in F(W)$. Пучки и отделимые предпучки[1] на X составляют полные подкатегории $\mathcal{S}h(X)$ и $sp\mathcal{S}h(X)$ в категории всех предпучков $p\mathcal{S}h(X)$.

Пример 1.12 (категория симплициальных множеств)
Предпучки $X : \Delta \to \mathcal{S}et$ на симплициальной категории[2] Δ, образуют категорию, морфизмами $X \to Y$ в которой являются наборы отображений $f_n : X_n \to Y_n$, согласованные со склейкой, т. е. такие, что для любого симплекса $x \in X_m$ и неубывающего отображения $\varphi : [n] \to [m]$ из Δ в Y_n выполняется равенство $f_n(\varphi^* x) = \varphi^* f_m(x)$. На геометрическом языке такому отображению отвечает непрерывное отображение $f : |X| \to |Y|$, при котором образ каждого симплекса Δ^n_x в пространстве[3] $|X|$ отображается на образ симплекса $\Delta^n_{f_n(x)}$ в пространстве $|Y|$ так, что все соотношения инцидентности[4] между симплексами при этом сохраняются.

[1]См. прим. 1.8 на стр. 9.
[2]См. прим. 1.7 на стр. 8.
[3]Этот образ, вообще говоря, может быть симплексом меньшей, чем n, размерности.
[4]Т. е. отношения вида «симплекс a является φ-той гранью (или ψ-тым вырождением) симплекса b».

1.3.2. Эквивалентности категорий. Категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются *эквивалентными*, если между ними есть такие функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, что композиция GF естественно изоморфна тождественному функтору $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, а композиция FG естественно изоморфна $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, т. е. имеются функториальные по $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ преобразования

$$GF(X) \xrightarrow{\sim} X \quad \text{и} \quad FG(Y) \xrightarrow{\sim} Y\,, \tag{1-9}$$

являющиеся для всех X и Y изоморфизмами в категориях $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ соответственно. Такие функторы F и G называются *квазиобратными* друг другу *эквивалентностями категорий*. Подчеркнём, что наличие изоморфизмов (1-9) не означает равенств $FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ или $GF = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$: объекты $GF(X)$ и X могут быть различны, как и объекты $FG(Y)$ и Y.

Пример 1.13 (выбор базиса)
Зафиксируем поле $\Bbbk$ и обозначим через $\mathcal{vec}$ категорию конечномерных векторных пространств над $\Bbbk$, а через $\mathcal{crd} \subset \mathcal{vec}$ — её полную малую подкатегорию со счётным множеством объектов, коими являются *координатные* пространства $\Bbbk^n$, где $n \geqslant 0$ и $\Bbbk^0 = \{0\}$. Зафиксируем в каждом пространстве $V \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{vec}$ какой-нибудь базис, т. е. выберем для каждого $V \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{vec}$ изоморфизм[1]

$$f_V : V \xrightarrow{\sim} \Bbbk^{\dim(V)}\,, \tag{1-10}$$

причём для всех координатных пространств положим $f_{\Bbbk^n} = \mathrm{Id}_{\Bbbk^n}$. Рассмотрим функтор $F : \mathcal{vec} \to \mathcal{crd}$, переводящий векторное пространство V в координатное пространство $\Bbbk^{\dim V}$, а стрелку $\varphi : V \to W$ — в стрелку $F(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}$, которую можно воспринимать как матрицу оператора φ в выбранных базисах пространств V и W. Покажем, что F является эквивалентностью категорий, квазиобратной к тавтологическому вложению $G : \mathcal{crd} \hookrightarrow \mathcal{vec}$. По построению мы имеем точное равенство[2] $FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{crd}}$. Противоположная композиция $GF : \mathcal{vec} \to \mathcal{vec}$ принимает значения в несопоставимой с $\mathcal{vec}$ по мощности малой подкатегории $\mathcal{crd} \subset \mathcal{vec}$. Однако изоморфизмы (1-10) задают естественное преобразование из $\mathrm{Id}_{\mathcal{vec}}$ в GF, т. к. в силу определения действия функтора F на стрелки все диаграммы (1-8) коммутативны:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_{\mathcal{vec}}(V) = V \arrow[r, "\varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{vec}}(\varphi)"] \arrow[d, "f_V"'] & W = \mathrm{Id}_{\mathcal{vec}}(W) \arrow[d, "f_W"] \\
GF(V) = \Bbbk^{\dim V} \arrow[r, "GF(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}"] & \Bbbk^{\dim W} = GF(W)\,.
\end{tikzcd}$$

Тем самым, тождественный функтор $\mathrm{Id}_{\mathcal{vec}}$ естественно изоморфен композиции GF.

Упражнение 1.9. Покажите, что категория Δ_{big} канонически эквивалентна симплициалной подкатегории $\Delta \subset \Delta_{\mathrm{big}}$ (см. прим. 1.4 на стр. 5).

[1] Переводящий выбранный базис в стандартный базис пространства $\Bbbk^n$.

[2] А не просто изоморфизм функторов.

Предложение 1.1
Функтор $G: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ тогда и только тогда задаёт эквивалентность категорий, когда он вполне строг[1] и каждый объект $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ изоморфен объекту вида $G(X)$ для некоторого (зависящего от Y) объекта[2] $X = X(Y) \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

Доказательство. Пусть для каждого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ указаны $X = X(Y) \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и изоморфизм $f_Y: Y \xrightarrow{\sim} G(X)$, причём когда $Y = G(X)$, мы положим $f_{G(X)} = \mathrm{Id}_{G(X)}$. Зададим функтор $F: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ на объектах правилом $F(Y) = X(Y)$, а для стрелки $\varphi: Y_1 \to Y_2$ положим $F(\varphi)$ равным такой стрелке[3] $\psi: X(Y_1) \to X(Y_2)$, что $G(\psi) = f_{Y_2} \circ \varphi \circ f_{Y_1}^{-1}$. Тогда $FG = \mathrm{Id}_\mathcal{C}$ и для любой стрелки $\varphi: Y_1 \to Y_2$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_\mathcal{D}(Y_1) = Y_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_{Y_1}"'] & Y_2 = \mathrm{Id}_\mathcal{D}(Y_2) \arrow[d, "f_{Y_2}"] \\
GF(Y_1) = X_1 \arrow[r, "GF(\varphi)=G(\psi)"] & X_2 = GF(Y_2)\,.
\end{tikzcd}$$

Таким образом, $f_Y: Y \xrightarrow{\sim} G(X) = GF(Y)$ задают естественный изоморфизм тождественного функтора $\mathrm{Id}_\mathcal{D}$ с композицией GF. □

Упражнение 1.10. Покажите, что функтор дуализации из прим. 1.10 и ограничение функтора дуализации из прим. 1.9 на полную подкатегорию конечномерных пространств являются квазиобратными самим себе антиэквивалентностями[4] категорий.

1.4. Представимые функторы. Предпучок $F: \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, естественно изоморфный предпучку $h_X: Y \mapsto \operatorname{Hom}_\mathcal{C}(Y, X)$ для некоторого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, называется *представимым*, и объект X в этом случае называют *представляющим* предпучок F. Двойственным образом, ковариантный функтор $F: \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ называется *копредставимым*, если он естественно изоморфен функтору $h^X: Y \mapsto \operatorname{Hom}_\mathcal{C}(X, Y)$ для некоторого объекта X, который в этом случае называется *копредставляющим* функтор F.

Упражнение 1.11. Убедитесь, что тензорное произведение конечномерных векторных пространств $U \otimes V$ копредставляет функтор $\mathcal{V}ec \to \mathcal{S}et$, сопоставляющий векторному пространству W множество билинейных отображений $U \times V \to W$.

Множество $X_n = X([n])$ всех n-мерных симплексов триангулированного топологического пространства $X: \Delta_s^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ можно описать как множество всех *симплициальных* отображений $\Delta^n \to X$ из стандартным образом триангулированного n-мерного симплекса $\Delta^n = h_{[n]}$ в триангулированное пространство X, т. е. как множество естественных преобразований $\operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(\Delta_s)}\left(h_{[n]}, X\right)$. Прямым обобщением этого наблюдения является

[1] Т. е. все отображения $G: \operatorname{Hom}_\mathcal{C}(X, Y) \to \operatorname{Hom}_\mathcal{D}(G(X), G(Y))$ являются изоморфизмами.

[2] Функторы G, обладающие этим свойством, называются *по существу сюрьективными* (по-английски: *essentially surjective*).

[3] Поскольку $G: \operatorname{Hom}(X_1, X_2) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(G(X_1), G(X_2))$ является изоморфизмом, стрелка ψ существует и единственна.

[4] Т. е. контравариантными эквивалентностями: устанавливают эквивалентность не $\mathcal{C}$ с $\mathcal{D}$, а $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ с $\mathcal{D}$.

Лемма 1.1 (лемма Ионеды 1)
Для любого предпучка множеств $F: \mathcal{C}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ на произвольной категории $\mathcal{C}$ имеется функториальная по $F \in p\mathcal{S}h(\mathcal{C})$ и по $A \in \mathcal{C}$ биекция $F(A) \simeq \operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{C})}(h_A, F)$, переводящая элемент $a \in F(A)$ в естественное преобразование

$$f_X: \operatorname{Hom}(X, A) \to F(X), \tag{1-11}$$

которое посылает стрелку $\varphi: X \to A$ в значение отображения $F(\varphi): F(A) \to F(X)$ на элементе a. Обратная биекция сопоставляет каждому естественному преобразованию (1-11) значение отображения $f_A: h_A(A) \to F(A)$ на элементе $\mathrm{Id}_A \in h_A(A)$.

Доказательство. Для любого естественного преобразования (1-11), любого объекта $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и любой стрелки $\varphi: X \to A$ мы имеем коммутативную диаграмму (1-8)

$$\begin{tikzcd} h_A(A) = \operatorname{Hom}(A, A) \arrow[r, "h_A(\varphi)"] \arrow[d, "f_A"'] & \operatorname{Hom}(X, A) = h_A(X) \arrow[d, "f_X"] \\ F(A) \arrow[r, "F(\varphi)"] & F(X), \end{tikzcd} \tag{1-12}$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ, так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)\big(f_A(\mathrm{Id}_A)\big)$. Это означает, что естественное преобразование $f: h_A \to F$ однозначно восстанавливается по элементу $a = f_A(\mathrm{Id}_A) \in F(A)$. Каждому элементу $a \in F(A)$ при этом отвечает преобразование (1-11), переводящее $\varphi \in \operatorname{Hom}(X, A)$ в $f_X(\varphi) = F(\varphi)(a) \in F(X)$ и естественное, поскольку для любой стрелки $\psi: Y \to X$ и всех $\varphi \in h_A(X)$ имеем

$$f_Y\left(h_A(\psi)\varphi\right) = f_Y(\varphi\psi) = F(\varphi\psi)a = F(\psi)F(\varphi)a = F(\psi)\left(f_X(\varphi)\right),$$

т. е. $f_Y \circ h_A(\psi) = F(\psi) \circ f_X$ как отображения $h_A(X) \to F(Y)$. □

Упражнение 1.12 (лемма Ионеды 2). Для ковариантного функтора $F: \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ постройте функториальную по F и $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ биекцию $F(A) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{C},\mathcal{S}et)}(h^A, F)$.

Следствие 1.1
Функторы $X \mapsto h_X$ и $X \mapsto h^X$ задают вполне строгие ковариантное и контравариантное вложения категории $\mathcal{C}$ в категории предпучков и ковариантных функторов соответственно. Иными словами, имеются функториальные по $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ изоморфизмы $\operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{C})}(h_A, h_B) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ и $\operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{C})}(h^A, h^B) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$.

Доказательство. Применяем леммы Ионеды к функторам $F = h_B$ и $F = h^B$. □

Следствие 1.2
Если объект $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, копредставляющий функтор $F: \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ (соотв. представляющий предпучок $F: \mathcal{C}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$) существует, то он единствен с точностью до канонического изоморфизма.

Доказательство. Если имеются два таких объекта A, B, что $h^A \simeq F \simeq h^B$ (соотв. $h_A \simeq F \simeq h_B$), то беря подходящую композицию этих естественных изоморфизмов, мы получаем естественный изоморфизм $h^B \simeq h^A$ (соотв. $h_A \simeq h_B$), которому по лемме Ионеды отвечает естественный по A и B изоморфизм $A \simeq B$. □

1.4.1. Описание объектов универсальными свойствами. При помощи сл. 1.2 можно пытаться переносить в произвольную категорию $\mathcal{C}$ естественные[1] операции над множествами, имеющиеся в категории $\mathcal{S}et$. А именно, будем называть результатом применения такой операции к набору объектов $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ представляющий объект X предпучка $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, переводящего каждый объект $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в результат применения этой операции к множествам $\operatorname{Hom}(Y, X_i)$ в категории $\mathcal{S}et$. Разумеется, такое неявное описание не даёт никаких гарантий *существования* определяемого объекта, т. к. рассматриваемый функтор может оказаться непредставимым. Однако, если он представим, то представляющий объект X, во-первых, автоматически обладает некоторыми «универсальными свойствами», а во-вторых, единствен с точностью до *единственного* изоморфизма, сохраняющего эти свойства. Вдобавок, у каждой такого рода конструкции есть двойственная версия, получающаяся из предыдущей обращением стрелок и объявляющая результатом теоретико множественной операции над объектами $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ копредставляющий объект ковариантного функтора $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящего $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в результат применения операции к множествам $\operatorname{Hom}(X_i, Y)$.

Пример 1.14 (произведение $A \times B$)
Определим *произведение* $A \times B$ объектов $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ произвольной категории $\mathcal{C}$ как объект, представляющий предпучок $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, $Y \mapsto \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)$. Если произведение существует, то имеется функториальный по Y изоморфизм

$$\beta_Y : \operatorname{Hom}(Y, A \times B) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)\,.$$

Полагая в нём $Y = A \times B$, получаем пару стрелок

$$A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B\,, \tag{1-13}$$

изображающих элемент $\beta_{A\times B}(\mathrm{Id}_{A\times B}) \in \operatorname{Hom}(A \times B, A) \times \operatorname{Hom}(A \times B, B)$. Пара стрелок (1-13) универсальна в том смысле, что для любой пары стрелок

$$A \xleftarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} B\,, \quad (\varphi, \psi) \in \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)\,, \tag{1-14}$$

существует единственная стрелка $\varphi \times \psi : Y \to A \times B$, такая что $\beta_Y(\varphi \times \psi) = (\varphi, \psi)$. Коммутативная диаграмма[2]

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}(A \times B, A \times B) \arrow[r, "h_{A\times B}(\varphi\times\psi)"] \arrow[d, "\beta_{A\times B}"'] & \operatorname{Hom}(Y, A \times B) \arrow[d, "\beta_Y"] \\
\operatorname{Hom}(A \times B, A) \times \operatorname{Hom}(A \times B, B) \arrow[r, "h_A(\varphi\times\psi)\times h_B(\varphi\times\psi)"] & \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)\,,
\end{tikzcd}$$

верхняя горизонтальная стрелка которой переводит $\mathrm{Id}_{A\times B}$ в $\varphi\times\psi$, а композиция нижней и левой стрелок действуют на $\mathrm{Id}_{A\times B}$ как

$$\mathrm{Id}_{A\times B} \xmapsto{\beta_{A\times B}} (\pi_A, \pi_B) \xmapsto{h_A(\varphi\times\psi)\times h_B(\varphi\times\psi)} \big(\pi_A \circ (\varphi \times \psi), \pi_B \circ (\varphi \times \psi)\big)\,,$$

[1] Т. е. функториальные по всем участвующим множествам.
[2] Ср. с использованной в доказательстве леммы Ионеды диаграммой из форм. (1-12) на стр. 15

показывает, что равенство $\beta_Y(\varphi\times\psi) = (\varphi, \psi)$ равносильно равенствам $\varphi = \pi_A\circ(\varphi\times\psi)$ и $\psi = \pi_B \circ (\varphi \times \psi)$.

Упражнение 1.13. Пусть диаграмма $A \xleftarrow{\pi'_A} C \xrightarrow{\pi'_B} B$ тоже универсальна в том смысле, что для любой пары стрелок (1-14) существует единственная такая стрелка $Y \to C$, композиции которой с π'_A и π'_B равны φ и π соответственно. Убедитесь, что существует единственный изоморфизм $\gamma : C \xrightarrow{\sim} A \times B$, такой что $\pi_A \circ \gamma = \pi'_A$ и $\pi_B \circ \gamma = \pi'_B$. Покажите также, что любая пара стрелок

$$\alpha : A_1 \to A_2\,, \quad \beta : B_1 \to B_2$$

задаёт единственный морфизм $\alpha\times\beta : A_1\times B_1 \to A_2\times B_2$, такой что $\alpha\circ\pi_A = (\alpha\times\beta)\circ\alpha$ и $\beta \circ \pi_B = (\alpha \times \beta) \circ \beta$.

В категории множеств произведение $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$. Снабжённое слабейшей топологией, в которой π_A и π_B непрерывны, это множество задаёт произведение и в категории топологических пространств. Снабжённое покомпонентными операциями, оно же является произведением групп, колец и модулей над кольцами.

Пример 1.15 (копроизведение $A \otimes B$)
Двойственным образом, копроизведение $A \otimes B$ объектов $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ произвольной категории $\mathcal{C}$ определяется как объект, копредставляющий ковариантный функтор

$$Y \mapsto \mathrm{Hom}(A, Y) \times \mathrm{Hom}(B, Y)$$

из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{S}et$. Обращая все стрелки в предыдущем примере, мы можем охарактеризовать копроизведение как объект, включающийся в диаграмму

$$A \xrightarrow{\iota_A} A \otimes B \xleftarrow{\iota_B} B\,,$$

универсальную в том смысле, что для любой пары стрелок в $\mathcal{C}$

$$A \xrightarrow{\varphi} Y \xleftarrow{\psi} B$$

имеется единственный морфизм $\varphi \otimes \psi\colon A \otimes B \to Y$, такой что $\varphi = (\varphi \otimes \psi) \circ \iota_A$ и $\psi = (\varphi \otimes \psi) \circ \iota_B$.

Упражнение 1.14. Убедитесь, что если такая универсальная диаграмма существует, то она единственна с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со стрелками ι_A, ι_B, и что любая пара стрелок $\alpha : A_1 \to A_2$, $\beta : B_1 \to B_2$ задаёт единственный такой морфизм $\alpha\otimes\beta : A_1\otimes B_1 \to A_2\otimes B_2$, что $\iota_A\circ\alpha = (\alpha\otimes\beta)\circ\alpha$.

Копроизведение в категории множеств и топологических пространств это дизъюнктное объединение $A\otimes B = A\sqcup B$. В категории групп это свободное произведение групп[1]

[1] Т. е. фактор свободной группы, порождённой дизъюнктным объединением $A \sqcup B$, по наименьшей нормальной подгруппе соотношений, позволяющих заменять пару соседних лежащих в одной группе букв их произведением. К примеру, $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \simeq \mathbb{F}_2$ это свободная (некоммутативная) группа с двумя образующими.

$A \otimes B = A * B$. В категории модулей над кольцом[1] копроизведение совпадает с произведением и равно прямой сумме модулей $A \otimes B = A \times B = A \oplus B$. В категории коммутативных колец с единицей копроизведение $A \otimes B$ это тензорное произведение колец[2].

Пример 1.16 (свободные модули)
Обозначим через $R\text{-}\mathcal{M}od$ категорию левых модулей над фиксированным кольцом R. Для любого множества $E \in \operatorname{Ob} \mathcal{S}et$ ковариантный функтор

$$R\text{-}\mathcal{M}od \to \mathcal{S}et\,, \quad M \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}et}(E, M)\,,$$

копредставим *свободным* R-модулем с базисом E. Мы будем обозначать такой свободный модуль через $R \otimes E$. По определению, он состоит из формальных линейных комбинаций $\sum\limits_{e \in E} x_e e$ элементов множества E с коэффициентами $x_e \in R$, лишь конечное число из которых отлично от нуля.

Упражнение 1.15. Установите функториальный по M и E изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathcal{M}od}(R \otimes E, M) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}et}(E, M)\,. \tag{1-15}$$

[1] В частности, в категории $\mathcal{A}b$ абелевых групп.
[2] Т. е. тензорное произведение подлежащих абелевых групп, как модулей над $\mathbb{Z}$, с покомпонентным умножением: $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \overset{\text{def}}{=} (a_1 \cdot a_2) \otimes (b_1 \cdot b_2)$.

§2. Сопряжённые функторы и (ко)пределы

2.1. Сопряжённые функторы. Функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ между категориями $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются, соответственно, *левым* и *правым сопряжёнными* друг другу, если имеется функториальная по $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ биекция

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))\,. \tag{2-1}$$

С каждой парой сопряжённых функторов связаны естественные преобразования

$$t : F \circ G \to \operatorname{Id}_{\mathcal{D}} \quad \text{и} \quad s : \operatorname{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F\,. \tag{2-2}$$

Стрелка $t_Y : FG(Y) \to Y$, задающая действие преобразования t над $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, является образом элемента $\operatorname{Id}_{G(Y)}$ при изоморфизме (2-1), написанном для $X = G(Y)$:

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FG(Y), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y)) \ni \operatorname{Id}_{G(Y)}\,.$$

Двойственным образом, стрелка $s_X : X \to GF(X)$ получается из $\operatorname{Id}_{F(X)}$ при изоморфизме (2-1), написанном для $Y = F(X)$:

$$\operatorname{Id}_{F(X)} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X))\,.$$

Упражнение 2.1. Убедитесь в естественности этих преобразований.

Пример 2.1 (продолжение прим. 1.16 про свободные модули)
Изоморфизм из форм. (1-15) на стр. 18 означает, что функтор

$$F : \mathcal{S}et \to R\text{-}\mathcal{M}od\,, \quad E \mapsto R \otimes E\,,$$

сопоставляющий произвольному множеству E свободный левый R-модуль с базисом E, сопряжён слева к забывающему функтору $G : R\text{-}\mathcal{M}od \to \mathcal{S}et$, переводящему модуль в множество его элементов, т. е. $\operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathcal{M}od}(R \otimes E, M) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}et}\big(E, G(M)\big)$ функториально по модулю M и множеству E. Естественное преобразование

$$s_E : E \hookrightarrow G(A \otimes E)$$

вкладывает E в качестве множества базисных векторов в множество всех векторов свободного модуля $R \otimes E$. Естественное преобразование

$$t_M : R \otimes G(M) \twoheadrightarrow M$$

это R-линейный эпиморфизм огромного свободного модуля, базисом которого служит множество всех векторов модуля M, на модуль M. Он переводит каждый базисный вектор m в элемент $m \in M$, а формальную линейную комбинацию базисных векторов — в результат её вычисления внутри модуля M. Так, при $M = R = \mathbb{R}$ векторное пространство $\mathbb{R} \otimes G(\mathbb{R})$ состоит из формальных линейных комбинаций $\sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \cdot x$, в которых лишь конечное множество коэффициентов $f(x)$ отлично от нуля. Оно изоморфно пространству всех функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с конечным носителем, и преобразование $t_{\mathbb{R}}$ сопоставляет такой функции f вещественное число $\sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \cdot x$.

Пример 2.2 (самосопряжённость представимых функторов на категории $\mathcal{Ab}$)
Для любых трёх абелевых групп A, B, C имеется канонический изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}\big(A, \mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}(B,C)\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}\big(B, \mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}(A,C)\big)\,, \tag{2-3}$$

переводящий семейство гомоморфизмов $\varphi_a : B \to C$, запараметризованное элементами $a \in A$ так, что $\varphi_{a'+a''} = \varphi_{a'} + \varphi_{a''}$ для всех $a', a'' \in A$, в запараметризованное элементами $b \in B$ семейство гомоморфизмов $\psi_b : A \to C$, $a \mapsto \varphi_a(b)$.

Упражнение 2.2. Проверьте, что каждое отображение ψ_b является гомоморфизмом абелевых групп и что $\psi_{b'+b''} = \psi_{b'} + \psi_{b''}$ для всех $b', b'' \in B$. Постройте обратное отображение из правой части (2-3) в левую.

Изоморфизм (2-3) можно переписать как $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}^{\mathrm{opp}}}\big(h_C(B), A\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}\big(B, h_C(A)\big)$. Это означает, что для любой абелевой группы C представимый функтор

$$h_C : \mathcal{Ab}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{Ab}\,, \quad X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}(X, C)\,,$$

самосопряжён. Естественное преобразование $s_X : X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}(X,C), C\big)$ сопоставляют элементу $x \in X$ гомоморфизм вычисления

$$s_X(x) = \mathrm{ev}_x : \ \mathrm{Hom}(X,C) \to C\,, \quad \varphi \mapsto \varphi(x)\,.$$

Естественное преобразование t_X представляет собою стрелку $h_C\big(h_C(X)\big) \to X$ в категории $\mathcal{Ab}^{\mathrm{opp}}$, т. е. стрелку $X \to h_C\big(h_C(X)\big)$ в категории $\mathcal{Ab}$, и в таком виде совпадает с преобразованием s_X.

Предложение 2.1
Для существования левого сопряжённого функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ к данному функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ функтор

$$h^X_G : \mathcal{D} \to \mathcal{S}et\,, \quad Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big)\,, \tag{2-4}$$

был копредставим, и в этом случае $F(X)$ является его копредставляющим объектом.

Доказательство. Необходимость очевидна из определений. Докажем достаточность. Пусть для каждого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ функтор (2-4) представляется объектом $F(X)$, т. е. имеется естественный изоморфизм функторов $f^X : h^{F(X)} \xrightarrow{\sim} h^X_G$. Чтобы продолжить соответствие $X \mapsto F(X)$ до функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ заметим, что морфизм $\varphi : X_1 \to X_2$ задаёт естественное преобразование $\varphi^* : h^{X_2}_G \to h^{X_1}_G$ заключающееся в правом умножении на φ: стрелка $\psi : X_2 \to G(Y)$ переходит в $\psi\varphi : X_1 \to G(Y)$. Из леммы Ионеды вытекает[1], что композиция естественных преобразований $\big(f^{X_1}\big)^{-1} \circ \varphi^* \circ f^{X_2} : h^{F(X_2)} \to h^{F(X_1)}$ задаётся правым умножением на единственную стрелку $F(X_1) \to F(X_2)$, которую мы и объявим образом $F(\varphi)$ стрелки φ под действием функтора F. Прямо по построению мы получаем функториальный по X изоморфизм $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$. □

[1] См. сл. 1.1 на стр. 15.

Следствие 2.1 (из доказательства предл. 2.1)
Если функтор F, сопряжённый слева к функтору G, существует, то он определяется по G однозначно с точностью до естественного изоморфизма функторов. □

Упражнение 2.3. Докажите двойственные утверждения: для существования правого сопряжённого функтора G к функтору $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ предпучок $h_Y^F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, $X \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$ был представим, и в этом случае объект $G(Y)$ его представляет, а функтор G определяется по F однозначно с точностью до естественного изоморфизма функторов.

Предложение 2.2
Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ тогда и только тогда сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, когда существуют такие естественные преобразования $t : F \circ G \to \operatorname{Id}_{\mathcal{D}}$ и $s : \operatorname{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$, что композиции $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$ и $G \xrightarrow{s \circ G} GFG \xrightarrow{G \circ t} G$ являются тождественными эндоморфизмами функторов F и G.

Доказательство. Если имеются функториальные по X и Y изоморфизмы

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), Y\big) \arrow[rr, bend left, "\varrho"] & & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big) \arrow[ll, bend left, "\lambda"] \end{tikzcd} \tag{2-5}$$

то для любой стрелки $\varphi : X_1 \to X_2$ в $\mathcal{C}$ и любого Y из $\mathcal{D}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_1), Y) & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, G(Y)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_2), Y) \arrow[u, "F(\varphi)^*"'] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, G(Y)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \arrow[u, "\varphi^*"'] \end{tikzcd}$$

вертикальные стрелки которой задаются правым умножением на $F(\varphi)$ и на φ соответственно. Рисуя это для $Y = F(X)$ и морфизма $\varphi = s_X : X \to GF(X)$, который задаёт действие над объектом X естественного преобразования $s : \operatorname{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ из форм. (2-2) на стр. 19, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FGF(X), F(X)) \arrow[u, "F(s_X)^*"'] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(X), GF(X)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \arrow[u, "s_X^*"'] \end{tikzcd}$$

верхняя стрелка λ которой переводит s_X в $\operatorname{Id}_{F(X)}$, а нижняя стрелка λ переводит $\operatorname{Id}_{GF(X)}$ в морфизм $t_{F(X)} : FGF(X) \to F(X)$, задающий действие второго естественного преобразования $t : FG \to \operatorname{Id}_{\mathcal{D}}$ из формулы (2-2) над объектом $F(X)$. Таким образом,

$$\operatorname{Id}_{F(X)} = \lambda(s_X) = \lambda s_X^* \left(\operatorname{Id}_{GF(X)}\right) = F(s_X)^* \lambda \left(\operatorname{Id}_{GF(X)}\right) = F(s_X)^* \left(t_{F(X)}\right) = t_{F(X)} \circ F(s_X),$$

а это и значит, что композиция $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$ задаёт тождественное преобразование функтора F. Проверка того, что $G \xrightarrow{s \circ G} GFG \xrightarrow{G \circ t} G$ совпадает с Id_G полностью симметрична. Наоборот, если имеются преобразования $s: \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ и $t: FG \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, зададим в (2-5) действие λ и ϱ на стрелки $\varphi: F(X) \to Y$ и $\psi: X \to G(Y)$ правилами:

$$\varrho(\varphi) = G(\varphi) \circ s_X \quad \text{и} \quad \lambda(\psi) = t_Y \circ F(\psi),$$

в правых частях которых стоят сквозные отображения вдоль стрелок

$$X \xrightarrow{s_X} GF(X) \xrightarrow{G(\varphi)} G(Y) \quad \text{и} \quad F(X) \xrightarrow{F(\psi)} FG(Y) \xrightarrow{t_Y} Y\ .$$

Композиция $\lambda\varrho(\varphi) = t_Y \circ FG(\varphi) \circ F(s_X): F(X) \to Y$ представляет собою путь из левого нижнего угла в правый верхний на диаграмме

$$\begin{tikzcd} & F(X) \arrow[rr, "\varphi"] & & Y \\ F(X) \arrow[ur, equal, "\mathrm{Id}_{F(X)}"] \arrow[rr, "F(s_X)"'] & & FGF(X) \arrow[ul, "t_{F(X)}"'] \arrow[rr, "FG(\varphi)"'] & & FG(Y) \arrow[ul, "t_Y"'] \end{tikzcd}$$

правый параллелограмм которой коммутативен в силу естественности преобразования t, а левый треугольник — в силу равенства $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$ и Id_F. Поэтому $\lambda\varrho(\varphi) = \varphi$. Равенство $\varrho\lambda(\psi) = \psi$ проверяется симметричным образом. □

Пример 2.3 (соответствие предпорядков, продолжение прим. 1.2 на стр. 4) Функтор $F: N \to M$ между предупорядоченными множествами, рассматриваемыми как категории, это просто отображение, сохраняющее предпорядок: $n_1 \leqslant n_2 \Rightarrow F(n_1) \leqslant F(n_2)$. Левая сопряжённость такого отображения сохраняющему порядок отображению $G: M \to N$ означает, что неравенства $F(n) \leqslant m$ и $n \leqslant G(m)$ равносильны друг другу. Наличие естественных преобразований $t: F \circ G \to \mathrm{Id}_M$ и $s: \mathrm{Id}_N \to G \circ F$ означает неравенства[1] $FG(m) \leqslant m$ и $n \leqslant GF(n)$ для всех $n \in N$, $m \in M$, а тождественность сквозных преобразований $F \to FGF \to F$ и $G \to GFG \to G$ — неравенства $F(n) \leqslant FGF(n) \leqslant F(n)$ и $G(m) \leqslant GFG(m) \leqslant G(m)$.

Упражнение 2.4. Убедитесь непосредственно, что условие $F(n) \leqslant m \iff n \leqslant G(m)$ на сохраняющие предпорядок отображения F, G эквивалентно системе неравенств $F(G(m)) \leqslant m$ и $n \leqslant GF(n)$ для всех $m \in M$, $n \in N$, причём если эти неравенства выполнены, то неравенства $F(n) \leqslant FGF(n) \leqslant F(n)$ и $G(m) \leqslant GFG(m) \leqslant G(m)$ выполняются автоматически.

Если оба предпорядка являются частичными порядками, последние два неравенства превращаются в равенства $F(n) = FGF(n)$ и $G(m) = GFG(m)$. Примером такой ситуации является *соответствие Галуа*: пусть группа H действует слева на множестве X, $\mathcal{S}(H)$ и $\mathcal{S}(X)$ обозначают частично упорядоченные по включению множества подгрупп в H и подмножеств X соответственно, функтор

$$F: \mathcal{S}(H) \to \mathcal{S}(X)^{\mathrm{opp}}, \quad S \mapsto X^S = \{x \in X \mid \forall h \in S\ hx = x\}$$

сопоставляет подгруппе $S \subset G$ множество её неподвижных точек, а функтор

$$G: \mathcal{S}(X)^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}(H), \quad T \mapsto Z_T = \{h \in H \mid \forall x \in T\ hx = x\}$$

[1] Которые задают «действие» этих естественных преобразований над объектами m и n.

сопоставляет подмножеству $T \subset X$ его *централизатор*[1].

Упражнение 2.5. Убедитесь, что эти функторы сопряжены: $X^S \supset T \iff S \subset Z(T)$, и что $Z_{X^{Z_T}} = Z_T$ и $X^{Z_{X^S}} = X^S$ для любых подмножества $T \subset X$ и подгруппы $S \subset H$.

Пример 2.4 (эквивалентности категорий как сопряжённые функторы)
Пусть функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ являются квазиобратными эквивалентностями[2], т. е. имеются естественные изоморфизмы $g : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} GF$ и $f : \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\sim} FG$. Как и в доказательстве предл. 2.2, рассмотрим естественные по X, Y отображения

$$\begin{aligned} \varrho_{FG} :\ & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), Y\big) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big), \quad \varphi \mapsto G(\varphi) \circ g_X = (g_X^* \circ G)\varphi \\ \varrho_{GF} :\ & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(G(Y), X\big) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(Y, F(X)\big), \quad \psi \mapsto F(\psi) \circ f_Y = (f_Y^* \circ F)\psi . \end{aligned}$$

Поскольку оба отображения

$$\begin{aligned} g_X^* :\ & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(GF(X), G(Y)\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big), \quad \xi \mapsto \xi \circ f_X , \\ G :\ & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), Y\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(GF(X), G(Y)\big), \quad \xi \mapsto G(\xi) , \end{aligned}$$

являются биективными[3], их композиция ϱ_{FG} тоже биективна. Это означает, что функтор F сопряжён слева к функтору G. По аналогичной причине биективно и преобразование ϱ_{GF}, т. е. функтор F сопряжён к функтору G также и справа. Тем самым, квазиобратные эквивалентности категорий сопряжены друг другу с обеих сторон. Отметим, что по сл. 2.1 и упр. 2.3 на стр. 21 отсюда вытекает, что если один из двух сопряжённых друг другу функторов является эквивалентностью категорий, то и другой тоже таковою является.

2.2. Тензорные произведения и Hom. Пусть R — произвольное кольцо. Тензорным произведением $M \otimes_R N$ правого R-модуля M на левый R-модуль N называется фактор тензорного произведения абелевых групп[4] $M \otimes N$ по подгруппе, порождённой всевозможными разностями $(mx) \otimes n - m \otimes (xn)$, где $m \in M$, $x \in R$ и $n \in N$. Это абелева группа, на которой кольцо R, вообще говоря, больше уже не действует, но в которой выполняются соотношения $(mx) \otimes_R n = m \otimes_R (xn)$. Тензорное умножение на фиксированный левый R-модуль N задаёт функтор из категории правых R-модулей в абелевы группы

$$\mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{A}b , \quad X \mapsto X \otimes_R N ,$$

переводящий стрелку $\varphi : X_1 \to X_2$ в стрелку $\varphi \otimes \mathrm{Id}_N : m \otimes_R n \mapsto \varphi(m) \otimes_R n$. Если левый R-модуль N одновременно является правым модулем над ещё одним кольцом S и правое действие S коммутирует с левым действием R (такие N называются *R-S бимодулями*), функтор тензорного умножения на N отображает $\mathcal{M}od\text{-}R$ в $\mathcal{M}od\text{-}S$: кольцо S действует на $M \otimes N$ справа по правилу $(m \otimes n)y = m \otimes (ny)$. С другой стороны,

[1] Т. е. поточечный стабилизатор. Обратите внимание, что оба функтора оборачивают включения.

[2] См. n° 1.3.2 на стр. 13.

[3] Первое — в силу того, что является правым умножением на обратимую стрелку g_X, второе — потому что функтор F вполне строг.

[4] Или, что то же самое, $\mathbb{Z}$-модулей.

представимый функтор $h^N : \mathcal{M}od\text{-}S \to \mathcal{A}b$, $Y \mapsto \mathrm{Hom}_S(N,Y)$, принимает значения в $\mathcal{M}od\text{-}R$: правое действие $x \in R$ на $\mathrm{Hom}_S(N,Y)$ переводит S-линейную справа стрелку $\varphi : N \to Y$ в стрелку $\varphi x : n \mapsto \varphi(xn)$, так что выполняется равенство $(\varphi x)n = \varphi(xn)$.

Предложение 2.3
Тензорное умножение на R-S-бимодуль N сопряжено слева функтору h^N, т. е. имеется естественный по $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}od\text{-}R$ и $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}od\text{-}S$ изоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}\big(X \otimes_R N, Y\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N,Y)\big). \tag{2-6}$$

Доказательство. Отображение из левой части (2-6) в правую сопоставляет S-линейному справа гомоморфизму $\varphi : X \otimes_R N \to Y$ зависящее от $x \in X$ семейство гомоморфизмов $\varphi_x : N \to Y$, $n \mapsto \varphi(x \otimes n)$. Каждый из них S-линеен справа:

$$\varphi_x(ns) = \varphi(x \otimes_R ns) = \varphi(x \otimes_R n)s = \varphi_x(n)s,$$

а сопоставление $x \mapsto \varphi_x$, как отображение $X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N,Y)$, R-линейно справа:

$$\varphi_{xr}n = \varphi(xr \otimes_R n) = \varphi(x \otimes_R rn) = \varphi_x(rn) = (\varphi_x r)n.$$

Обратное отображение из правой части (2-6) в левую переводит семейство S-линейных справа гомоморфизмов $\varphi_x : N \to Y$, которые R-линейно справа зависят от $x \in X$, в S-линейный справа гомоморфизм $\varphi : x \otimes_R n \mapsto \psi_x(n)$. □

Упражнение 2.6. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N,Y) \otimes_R N \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}\big(N, X \otimes_R N\big).$$

Пример 2.5 (индуцирование и коиндуцирование)
Если кольцо A содержится в кольце B и они имеют общую единицу, каждый правый B-модуль X одновременно является и правым A-модулем, что задаёт *функтор ограничения*

$$\mathrm{res} : \mathcal{M}od\text{-}B \to \mathcal{M}od\text{-}A. \tag{2-7}$$

Рассмотрим B как A-B бимодуль и положим в предл. 2.3 $S = N = B$, $R = A$. Абелева группа $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(B,Y)$ канонически отождествляется с Y гомоморфизмом $\varphi \mapsto \varphi(1)$, и как правый A-модуль изоморфна $\mathrm{res}\,Y$.

Упражнение 2.7. Убедитесь в этом.

Поэтому изоморфизм (2-6) из предл. 2.3 превращается в функториальный по A-модулю X и B-модулю Y изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(X \otimes_A B, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(X, \mathrm{res}\,Y).$$

Правый B-модуль $\mathrm{ind}\,X \overset{\text{def}}{=} X \otimes_A B$ называется *индуцированным* с A-модуля X. Таким образом, функтор индуцирования $\mathrm{ind} : \mathcal{M}od\text{-}A \to \mathcal{M}od\text{-}B$ сопряжён слева к функтору ограничения.

Упражнение 2.8. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \mathrm{res}\,\mathrm{ind}\,Y \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to \mathrm{ind}\,\mathrm{res}\,X.$$

Теперь рассмотрим B как B-A бимодуль и положим в предл. 2.3 $S = A$, $N = R = B$. Канонический гомоморфизм $X \otimes_B B \xrightarrow{\sim} X$, $x \otimes_B b \mapsto xb$, является изоморфизмом абелевых групп и отождествляет правый A-модуль $X \otimes_B B$ с $\operatorname{res} X$.

Упражнение 2.9. Убедитесь в этом.

Поэтому изоморфизм (2-6) из предл. 2.3 превращается в функториальный по B-модулю X и A-модулю Y изоморфизм абелевых групп

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(\operatorname{res} X, Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}\big(X, \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(B, Y)\big)\,.$$

Правый B-модуль $\operatorname{coind} Y \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(B, Y)$ называется *коиндуцированным* с A-модуля Y. Таким образом, функтор коиндуцирования $\operatorname{coind}\colon \mathcal{M}od\text{-}A \to \mathcal{M}od\text{-}B$ сопряжён справа к функтору ограничения.

Упражнение 2.10. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y\colon\ \operatorname{res}\operatorname{coind} Y \to Y \quad \text{и} \quad s_X\colon X \to \operatorname{coind}\operatorname{res} X\,.$$

В ситуации, когда $A = \Bbbk[H]$ и $B = \Bbbk[G]$ являются групповыми алгебрами группы G и её подгруппы $H \subset G$ с коэффициентами в поле $\Bbbk$, мы получаем известные из начального курса алгебры функторы (ко)индуцирования линейных представлений группы G над полем $\Bbbk$ с представлений её подгруппы H.

Упражнение 2.11*. Покажите, что функторы ind, coind : $\mathcal{M}od\text{-}H \to \mathcal{M}od\text{-}G$ естественно изоморфны, если индекс $[G : H]$ конечен.

Пример 2.6 (сингулярные симплексы)
Свяжем с топологическим пространством Y симплициальное множество его *сингулярных симплексов* $S(Y)\colon \Delta^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$, которое сопоставляет комбинаторному симплексу $[n] \in \operatorname{Ob}\Delta$ множество $S_n(Y) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y) = h_Y(\Delta^n)$ всех непрерывных отображений правильного n-мерного симплекса $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в Y, а неубывающему отображению $\varphi\colon [n] \to [m]$ — правое умножение $f \mapsto f \circ \varphi^*$ на аффинное отображение $\varphi^*\colon \Delta^m \to \Delta^n$, действие которого на вершины симплекса совпадает с φ. Возникающий таким образом функтор $S\colon \mathcal{T}op \to p\mathcal{S}h(\Delta)$ сопряжён справа функтору геометрической реализации $p\mathcal{S}h(\Delta) \to \mathcal{T}op$, $X \mapsto |X|$, из прим. 1.7 на стр. 8, т. е. имеется естественный по симплициальному множеству $X\colon \Delta^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ и топологическому пространству Y изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(|X|, Y) \simeq \operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h}(X, S(Y))\,, \tag{2-8}$$

который является категорным аналогом изоморфизма из форм. (2-6) на стр. 24. В самом деле, функтор геометрической реализации вкладывает категорию Δ в категорию $\mathcal{T}op$ в виде дизъюнктного набора $D = \bigsqcup\limits_{n\geqslant 0} \Delta^n$ правильных симплексов всех размерностей. На пространстве D имеется левое действие стрелок φ категории Δ аффинными отображениями φ_*. Оно задаёт правое действие стрелок из Δ на множестве $S(Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)$ сингулярных симплексов топологического пространства Y. С другой стороны, каждое симплициальное множество $X\colon \Delta^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ по определению снабжено правым действием стрелок категории Δ на множества $X_n = X([n])$, и геометрическая реализация $|X|$, представляющая собою фактор дизъюнктного объединения $\bigsqcup_{n\geqslant 0} X_n\times\Delta^n$ по соотношениям $(x\varphi, s) = (x, \varphi s)$, является прямым аналогом «тензорного произведения $X \otimes_\Delta D$». Таким образом, изоморфизм (2-8) имеет вид

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}\big(X \otimes_\Delta D, Y\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}\Delta}\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)\big)\,, \tag{2-9}$$

ничем не отличающийся от изоморфизма (2-6) со стр. 24.

Упражнение 2.12. Явно постройте взаимно обратные изоморфизмы между левой и правой частями формулы (2-9) и опишите естественные преобразования[1]

$$t_Y : |S(Y)| \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to S\big(|X|\big)\,.$$

2.3. Пределы диаграмм. Любую малую категорию $\mathcal{N}$ можно воспринимать как диаграмму, вершинами которой служат объекты, а стрелками — морфизмы категории $\mathcal{N}$. Функторы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ реализуют эту диаграмму в категории $\mathcal{C}$ в том смысле, что указывают объекты $X_\nu = X(\nu)$, занумерованные множеством $\mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$, а также стрелки $X(\nu \to \mu) : X_\nu \to X_\mu$, занумерованные множеством $\mathrm{Mor}\,\mathcal{N}$. Поэтому такие функторы часто называют *диаграммами* вида $\mathcal{N}$ в категории $\mathcal{C}$. Диаграммы образуют категорию $\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ с естественными преобразованиями функторов в качестве морфизмов. Каждый объект $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ задаёт *постоянную диаграмму* $\overline{Y}$, в которой все объекты $\overline{Y}_\nu = Y$, а все стрелки $\overline{Y}(\nu \to \mu) = \mathrm{Id}_Y$. Со всякой диаграммой $X \in \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ связан предпучок множеств $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et\,,\ Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(\overline{Y}, X)$. Если он представим, т. е. существует такой объект $L \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, что имеется естественный по $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, L) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(\overline{Y}, X)\,, \tag{2-10}$$

то представляющий объект L называют *пределом*[2] диаграммы X и пишут $L = \lim X$. Двойственным образом, объект $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, копредставляющий ассоциированный с диаграммой X ковариантный функтор $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et\,,\ Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X, \overline{Y})$, называется *копределом*[3] диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и обозначается $C = \mathrm{colim}\,X$. С копределом C связана функториальная по $Y \in \mathcal{C}$ биекция

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X, \overline{Y})\,. \tag{2-11}$$

Как и все (ко) представляющие объекты, (ко) пределы однозначно характеризуются своими «универсальными свойствами». Полагая $Y = L$ в формуле (2-10), мы получаем естественное преобразование $\pi : \overline{L} \to X$, соответствующее тождественному эндоморфизму Id_L и представляющее собою набор стрелок $\pi_\nu : \lim X \to X_\nu$, которые коммутируют со всеми стрелками диаграммы X и универсальны в том смысле, что для любого коммутирующего со всеми стрелками диаграммы X набора стрелок $\psi_\nu : Y \to X_\nu$,

[1] Первое является непрерывным отображением топологических пространств, второе — естественным преобразованием функторов $\Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, переводящих комбинаторный симплекс $[n]$ в множества X_n и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}\big(\Delta^n, |X|\big)$ соответственно.

[2] Или *проективным* пределом.

[3] Или *инъективным* пределом.

выпущенных из произвольного объекта $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, существует единственный морфизм $\alpha : Y \to \lim X$, такой что $\psi_\nu = \pi_\nu \circ \alpha$ для всех ν.

Двойственным образом, в копредел $C = \operatorname{colim} X$ диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ ведёт канонический набор таких коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X морфизмов $\iota_\nu : X_\nu \to \operatorname{colim} X$, что для любых перестановочных со всеми стрелками диаграммы X морфизмов $\psi_\nu : X_\nu \to Y$ в произвольный объект $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ существует единственный морфизм $\beta : \operatorname{colim} X_\nu \to Y$, такой что $\psi_\nu = \beta \circ \iota_\nu$ для всех ν.

Упражнение 2.13. Проверьте, что универсальные свойства задают предел и копредел однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со всеми каноническими стрелками π_ν и ι_ν соответственно.

Пример 2.7 (начальный, конечный и нулевой объекты)
Простейшая диаграмма — пустая. Её предел Fin называется *конечным*, а копредел Or — *начальным* объектами категории. Эти объекты однозначно с точностью до единственного изоморфизма определяются тем, что для любого $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ есть единственная стрелка $X \to \mathrm{Fin}$ и единственная стрелка $\mathrm{Or} \to X$.

Упражнение 2.14. Укажите начальный и конечный объекты в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом.

Если в категории имеется объект 0, являющийся одновременно и начальным, и конечным, то этот объект называется *нулевым*. Морфизм $X \to Y$ в категории с нулевым объектом называется *нулевым*, если он разлагается[1] в композицию $X \to 0 \to Y$.

Упражнение 2.15. Какие категории из упр. 2.14 обладают нулевым объектом?

Пример 2.8 (прямые (ко) произведения)
Малая категория $\mathcal{N}$ называется *дискретной*, если все её морфизмы исчерпываются тождественными морфизмами Id_ν с $\nu \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}$. Соответствующие *дискретные диаграммы* $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ — это семейства объектов X_ν без стрелок между ними. Пределы и копределы таких диаграмм называются *прямыми произведениями* и *копроизведениями* и обозначаются, соответственно, через $\prod\limits_\nu X_\nu$ и $\coprod\limits_\nu X_\nu$. Когда индексов всего два, мы получаем прямые (ко) произведения двух объектов из прим. 1.14 и прим. 1.15 на стр. 17. Очевидная индукция показывает, что для существования всех конечных прямых (ко) произведений достаточно существования прямых (ко) произведений любых двух объектов.

Пример 2.9 ((ко) уравнители)
(Ко)предел диаграммы вида $X \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightrightarrows}} Y$ называется (*ко*)*уравнителем*[2] стрелок φ и ψ. В категории множеств уравнитель представляет собою множество решений уравнения $\varphi(x) = \psi(x)$ на $x \in X$ или, более научно, прообраз диагонали $\Delta_Y \subset Y \times Y$ при каноническом отображении $\varphi \times \psi : X \to Y \times Y$. Коуравнитель является фактором множества Y

[1] Обратите внимание, что если такое разложение существует, то оно единственно.
[2] По-английски (*co*)*equalizer*.

по наименьшему отношению эквивалентности[1] $R \subset Y \times Y$, содержащему образ отображения $\varphi \times \psi$, т. е. все отождествления $\varphi(x) = \psi(x)$ с $x \in X$.

Упражнение 2.16. Проверьте это и постройте (ко) уравнители любой пары стрелок в категориях топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным коммутативным кольцом.

Например, (ко) ядро гомоморфизма $f : A \to B$ в категории $\mathcal{Ab}$ абелевых групп это (ко) уравнитель f и нулевого морфизма. Интуитивно, уравнители позволяют задавать «подобъекты» при помощи «уравнений», а коуравнители — «фактор объекты» при помощи «соотношений».

Пример 2.10 (послойные произведения)
Предел диаграммы вида

$$X \xrightarrow{\xi} B \xleftarrow{\eta} Y$$

называется *послойным*[2] *произведением* и обозначается $X \underset{B}{\times} Y$. Он включается в коммутативный *декартов квадрат*

$$\begin{tikzcd} X \underset{B}{\times} Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r, "\xi"] & B \end{tikzcd} \tag{2-12}$$

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r, "\xi"] & B \end{tikzcd}$$

имеется единственный такой морфизм $\varphi' \times \psi' : Z \to X \underset{B}{\times} Y$, что $\varphi' = \varphi \circ (\varphi' \times \psi')$ и $\psi' = \psi \circ (\varphi' \times \psi')$.

Упражнение 2.17. Убедитесь, что левый верхний угол диаграммы (2-12) задаётся этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с φ и ψ.

---

[1] Напомним, что *отношение эквивалентности* на Y это подмножество $R \subset Y \times Y$, которое *рефлексивно* (содержит диагональ Δ_Y), *симметрично* (переходит в себя при транспозиции сомножителей) и *транзитивно* (т. е. $(y_1, y_2), (y_2.y_3) \in R \Rightarrow (y_1, y_3) \in R$). Пересечение отношений эквивалентности является отношением эквивалентности. Поэтому любое подмножество $S \subset Y \times Y$ содержится в единственном минимальном по включению отношении эквивалентности R_S, которое называется *порождённым* подмножеством S. Всякое отображение $\xi : Y \to Z$ определяет отношение эквивалентности $R_\xi = \{(y_1, y_2) \mid \xi(y_1) = \xi(y_2)\}$ на Y, причём $\xi' : Y \to Z'$ тогда и только тогда представляется в виде композиции $\xi' = \eta \circ \xi$ с некоторой стрелкой $\eta : Z \to Z'$, когда $R_\xi \subset R_{\xi'}$, т. е. когда эквивалентность, отвечающая ξ, *влечёт* эквивалентность, отвечающую ξ' (в этом случае говорят, что первая эквивалентность *тоньше* или *сильнее*, а вторая — *грубее* или *слабее*).

[2] Или *расслоенным*.

В категории множеств отображение $X \underset{B}{\times} Y \to B$ имеет в качестве слоя над произвольной точкой $b \in B$ прямое произведение слоёв $\varphi^{-1}(b) \times \psi^{-1}(b)$, отсюда и название.

Упражнение 2.18. Убедитесь, что $U \underset{X}{\times} V = U \cap V$ в категории $\mathcal{U}(X)$ открытых подмножеств топологического пространства X.

Пример 2.11 (послойные копроизведения)
Оборачивая все стрелки в предыдущем примере, назовём *послойным копроизведением* $X \otimes_B Y$ копредел диаграммы $X \xleftarrow{\xi} B \xrightarrow{\eta} Y$. Он вписывается в коммутативный *кодекартов квадрат*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & X \otimes_B Y \end{tikzcd} \tag{2-13}$$

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\psi'"] \\ X \arrow[r, "\varphi'"] & Z \end{tikzcd}$$

существует единственный такой морфизм $\varphi' \otimes \psi' : X \otimes_B Y \to Z$, что $\varphi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \varphi$ и $\psi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \psi$.

Упражнение 2.19. Явно опишите послойные (ко) произведения в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп[1], коммутативных колец с единицей и модулей над коммутативным кольцом.

2.3.1. (Ко) замкнутость. Категория $\mathcal{C}$ называется *(ко) замкнутой*, если для любой малой категории $\mathcal{N}$ каждая диаграмма $\mathcal{N} \to \mathcal{C}$ имеет (ко) предел в $\mathcal{C}$. Мы будем называть категорию *полной*, если она одновременно замкнута и козамкнута.

Предложение 2.4
Для замкнутости категории $\mathcal{C}$ достаточно существования в $\mathcal{C}$ конечного объекта, прямых произведений любых множеств объектов и уравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом, а для козамкнутости — существования в $\mathcal{C}$ начального объекта, прямых копроизведений любых множеств объектов и коуравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом.

Доказательство. Мы построим предел произвольной диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$, копредел строится аналогично путём обращения стрелок. Надо предъявить универсальный набор мофизмов $\varphi_\nu : L \to X_\nu$, решающий уравнения $\varphi_\mu = X(\nu \to \mu) \circ \varphi_\nu$, где $\nu \to \mu$ пробегает $\operatorname{Mor} \mathcal{N}$. Для каждой стрелки $\nu \to \mu$ обозначим через $T_{\nu\to\mu} = X_\mu$ тот объект диаграммы X, в который ведёт эта стрелка, и образуем два произведения $A = \prod_\mu X_\mu$ и

[1] В теории групп копроизведения традиционно называются *амальгамами*.

$B = \prod_{\nu\to\mu} T_{\nu\to\mu}$. В первое из них каждый объект диаграммы X входит ровно один раз, а во второе — столько раз, сколько стрелок в нём заканчивается. Для каждой стрелки $\mu \to \nu$ имеются два отображения $A \to T_{\nu\to\mu}$: проекция $\pi_\mu : A \to X_\mu$ произведения A на μ-тый сомножитель и композиция $\varkappa_{\nu\to\mu} = X(\nu \to \mu) \circ \pi_\nu$ проекции $\pi_\nu : A \to X_\nu$ произведения A на ν-тый сомножитель со стрелкой $X(\nu \to \mu) : X_\nu \to X_\mu$ диаграммы X. По универсальному свойству произведения B эти пары отображении задают два морфизма $\pi, \varkappa : A \to B$. Их уравнитель L приходит вместе с морфизмом $\varphi : L \to A$, который представляет собою набор стрелок $\varphi_\mu = \pi_\mu \circ \varphi$, удовлетворяющих равенствам

$$\varphi_\mu = \pi_\mu \circ \varphi = \varkappa_{\nu\to\mu} \circ \varphi = X(\nu \to \mu) \circ \varphi_\nu$$

и обладающих требуемым универсальным свойством (убедитесь в этом!). □

Пример 2.12
В категории множеств $\lim X$ изоморфен подмножеству прямого произведения $\prod X_\nu$, образованному такими семействами (x_ν), $\nu \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$, $x_\nu \in X_\nu$, где $x_\mu = X(\nu \to \mu)x_\nu$ для всех стрелок $\nu \to \mu$ из $\operatorname{Mor}\mathcal{N}$.

Упражнение 2.20. Проверьте, что $\operatorname{colim} X$ изоморфен коуравнителю диаграммы

$$\coprod_{\nu\to\mu} S_{\nu\to\mu} \overset{\iota}{\underset{\varkappa}{\rightrightarrows}} \coprod_\nu X_\nu \;,$$

в которой объекты $S_{\nu\to\mu} = X_\nu$ суть начала стрелок $X(\nu \to \mu)$ диаграммы X, а морфизмы задаются семействами стрелок

$$\iota_\nu : S_{\nu\to\mu} \to \coprod_\nu X_\nu \quad \text{и} \quad \varkappa_{\nu\to\mu} = \iota_\mu \circ X(\nu \to \mu) : S_{\nu\to\mu} \to \coprod_\nu X_\nu \,.$$

В частности, убедитесь, что в категории множеств $\operatorname{colim} X$ является фактором дизъюнктного объединения $\bigsqcup_\nu X_\nu$ по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему отождествления $x \sim X(\nu \to \mu)x$ для всех $x \in X_\nu$ и всех стрелок $\nu \to \mu$ из $\operatorname{Mor}\mathcal{N}$.

Замечание 2.1. Для того, чтобы в категории существовали (ко) пределы всех *конечных* диаграмм, в условиях предл. 2.4 достаточно потребовать существования (ко) произведения любых двух объектов.

Следствие 2.2
Категории множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом полны.

Доказательство. Сделайте упр. 2.16. □

Пример 2.13 (уточнённое определение пучка)
Объединение $U = \bigcup_i U_i$ произвольного семейства $\{U_i\}_{i\in I}$ открытых множеств топологического пространства X представляет собою коуравнитель отображений

$$\coprod_{ij} U_i \cap U_j \overset{\psi_1}{\underset{\psi_2}{\rightrightarrows}} \coprod_i U_i\,,$$

являющихся копроизведениями вложений $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_i$ и $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_j$. Всякий предпучок $F : \mathcal{U}(X)^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{C}$ объектов любой категории $\mathcal{C}$ переводит диаграмму коуравнителя

$$\coprod_{ij} U_i \cap U_j \overset{\psi_1}{\underset{\psi_2}{\rightrightarrows}} \coprod_i U_i \xrightarrow{\varphi} U\,, \tag{2-14}$$

в следующую диаграмму в категории $\mathcal{C}$:

$$F(U) \xrightarrow{\varphi^*} \prod_i F(U_i) \overset{\psi_1^*}{\underset{\psi_2^*}{\rightrightarrows}} \prod_{ij} F(U_i \cap U_j)\,. \tag{2-15}$$

Стрелка φ^* этой диаграммы является произведением ограничений $F(U) \to F(U_i)$, а стрелки ψ_1^* и ψ_2^* — ограничений $F(U_i) \to F(U_i \cap U_j)$ и $F(U_j) \to F(U_i \cap U_j)$ соответственно. По определению, предпучок F является *пучком*, если стрелка φ является уравнителем стрелок ψ_1^* и ψ_2^*. В частности, когда множество индексов $I = \varnothing$, мы получаем в левом члене диаграммы (2-15) объект $F(\varnothing) \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, а в среднем и правом членах — произведения пустых множеств объектов, т. е. пределы пустых диаграмм, канонически изоморфные конечному объекту[1] $\mathrm{Fin}_{\mathcal{C}}$ категории $\mathcal{C}$. Стрелки ψ_1^* и ψ_2^* являются в этом случае тождественными эндоморфизмами конечного объекта, и их уравнитель равен $\mathrm{Id}_{\mathrm{Fin}_{\mathcal{C}}}$. Таким образом, для любого пучка объектов произвольной категории $\mathcal{C}$ на топологическом пространстве X должно выполняться равенство $F(\varnothing) = \mathrm{Fin}_{\mathcal{C}}$. Например, для любого пучка множеств $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ множество $F(\varnothing)$ состоит из одной точки, а для пучка абелевых групп $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{A}b$ группа $F(\varnothing) = 0$.

Предложение 2.5
Для существования конечного объекта в козамкнутой категории $\mathcal{C}$ достаточно существования такого множества объектов $S \subset \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, чтобы из любого объекта категории $\mathcal{C}$ вела хотя бы одна стрелка в хотя бы один объект из S.

Доказательство. Рассмотрим прямое копроизведение $C = \coprod_{X\in S} X$ всех объектов из S и обозначим через F коуравнитель всех его эндоморфизмов. Он приходит вместе с таким эпиморфизмом[2] $\pi : C \to F$, что $\pi\psi = \pi$ для всех $\psi \in \operatorname{End} C$. Рассмотрим произвольный объект $Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$. Из него ведёт стрелка в некоторый $X \in S$. Беря её композицию с канонической стрелкой $X \to C$ и проекцией $C \to F$, получаем стрелку $Z \to F$.

[1]Тем самым, для того чтобы предпучок F был пучком, необходимо, чтобы в категории $\mathcal{C}$ был конечный объект (см. прим. 2.7 на стр. 27).

[2]Ибо из универсального свойства коуравнителя равенство $\varphi_1\pi = \varphi_2\pi$ возможно только при $\varphi_1 = \varphi_2$.

Пусть имеются две стрелки $\alpha, \beta : Z \to F$ с коуравнителем $\varkappa : F \to Q$. Рассмотрим какую-нибудь стрелку[1] $\gamma : Q \to C$. В диаграмме

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & F \arrow[r, "\varkappa"] & Q \arrow[dl, "\gamma"] \\ & C \arrow[u, "\pi"] & \end{tikzcd}$$

композиция $\gamma\varkappa\pi \in \operatorname{End} C$ удовлетворяет равенству $\pi\gamma\varkappa\pi = \pi$. Сокращая справа на эпиморфизм π, заключаем, что $\pi\gamma\varkappa = \mathrm{Id}_F$. Умножая обе части равенства $\varkappa\alpha = \varkappa\beta$ слева на $\pi\gamma$, получаем $\alpha = \beta$. □

Упражнение 2.21. Докажите двойственный критерий существования начального объекта в замкнутой категории.

Пример 2.14 (козамкнутая категория без конечного объекта)
Классы изоморфных вполне упорядоченных множеств образуют *категорию ординалов* $\mathcal{O}rd$, морфизмами в которой являются включения меньшего ординала в больший в качестве начального интервала. Эта категория козамкнута: начальным объектом служит $\varnothing$, коуравнителем и копроизведением любого множества ординалов является их точная верхняя грань — класс объединения, взятого в любом большем ординале, содержащем все ординалы из рассматриваемого множества в качестве начальных интервалов. Однако ординала, содержащего все ординалы, нет.

2.3.2. Фильтрующиеся диаграммы. Малая категория $\mathcal{F}$ называется *фильтрующейся*, если из любых двух её объектов выходят стрелки с общим концом и для любых двух стрелок φ, ψ с общими началом и концом из их конца ведёт такая стрелка ζ, что $\zeta\varphi = \zeta\psi$. Например, любой чум, в котором у каждых двух элементов есть общая верхняя грань, является фильтрующейся категорией[2]. Диаграммы вида $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ и $\mathcal{F}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{C}$ с фильтрующейся категорией $\mathcal{F}$ принято называть, соответственно, *индуктивными* (или *прямыми*) и *проективными* (или *обратными*) *системами* стрелок категории $\mathcal{C}$.

Пример 2.15 (разбиения отрезка)
Конечные наборы точек $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$, разбивающие отрезок $[0,1]$ на непересекающиеся интервалы, как в определении интеграла Римана, образуют прямую систему в категории[3] ∇_{big} относительно морфизмов включения

$$\{0, x_1, x_2, \dots, x_n, 1\} \hookrightarrow \{0, x'_1, x'_2, \dots, x'_m, 1\}, \tag{2-16}$$

отвечающих добавлениям новых точек в разбиение. Копределом этой системы в категории всех (не обязательно конечных) упорядоченных множеств с отмеченными максимальным и минимальным элементами является $[0,1]$. В категории ∇_{big} копредела не существует.

Двойственным образом, упорядоченное слева направо множество полуинтервалов $I_\nu = [x_\nu, x_{\nu+1})$ разбиения $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$ является объектом категории упорядоченных множеств[4] Δ_{big} и измельчению разбиения (2-16)

[1] Например, композицию произвольной стрелки $Z \to X$ с канонической стрелкой $X \to C$.
[2] Ср. с прим. 1.2 на стр. 4.
[3] См. прим. 1.10 на стр. 11.
[4] См. прим. 1.4 на стр. 5.

отвечает идущий в противоположную сторону морфизм

$$\{I_0, I_1, \dots, I_n\} \hookleftarrow \{I'_0, I'_1, \dots, I'_m\}, \tag{2-17}$$

отображающий каждый полуинтервал из правого множества в содержащий его полуинтервал из левого множества. Эти морфизмы образуют обратную систему в Δ_{big}, которая не имеет предела в Δ_{big}, а в категории всех упорядоченных множеств её пределом является полуинтервал $[0, 1)$.

Предложение 2.6

Копредел индуктивной системы множеств $X : \mathcal{F} \to \mathcal{S}et$ изоморфен фактору дизъюнктного объединения $\coprod\limits_{\nu \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}} X_\nu$ по отношению эквивалентности, отождествляющему элементы $x_\nu \in X_\nu$ и $x_\mu \in X_\mu$, если для некоторой пары стрелок $\nu \to \eta \leftarrow \mu$ в множестве X_η выполняется равенство $X(\nu \to \eta)x_\nu = X(\mu \to \eta)x_\mu$.

Доказательство. Согласно упр. 2.20 копредел $\operatorname{colim} X$ является фактором дизъюнктного объединения $\coprod\limits_{\nu \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}} X_\nu$ по наименьшему отношению эквивалентности, обеспечивающему равенства $x = X(\nu \to \mu)x$ для всех стрелок $\nu \to \mu$ из $\operatorname{Mor} \mathcal{F}$ и всех $x \in X_\nu$. При этом элементы $x_\nu \in X_\nu$ и $x_\mu \in X_\mu$ заведомо отождествляются, если $X(\nu \to \eta)x_\nu = X(\mu \to \eta)x_\mu$ для некоторой пары стрелок $\nu \to \eta \leftarrow \mu$. Таким образом, достаточно убедиться, что описанное в предложении отношение является эквивалентностью. Рефлексивность и симметричность очевидны. Докажем транзитивность. Если x_α эквивалентен x_β, а x_β эквивалентен x_γ, то в категории $\mathcal{F}$ имеется диаграмма[1] из таких стрелок

$$\begin{tikzcd}
 & & \varepsilon & & \\
 & & \delta \arrow[u, "\xi"] & & \\
 & \eta \arrow[ur, "\psi_{\delta\eta}"] & & \zeta \arrow[ul, "\psi_{\delta\zeta}"'] & \\
\alpha \arrow[ur, "\varphi_{\eta\alpha}"] & & \beta \arrow[ul, "\varphi_{\eta\beta}"] \arrow[ur, "\varphi_{\zeta\beta}"'] & & \gamma \arrow[ul, "\varphi_{\zeta\gamma}"']
\end{tikzcd}$$

что $X\left(\varphi_{\eta\alpha}\right) x_\alpha = X\left(\varphi_{\eta\alpha}\right) x_\beta$ и $X\left(\varphi_{\zeta\beta}\right) x_\beta = X\left(\varphi_{\zeta\gamma}\right) x_\gamma$ в категории $\mathcal{S}et$, а $\xi\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\beta} = \xi\psi_{\delta\zeta}\varphi_{\zeta\beta}$ в $\operatorname{Hom}_{\mathcal{F}}(\beta, \varepsilon)$. Обозначая стрелку из последнего равенства через $\varkappa$, имеем

$$X\left(\varepsilon\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\alpha}\right) x_\alpha = X(\varkappa)x_\beta = X\left(\varepsilon\psi_{\delta\zeta}\varphi_{\zeta\gamma}\right) x_\gamma,$$

что и требовалось. □

[1] Не обязательно коммутативная!

Упражнение 2.22. Покажите, что копредел фильтрующейся диаграммы абелевых групп $A: \mathcal{N} \to \mathcal{A}b$ как множество совпадает с копределом диаграммы подлежащих этим группам множеств и является фактором прямой суммы $\bigoplus_{\nu\in\operatorname{Ob}\mathcal{N}} A_\nu$ по подгруппе, образованной всеми конечными суммами $\sum\limits_{\nu\in N} a_\nu$, $N \subset \operatorname{Ob}\mathcal{N}$, $a_\nu \in A_\nu$, для которых в диаграмме A найдётся группа A_μ и стрелки $\varphi_\nu: A_\nu \to A_\mu$, по одной для каждого $\nu \in N$, со свойством $\sum\limits_{\nu\in N} \varphi(a_\nu) = 0$ в A_μ.

Пример 2.16 (открытые окрестности и слой предпучка)
Множество открытых окрестностей любого подмножества $Z \subset X$ топологического пространства X является проективной системой в категории $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$ открытых подмножеств в X, т. к. для любых окрестностей $U, W \supset Z$ окрестность $U \cap W = U \underset{X}{\times} V \supset Z$ вкладывается и в окрестность U, и в окрестность W. Пределом этой системы в категории $\mathcal{S}et$ является пересечение всех открытых окрестностей Z. В категории $\mathcal{U}$ предела может и не быть. Для любого предпучка $F: \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ множества сечений $F(U)$ над открытыми окрестностями U произвольно заданного подмножества $Z \subset X$ образуют индуктивную систему в $\mathcal{S}et$. Её копредел называется *слоем* предпучка F над Z и обозначается F_Z. В силу козамкнутости категории $\mathcal{S}et$ этот копредел всегда существует. Согласно предл. 2.6, каждый элемент слоя F_Z представляет собою класс $s|_Z$ некоторого сечения $s \in F(U)$ над каким-либо открытым множеством $U \supset Z$ по модулю эквивалентности, отождествляющей сечения $s \in F(U)$ и $t \in F(W)$, когда $s|_V = t|_V$ над некоторым открытым V, таким что $Z \subset V \subset U \cap W$. Определённые таким образом классы $s|_Z$ называются *ростками сечений* предпучка F над Z. В частности, когда $Z = \{x\}$ это одна точка, слой F_x называется *слоем F в точке x*. Отметим, что *росток* локальной функции $f \in F(U)$ в слое F_x над точкой $x \in U$ не следует путать со *значением* $f(x)$ этой функции в точке x. Во-первых, они лежат в разных множествах. Во-вторых, равенство ростков двух функций означает равенство их значений в некоторой открытой окрестности точки x, что обычно гораздо сильнее, чем равенство значений лишь в самой точке x.

Пример 2.17 (локализация кольца)
Пусть подмножество S ассоциативного (но не обязательно коммутативного) кольца R с единицей таково, что $1 \in S$ и $st \in S$ для всех $s, t \in S$. Пусть, кроме того, выполняются следующие *левые условия Оре*[1]:

$$\forall\, \varrho \in R,\ \forall\, s \in S \quad \exists\, \lambda \in R,\ \exists t \in S:\ \lambda s = t\varrho \tag{LO$_1$}$$

$$\forall\, \varphi, \psi \in R \quad \text{из} \quad \exists\, s \in S:\ \phi s = \psi s \quad \text{следует, что} \quad \exists\, t \in S:\ t\phi = t\psi\,. \tag{LO$_2$}$$

Превратим множество S в категорию, полагая $\operatorname{Hom}_S(s,t) \overset{\text{def}}{=} \{\lambda \in R \mid \lambda s = t\}$.

Упражнение 2.23. Выведите из условий Оре, что категория S фильтрующаяся.

Рассмотрим в категории правых R-модулей фильтрующуюся диаграмму $S \to \mathcal{M}od\text{-}R$, образованную свободными модулями $s^{-1}R$ ранга один, где символом s^{-1} обозначен базисный вектор того модуля, который отвечает объекту $s \in S$, и R-линейными отображениями $\lambda_*: s_1^{-1}R \to s_2^{-1}R$, которые отвечают стрелкам $\lambda \in \operatorname{Hom}_S(s_1, s_2)$ и действуют на базисный вектор по правилу $s_1^{-1} \mapsto s_2^{-1}\lambda$. Копредел этой диаграммы в категории

[1] В коммутативном кольце R эти условия всегда выполнены.

$\mathcal{M}od$-R состоит из классов $s^{-1}\varrho$, где $s \in S$, $\varrho \in R$, по модулю равенств $s_1^{-1}\varrho_1 = s_2^{-1}\varrho_2$, означающих существование таких $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, что $\lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$ и $\lambda_1\varrho_1 = \lambda_2\varrho_2$ в R. Классы $s^{-1}\varrho$ называются *левыми дробями* со знаменателями в S. Они образуют правый R-модуль, обозначаемый $S^{-1}R$ и именуемый *левой локализацией* кольца R относительно мультипликативной системы Оре S.

Упражнение 2.24. Чему равна сумма $s_1^{-1}\varrho_1 + s_2^{-1}\varrho_2$ в модуле $S^{-1}R$?

Определим *произведение* левых дробей $s_1^{-1}\varrho_1$ и $s_2^{-1}\varrho_2$ следующим образом. Пользуясь условием (LO_1) подберём такие $\lambda_1 \in R$ и $t_2 \in S$, что[1] $t_2\varrho_1 = \lambda_1 s_2$, и положим

$$s_1^{-1}\varrho_1 \cdot s_2^{-1}\varrho_2 \overset{\text{def}}{=} (t_2 s_1)^{-1}(\lambda_1\varrho_2).$$

Упражнение 2.25. Проверьте, что это определение корректно[2] и задаёт на модуле $S^{-1}R$ структуру ассоциативного кольца с единицей. Убедитесь, что для коммутативного кольца R кольцо дробей $S^{-1}R$ изоморфно известному из курса алгебры[3] кольцу частных $a\,/\,s$, где $a \in R$, $s \in S$, и $a_1\,/\,s_1 = a_2\,/\,s_2$, если и только если $\exists\, s \in S:\ s\cdot(a_1s_2 - a_2s_1) = 0$ в R.

Упражнение 2.26. Для мультипликативного подмножества $S \subset R$, удовлетворяющего *правым условиям Оре*

$$\forall\,\lambda \in R,\ \forall\, t \in S \quad \exists\,\varrho \in R,\ \exists s \in S:\ \lambda s = t\varrho \tag{RO_1}$$

$$\forall\,\varphi,\psi \in R \quad \text{из} \quad \exists\, t \in S:\ t\phi = t\psi \quad \text{следует, что} \quad \exists\, s \in S:\ \phi s = \psi s\,, \tag{RO_2}$$

постройте кольцо правых дробей RS^{-1}, а если S удовлетворят одновременно и левым и правм условиям Оре, установите канонический изоморфизм колец $S^{-1}R \simeq RS^{-1}$.

2.4. Функториальность (ко) пределов. Равенства (2-11) и (2-10) со стр. 26, описывающие универсальные свойства копредела и предела диаграммы $X:\ \mathcal{N} \to \mathcal{C}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{colim}, C) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X, \overline{C})$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(\overline{C}, X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \lim X)$$

означают[4], что для заданных малой категории $\mathcal{N}$ и (ко)замкнутой категории $\mathcal{C}$ копредел и предел являются, соответственно, левым и правым сопряжёнными к функтору $\mathcal{C} \to \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$, переводящему каждый объект $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ в постоянную диаграмму $\overline{C}$. В частности, предел и копредел задают функторы $\lim, \mathrm{colim}:\ \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$.

Если не предполагать категорию $\mathcal{C}$ (ко)замкнутой, то (ко)предел будет функториален на всех диаграммах, у которых он есть. Действие функторов lim и colim на естественные преобразования диаграмм определено даже в более общей ситуации: пусть диаграммы $X:\ \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и $Y:\ \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ имеют пределы в категории $\mathcal{C}$ и пусть заданы функтор $\tau:\ \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ и естественное преобразование $f:\ X \circ \tau \to Y$, т. е. набор стрелок

[1]Это «политкорректная» запись интуитивно желаемого равенства $\varrho_1 s_2^{-1} = t_2^{-1}\lambda_1$.
[2]Т. е. результат умножения не зависит от выбора таких $\lambda_1 \in R$ и $t_2 \in S$, что $t_2\varrho_1 = \lambda_1 s_2$.
[3]См. http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-04.pdf.
[4]См. предл. 2.1 на стр. 20.

$f_\mu:\ X_{\tau(\mu)} \to Y_\mu$, по одной для каждого $\mu \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$, перестановочных со всеми стрелками обеих диаграмм. Беря композиции этих стрелок с каноническими проекциями предела $\lim X$ на элементы диаграммы X, получаем стрелки $f_\mu \pi_{\tau(\mu)}:\ \lim X \to Y_\mu$, перестановочные со стрелками диаграммы Y. По универсальному свойству предела $\lim Y$ существует единственный морфизм $\lim f:\ \lim X \to \lim Y$, делающий коммутативными все диаграммы

$$\begin{tikzcd} \lim X \arrow[r, "\pi_{\tau(\mu)}"] \arrow[d, "\lim f"'] & X_{\tau(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"] \\ \lim Y \arrow[r, "\pi_\mu"] & Y_\mu\,, \end{tikzcd} \tag{2-18}$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы из предела в элементы диаграммы. Двойственным образом, если существуют копределы $\operatorname{colim} X$ и $\operatorname{colim} Y$, то любые функтор $\tau:\ \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ и естественное преобразование $f:\ X \to Y\circ\tau$ задают единственный морфизм $\operatorname{colim} f:\ \operatorname{colim} X \to \operatorname{colim} Y$, делающий коммутативными все диаграммы

$$\begin{tikzcd} X_\nu \arrow[r, "\iota_\nu"] \arrow[d, "f_\nu"'] & \operatorname{colim} X \arrow[d, "\operatorname{colim} f"] \\ Y_{\tau(\nu)} \arrow[r, "\iota_{\tau(\nu)}"] & \operatorname{colim} Y\,, \end{tikzcd}$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы элементов диаграммы в копредел.

Пример 2.18 (полнота категории предпучков)
Если задана диаграмма $F:\ \mathcal{N} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$ предпучков множеств на малой категории $\mathcal{U}$, то над каждым объектом $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$ возникает диаграмма множеств $F(U):\ \mathcal{N} \to \mathcal{S}et$, вершинами которой служат множества сечений $F_\nu(U)$ предпучков F_ν диаграммы F над объектом U с отображениями, задающими действие стрелок диаграммы F над этим объектом. В силу функториальности (ко)предела множества $L(U) \overset{\text{def}}{=} \lim F(U)$ и $C(U) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{colim} F(U)$ ведут себя функториально по U, т. е. задают на $\mathcal{U}$ предпучки множеств. Для любого предпучка $F_\nu:\ \mathcal{U}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ диаграммы F имеются канонические морфизмы предпучков $L \to F_\nu$ и $F_\nu \to C$, действие которых над каждым объектом $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$ задаётся стрелками $\lim F(U) \to F_\nu(U)$ и $F_\nu(U) \to \operatorname{colim} F(U)$ в категории $\mathcal{S}et$. Универсальность последних в категории $\mathcal{S}et$ над каждым объектом $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$ влечёт универсальность первых в категории $p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$. Таким образом, категория $p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$ предпучков множеств на малой категории $\mathcal{U}$ замкнута и козамкнута.

Упражнение 2.27. Покажите, что категория $\mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{A}b)$ ковариантных функторов из любой малой категории $\mathcal{C}$ в абелевы группы тоже замкнута и козамкнута.

2.4.1. Перестановочность функторов с (ко) пределами. Скажем, что функтор $F:\ \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *перестановочен с (ко) пределами*, если для любого $L \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и любой диаграммы $X:\ \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ из того, что L является (ко) пределом X в $\mathcal{C}$, вытекает, что $F(L)$ является (ко) пределом диаграммы $F\circ X$ в $\mathcal{D}$.

Предложение 2.7
Если функтор $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ сопряжён слева к функтору $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, то F перестановочен с копределами, а G — с пределами.

Доказательство. В силу сопряжённости F и G имеем функториально по $D \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$:

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(\operatorname{colim} X), D\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\operatorname{colim} X, G(D)\big) \simeq \\ \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}\Big(X, \overline{G(D)}\Big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{D})}\big(F \circ X, \overline{D}\big)\,.$$

Тем самым, $F(\operatorname{colim} X) \simeq \operatorname{colim}(F \circ X)$. Рассуждение про пределы аналогично. □

Следствие 2.3
Пределы коммутируют с пределами, а копределы — с копределами всякий раз, когда они существуют. Более пространно, пусть задана диаграмма $F: \mathcal{M} \to \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$, вершинами которой являются диаграммы $F_\mu: \mathcal{N} \to \mathcal{C}$, по одной для каждого объекта $\mu \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$, а стрелками — естественные преобразования $F(\mu_1 \to \mu_2): F_{\mu_1} \to F_{\mu_2}$, по одному для каждой стрелки $\mu_1 \to \mu_2$ из $\operatorname{Mor}\mathcal{M}$, и пусть для каждого $\mu \in \mathcal{M}$ диаграмма F_μ имеет (ко)предел, а для каждого $\nu \in \mathcal{N}$ имеет (ко)предел диаграмма $F(\nu): \mathcal{M} \to \mathcal{C}$, образованная объектами $F_\mu(\nu)$ и стрелками $F(\mu_1 \to \mu_2)_\nu: F_{\mu_1}(\nu) \to F_{\mu_2}(\nu)$, задающими действие естественных преобразований $F(\mu_1 \to \mu_2)$ над объектом ν. Тогда

$$\lim_\mu \lim_\nu F_\mu \simeq \lim_\nu \lim_\mu F(\nu) \quad \text{и} \quad \operatorname*{colim}_\mu \operatorname*{colim}_\nu F_\mu \simeq \operatorname*{colim}_\nu \operatorname*{colim}_\mu F(\nu)\,.$$

Пример 2.19 (ядра и коядра в категории модулей)
В категории $\mathcal{M}od\text{-}R$ правых модулей над кольцом R (ко)ядро морфизма R-модулей $\varphi: A \to B$ является (ко)уравнителем φ с нулевым морфизмом из A в B. Следовательно, ядро и коядро являются функторами из категории диаграмм вида $* \to *$ в категорию $\mathcal{M}od\text{-}R$, причём коядро коммутирует с копределами, а ядро — с пределами. В подробностях это звучит так. Пусть имеются две диаграммы правых R-модулей $X, Y: \mathcal{N} \to \mathcal{M}od\text{-}R$ и гомоморфизмы $f_\nu: X_\nu \to Y_\nu$, задающие естественное преобразование этих диаграмм. В силу функториальности (ко)пределов возникают гомоморфизмы $\lim f_\nu: \lim X \to \lim Y$ и $\operatorname{colim} f_\nu: \operatorname{colim} X \to \operatorname{colim} Y$, а также диаграммы $\ker f, \operatorname{coker} f: \mathcal{N} \to \mathcal{M}od\text{-}R$, элементами которых являются ядра и коядра гомоморфизмов f_ν. Имеют место канонические изоморфизмы

$$\operatorname{colim} \operatorname{coker} f \simeq \operatorname{coker} \operatorname{colim} f \quad \text{и} \quad \lim \ker f \simeq \ker \lim f\,.$$

Каждый левый сопряжённый функтор со значениями в абелевых группах, будучи перестановочен с копределами, переводит коядра в коядра, а любой правый сопряжённый функтор переводит ядра в ядра.

Свойство функтора F сохранять ядра, т. е. наличие естественного по диаграмме $A \to B$ изоморфизма $\ker(FA \to FB) \simeq F\ker(A \to B)$, называется *точностью слева*. Сохранение коядер, т. е. изоморфизм $\operatorname{coker}(FA \to FB) \simeq F\operatorname{coker}(A \to B)$, называется *точностью справа*. Таким образом, все левые сопряжённые функторы точны справа, а все правые — слева.

Например, ядра точны слева, а коядра — справа, т. е. в категории модулей со всякой коммутативной диаграммой с точными[1] строками

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B_1 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{2-19}$$

канонически связаны две точные последовательности

$$0 \to \ker\alpha \to \ker\beta \to \ker\gamma \quad \text{и} \quad \operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta \to \operatorname{coker}\gamma \to 0\,. \tag{2-20}$$

Упражнение 2.28. Убедитесь, что на диаграмме (2-19) для любого $\pi(b_1) \in \ker\gamma$ элемент $\beta(b_1) \in A_2$ и что сопоставление $\pi(b_1) \mapsto \beta(b_1) (\operatorname{mod} \operatorname{im}\alpha)$ корректно задаёт гомоморфизм $\delta : \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha$ связывающий две последовательности (2-20) в одну длинную точную последовательность

$$0 \to \ker\alpha \to \ker\beta \to \ker\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta \to \operatorname{coker}\gamma \to 0\,.$$

Пример 2.20 (тензорное произведение и копредставимые функторы)
Функтор $* \otimes_R N : \mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{A}b$, $X \mapsto X \otimes_R N$, задаваемый тензорным умножением правых модулей на фиксированный левый модуль N, сопряжён слева к копредставимому функтору[2] $h^N : \mathcal{A}b \to \mathcal{M}od\text{-}R$, $Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, Y)$. Поэтому тензорное произведение перестановочно с копределами. В частности, оно точно справа, т. е. для любого гомоморфизма $\varphi : A \to B$ коядро $\operatorname{coker}\big(\varphi \otimes_R \operatorname{Id}_N : A \otimes_R B \to A \otimes_R B\big) \simeq \operatorname{coker}(\varphi) \otimes_S N$. В свою очередь, каждый копредставимый функтор $h^M : \mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{A}b$, $X \mapsto \operatorname{Hom}_R(M, X)$, перестановочен с пределами и точен слева.

Пример 2.21 (представимые функторы, продолжение прим. 2.2 на стр. 20)
Поскольку каждый представимый функтор на категории абелевых групп

$$h_C : \mathcal{A}b^{\text{opp}} \to \mathcal{A}b\,, \quad X \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}b}(X, C)\,,$$

является правым сопряжённым самому себе[3], он переводит пределы в категории $\mathcal{A}b^{\text{opp}}$, т. е. копределы в категории $\mathcal{A}b$, в пределы. В частности, функтор h_C переводит коядра в ядра (контравариантные функторы, переводящие коядра в ядра, тоже называются *точными слева*).

Предложение 2.8 (точность фильтрующихся копределов)
Для малой фильтрующейся категории $\mathcal{N}$ и естественного преобразования $f : X \to Y$ диаграмм $X, Y : \mathcal{N} \to \mathcal{A}b$ абелевых групп имеется канонический изоморфизм

$$\operatorname{colim} \ker\big(f_\nu : X_\nu \to Y_\nu\big) \simeq \ker\big(\operatorname{colim} f : \operatorname{colim} X_\nu \to \operatorname{colim} Y_\nu\big)\,. \tag{2-21}$$

Иными словами, копредел фильтрующейся диаграммы абелевых групп перестановочен не только с коядрами, но и с ядрами, т. е. задаёт точный функтор

$$\operatorname{colim} : \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{A}b) \to \mathcal{A}b\,, \quad X \mapsto \operatorname{colim} X\,.$$

[1] Это означает, что ядро каждой стрелки совпадает с образом предыдущей.

[2] См. предл. 2.3 на стр. 24.

[3] См. прим. 2.2 на стр. 20.

Доказательство. Согласно упр. 2.22 на стр. 34, копредел фильтрующейся диаграммы $Z : \mathcal{N} \to \mathcal{Ab}$ является фактором прямой суммы $\bigoplus Z_\nu$ по подгруппе, состоящей из всех конечных сумм $\sum\limits_{\nu\in N} x_\nu$, $N \subset \operatorname{Ob}\mathcal{N}$, $x_\nu \in X_\nu$, для которых в диаграмме X найдётся группа X_μ и стрелки $\varphi_\nu : X_\nu \to X_\mu$, по одной для каждого $\nu \in N$, со свойством $\sum\limits_{\nu\in N} \varphi(x_\nu) = 0$ в X_μ. Предельная стрелка $\operatorname{colim} f$ переводит класс $[x] \in \operatorname{colim} X$ элемента $x = \sum\limits_{\nu\in N} x_\nu$ в класс $[f(x)]$ элемента $f(x) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{\nu\in N} f_\nu(x_\nu)$ в фактор группе $\operatorname{colim} Y$.

Упражнение 2.29. Убедитесь, что описание корректно.

Если $[x] \in \ker\operatorname{colim} f$, то в $\mathcal{N}$ имеются такие стрелки $\varphi_\nu : \nu \to \mu$ с общим концом μ, по одной стрелке для каждого $\nu \in N$, что $\sum_\nu Y\varphi_\nu(f_\nu(x_\nu)) = f_\mu(\sum_\nu X\varphi_\nu(x_\nu)) = 0$ в Y_μ, т. е. класс суммы $\sum_\nu X\varphi_\nu(x_\nu) \in X_\mu$ лежит в ядре $\ker(f_\mu : X_\mu \to Y_\mu)$. Сопоставление классу $[x] \in \ker\operatorname{colim} f$ класса $[\sum_\nu X\varphi_\nu(x_\nu)] \in \operatorname{colim}\ker f_\nu$ корректно задаёт гомоморфизм $\ker\operatorname{colim} f \to \operatorname{colim}\ker f_\nu$.

Упражнение 2.30. Убедитесь, в этом.

Обратный гомоморфизм $\operatorname{colim}\ker f_\nu \to \ker\operatorname{colim} f$ сопоставляет классу элемента $x_\nu \in \ker f_\nu$ в фактор группе $\operatorname{colim}\ker f_\nu$ класс того же самого элемента, но только в фактор группе $\operatorname{colim} X_\nu$. □

Упражнение 2.31. Убедитесь, что этот класс лежит в ядре предельного гомоморфизма $\operatorname{colim} f$ и не зависит от выбора представителя x_ν в классе un определение гомоморфизма $\operatorname{colim}\ker f_\nu \to \ker\operatorname{colim} f$ корректно и этот гомоморфизм действительно обратен предыдущему.

Предложение 2.9
В категории $\mathcal{S}et$ копределы фильтрованных диаграмм перестановочны с конечными пределами.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любых двух фильтрованных диаграмм множеств $X, Y : \mathcal{N} \to \mathcal{S}et$ имеется канонический изоморфизм

$$\operatorname{colim}(X_\nu \times Y_\nu) \simeq \operatorname{colim}(X_\nu) \times \operatorname{colim}(Y_\nu),$$

а для любых двух естественных преобразований $f, g : X \to Y$ этих диаграмм и индуцированных ими отображений $\operatorname{colim} f, \operatorname{colim} g : \operatorname{colim} X \to \operatorname{colim} Y$ имеется канонический изоморфизм $\operatorname{colim}\operatorname{Eq}(f_\nu, g_\nu) \simeq \operatorname{Eq}(\operatorname{colim} f, \operatorname{colim} g)$, где $\operatorname{Eq}(\varphi, \psi)$ означает уравнитель стрелок φ и ψ. Первый изоморфизм переводит класс в $\operatorname{colim}(X_\nu \times Y_\nu)$ пары (x_ν, y_ν) в пару классов $([x_\nu], [y_\nu]) \in \operatorname{colim}(X_\nu) \times \operatorname{colim}(Y_\nu)$.

Упражнение 2.32. Проверьте, что это отображение определено корректно и является биекцией.

Второй изоморфизм переводит класс в $\operatorname{colim}\operatorname{Eq}(f_\nu, g_\nu)$ такого элемента $x_\nu \in X_\nu$, что $f_\nu(x_\nu) = g_\nu(x_\nu)$ в Y_ν, в класс этого же элемента в $\operatorname{colim} X$.

Упражнение 2.33. Проверьте, что последний класс лежит в $\operatorname{Eq}(\operatorname{colim} f, \operatorname{colim} g)$ и что таким образом получается корректно определённое и биективное отображение $\operatorname{colim}\operatorname{Eq}(f_\nu, g_\nu) \to \operatorname{Eq}(\operatorname{colim} f, \operatorname{colim} g)$.

□

Следствие 2.4
В категории $\mathcal{S}et$ копредел инъективного (соотв. сюрьективного или биективного) преобразования[1] фильтрованных диаграмм является инъективным (соотв. сюрьективным или биективным) отображением копределов этих диаграмм.

2.5. Существование сопряжённых функторов. Если у функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ есть правый сопряжённый функтор $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, то F перестановочен с копределами, и для каждого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ объект $G(Y) \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ представляет предпучок[2]

$$h_Y^F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et\,,\;\; X \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)\,.$$

Тождественный эндоморфизм $\operatorname{Id}_{G(Y)} \in h_{G(Y)}(G(Y))$ переводится изоморфизмом функторов $h_{G(Y)} \xrightarrow{\sim} h_Y^F$ в такую универсальную стрелку $\varkappa : FG(Y) \to Y$ из $h_Y^F(G(Y))$, что для любого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и любой стрелки $\alpha : FX \to Y$ в категории $\mathcal{D}$ найдётся единственная стрелка $\varphi_\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$, делающая коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} FG(Y) \arrow[dr, "\varkappa"] & \\ & Y \\ FX \arrow[uu, "F\varphi_\alpha"] \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd} \tag{2-22}$$

Пары $(X, \alpha : FX \to Y)$, где $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, образуют категорию $\mathcal{F}_Y$, в которой морфизмами из (X_1, α_1) в (X_2, α_2) по определению являются такие стрелки $\varphi : X_1 \to X_2$ категории $\mathcal{C}$, для которых в категории $\mathcal{D}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} FX_2 \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\ & Y \\ FX_1 \arrow[uu, "F\varphi"] \arrow[ur, "\alpha_1"'] & \end{tikzcd}$$

Универсальная стрелка $\varkappa : FG(Y) \to Y$ в диаграмме (2-22) является конечным объектом категории $\mathcal{F}_Y$.

Упражнение 2.34. Покажите, что для козамкнутой категории $\mathcal{C}$, перестановочного с копределами функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и произвольного объекта $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ категория $\mathcal{F}_Y$ тоже козамкнута.

Из этого упражнения и критерия существования конечного объекта в козамкнутой категории[3] получается следующий полезный критерий существования правого сопряжённого функтора:

[1] По определению, это означает, что действие естественного преобразования над каждым объектом диаграммы инъективно (соотв. сюрьективно или биективно).
[2] См. упр. 2.3 на стр. 21.
[3] См. предл. 2.5 на стр. 31.

Теорема 2.1
Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ из козамкнутой категории $\mathcal{C}$ тогда и только тогда обладает правым сопряжённым, когда он перестановочен с копределами и для каждого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ имеется такое множество S_Y пар (X, α), $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y)$, что любая стрелка вида $FZ \to Y$ в $\mathcal{D}$ раскладывается для некоторой пары $(X, \alpha) \in S_Y$ и стрелки $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$ в композицию $FZ \xrightarrow{F\varphi} FX \xrightarrow{\alpha} Y$. □

Упражнение 2.35. Докажите двойственный критерий: функтор $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ из замкнутой категории $\mathcal{D}$ тогда и только тогда обладает левым сопряжённым, когда он перестановочен с пределами и для каждого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ имеется такое множество S_X пар (Y, β), $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, $\beta \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$, что любая стрелка вида $X \to GZ$ в $\mathcal{C}$ раскладывается для некоторой пары $(Y, \beta) \in S_X$ и стрелки $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ в композицию $X \xrightarrow{\beta} GY \xrightarrow{F\varphi} GZ$.

§3. Абелевы категории

3.1. Линейные категории. Пусть R — произвольное кольцо с единицей. Категория $\mathcal{L}$ называется R-линейной слева, если бифунктор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(*,*)$ принимает значения в категории R-$\mathcal{M}od$ левых R-модулей и все композиции

$$\mathrm{Hom}(Y,Z)\times\mathrm{Hom}(X,Y)\to\mathrm{Hom}(X,Z)$$

билинейны над R. Например, сама категория R-$\mathcal{M}od$ R-линейна, категория векторных пространств над полем $\Bbbk$ линейна над $\Bbbk$, а категория абелевых групп $\mathbb{Z}$-линейна. Всякая R-линейная категория автоматически $\mathbb{Z}$-линейна: каждое множество стрелок $\mathrm{Hom}(X,Y)$ в R-линейной категории является аддитивной абелевой группой, и сложение морфизмов дистрибутивно композиции:

$$(\varphi_1+\varphi_2)\circ(\psi_1+\psi_2)=\varphi_1\circ\psi_1+\varphi_1\circ\psi_2+\varphi_2\circ\psi_1+\varphi_2\circ\psi_2\,.$$

Функтор между R-линейными категориями называется *R-линейным*, если он действует на стрелки R-линейными гомоморфизмами. Все функторы между R-линейными категориями далее будут по умолчанию предполагаться R-линейными.

Предостережение 3.1. Сложение морфизмов в (малой) K-линейной категории $\mathcal{L}$ не следует путать с формальным сложением в алгебре $K[\mathcal{L}]$ из прим. 1.3 на стр. 4: даже на уровне множеств $\mathrm{Mor}\,\mathcal{L}$ и $K[\mathcal{L}]$ — это *разные* множества.

3.1.1. Прямые суммы. Из равенства $\varphi\circ 0=\varphi\circ(0+0)=\varphi\circ 0+\varphi\circ 0$ вытекает, что в R-линейной категории $\varphi\circ 0=0$ для нулевого морфизма $0\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ и любой стрелки φ с началом в Y. По той же причине $0\circ\psi=0$ для стрелок ψ с концом в X.

Упражнение 3.1. Докажите равносильность друг другу следующих трёх условий на эндоморфизм $\varepsilon\in\mathrm{Hom}(X,X)$ в R-линейной категории: а) $\varepsilon=\mathrm{Id}_X$ б) $\varphi\circ\varepsilon=\varphi$ для всех стрелок φ с началом в X в) $\varepsilon\circ\varphi=\varphi$ для всех стрелок φ с концом в X и проверьте, что мономорфность[1] (соотв. эпиморфность) произвольного морфизма означает, что он не является левым (соотв. правым) делителем нуля[2].

Предложение 3.1

В R-линейной категории каждое произведение $X\times Y$ является одновременно и копроизведением, а каждое копроизведение $X\otimes Y$ — произведением, причём между каноническими морфизмами π_X, π_Y произведения в множители и каноническими морфизмами ι_X, ι_Y множителей в копроизведение выполняются соотношения:

$$\iota_X\pi_X+\iota_Y\pi_Y=\mathrm{Id}\,,\quad \pi_X\iota_X=\mathrm{Id}_X\,,\quad \pi_Y\iota_Y=\mathrm{Id}_Y\,,\quad \pi_X\iota_Y=0\,,\quad \pi_Y\iota_X=0\,,\tag{3-1}$$

Наоборот, всякий объект $X\oplus Y$, включающийся в диаграмму вида

$$X\underset{\pi_X}{\overset{\iota_X}{\rightleftarrows}}X\oplus Y\underset{\pi_Y}{\overset{\iota_Y}{\leftrightarrows}}Y\,,$$

стрелки которой удовлетворяют соотношениям (3-1), является одновременно произведением и копроизведением объектов X и Y.

[1] См. n° 1.1.1 на стр. 5.

[2] Т. е. $\varphi\psi=0\Rightarrow\psi=0$ (соотв. $\psi\varphi=0\Rightarrow\psi=0$).

Доказательство. Пусть есть произведение $X \times Y$. Морфизмы $\iota_X \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Id}_X \times 0 : X \to X \times Y$ и $\iota_Y \overset{\text{def}}{=} 0 \times \mathrm{Id}_Y : Y \to X \times Y$ включаются в коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \\ X & X \arrow[l, "\mathrm{Id}_X"] \arrow[u, "0"'] \arrow[ul, "\iota_X"'] \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \\ X & Y \arrow[l, "0"] \arrow[u, "\mathrm{Id}_Y"'] \arrow[ul, "\iota_Y"'] \end{tikzcd}$$

и удовлетворяют последним четырём соотношениям (3-1). Из них вытекает, что

$$\pi_X(\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y) = \pi_X \quad \text{и} \quad \pi_Y(\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y) = \pi_Y .$$

Но по универсальному свойству произведения существует ровно одна стрелка $\varphi : X \times Y \to X \times Y$, для которой $\pi_X\varphi = \pi_X$ и $\pi_Y\varphi = \pi_Y$, и эта стрелка $\varphi = \mathrm{Id}_{X\times Y}$. Поэтому первое соотношение из (3-1) тоже выполнено.

Упражнение 3.2. Докажите соотношения (3-1) в случае, когда существует копроизведение $X \otimes Y$.

Из соотношений (3-1) следует, что для любой пары стрелок $\alpha : X \to Z$ и $\beta : Y \to Z$ стрелка $\gamma : X \oplus Y \to Z$ со свойствами $\gamma\iota_X = \alpha$ и $\gamma\iota_Y = \beta$ единственна и равна $\gamma = \gamma \circ \mathrm{Id}_{X\oplus Y} = \gamma(\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y) = \alpha\pi_X + \beta\pi_Y$, а для любой пары стрелок $\alpha' : W \to X$ и $\beta' : W \to Y$ стрелка $\gamma' : W \to X \oplus Y$ со свойствами $\pi_X\gamma' = \alpha'$ и $\pi_Y\gamma' = \beta'$ также единственна и равна $\gamma' = \mathrm{Id}_{X\oplus Y} \circ \gamma' = (\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y)\gamma' = \iota_X\alpha' + \iota_Y\beta'$. □

Определение 3.1 (прямые суммы)

Объект $X \oplus Y$, удовлетворяющий условиям предл. 3.1, называется *прямой суммой* объектов X и Y. Прямая сумма $\mathcal{X} = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$ любого конечного набора объектов определяется по индукции вместе с каноническими морфизмами

$$\iota_\nu : X_\nu \to \mathcal{X}, \quad \pi_\nu : \mathcal{X} \to X_\nu, \quad \varepsilon_\nu \overset{\text{def}}{=} \iota_\nu\pi_\nu : \mathcal{X} \to \mathcal{X},$$

которые удовлетворят соотношениям

$$\begin{gathered} \pi_\nu\iota_\mu = 0 \text{ при } \nu \neq \mu, \quad \pi_\nu\iota_\nu = \mathrm{Id}_{X_\nu}, \\ \varepsilon_\nu\varepsilon_\mu = 0 \text{ при } \nu \neq \mu, \quad \varepsilon_\nu^2 = \varepsilon_\nu, \quad \sum_\nu \varepsilon_\nu = \mathrm{Id}_{\mathcal{X}}, \end{gathered} \tag{3-2}$$

эквивалентным тому, что $\mathcal{X} = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = X_1 \otimes X_2 \otimes \cdots \otimes X_n$.

Пример 3.1 (матричный формализм)

Прямым вычислением с использованием соотношений (3-2) проверяется, что для конечных прямых сумм $\mathcal{X} = \bigoplus_\nu X_\nu$ и $\mathcal{Y} = \bigoplus_\mu Y_\mu$ в R-линейной категории имеется канонический изоморфизм R-модулей $\mathrm{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \simeq \bigoplus_{\mu,\nu} \mathrm{Hom}(X_\nu, Y_\mu)$, сопоставляющий морфизму $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ матрицу $\Phi = (\varphi_{\mu\nu})$ из морфизмов $\varphi_{\mu\nu} = \pi_\mu \circ \varphi \circ \iota_\nu : X_\nu \to Y_\mu$. Из матрицы Φ морфизм $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ восстанавливается по формуле $\varphi = \sum_{\mu\nu} \iota_\mu \circ \varphi_{\mu\nu} \circ \pi_\nu$. При этом матрица композиции $\varphi \circ \psi$ равна произведению матриц $\Phi \cdot \Psi$.

3.1.2. Естественность сложения морфизмов. Если в R-линейной категории $\mathcal{L}$ есть прямые суммы $X \oplus X$ и $Y \oplus Y$, то сложение в группе $\mathrm{Hom}(X, Y)$ канонически определяется композициями в категории $\mathcal{L}$, поскольку для любых стрелок $\varphi, \psi : X \to Y$ коммутативна диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi+\psi"] \arrow[d, "\Delta_X"'] & Y \\
X \oplus X \arrow[r, "\varphi\oplus\psi"'] & Y \oplus Y \arrow[u, "\nabla_Y"']
\end{tikzcd}
\tag{3-3}
$$

в которой диагональный морфизм $\Delta_X \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Id}\times\mathrm{Id} : X \to X\times X$ и кодиагональный морфизм $\nabla_Y \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id} : Y \otimes Y \to Y$ канонически заданы универсальными свойствами произведения $X \times X$ и копроизведения $Y \otimes Y$, а морфизм $\varphi \oplus \psi : X \oplus X \to Y \oplus Y$ возникает, если имеется равенство $X \times X = X \otimes X$ или равенство $Y \otimes Y = Y \times Y$, т. е. когда произведение X с собой одновременно является копроизведением, или копроизведение Y с собой одновременно является произведением. В первом случае два отображения $X \to Y \otimes Y$, задаваемые композициями $\iota_1\varphi$ и $\iota_2\psi$, где $\iota_{1,2} : Y \to Y \otimes Y$ суть вложения сомножителей в копроизведение, задают по универсальному свойству копроизведения $X \otimes X$ морфизм $X \otimes X \to Y \otimes Y$, а во втором случае отображения $X \times X \to Y$, задаваемые композициями $\varphi\pi_1$ и $\psi\pi_2$, где $\pi_{1,2} : X \times X \to X$ суть проекции произведения на сомножители, задают морфизм $X\times X \to Y\times Y$ по универсальному свойству произведения $Y \times Y$. Таким образом, диаграмма (3-3) канонически задаёт бинарную операцию на морфизмах в любой категории, где у каждого объекта есть прямое произведение с собой, одновременно являющееся и копроизведением. В R-линейной категории эта операция совпадает со сложением морфизмов.

Упражнение 3.3. Убедитесь в последнем.

3.1.3. Бесконечные (ко)произведения. Копроизведение $\coprod_\nu X_\nu$ бесконечного семейства объектов X_ν в R-линейной категории обычно не совпадает с произведением $\prod_\nu X_\nu$. Так, в категории абелевых групп $\mathcal{A}b$ произведение $\prod_\nu X_\nu$ образовано всевозможными семействами векторов $\{v_\nu\}$, $v_\nu \in X_\nu$, которые складываются покомпонентно, а копроизведение $\coprod_\nu X_\nu \subset \prod_\nu X_\nu$ состоит из тех семейств $\{v_\nu\}$, в которых лишь конечное число элементов $v_\nu \neq 0$. В общей ситуации из универсальных свойств (ко)произведений вытекает существование естественных изоморфизмов

$$
\mathrm{Hom}\Big(\coprod_\nu X_\nu, Y\Big) \simeq \prod_\nu \mathrm{Hom}(X_\nu, Y) \quad \text{и} \quad \mathrm{Hom}\Big(Y, \prod_\nu X_\nu\Big) = \prod_\nu \mathrm{Hom}(Y, X_\nu)\,. \tag{3-4}
$$

Кроме того, для каждого i набор стрелок $\pi_{\nu i} : X_i \to X_\nu$, нулевых при $\nu \neq i$ и тождественной для $\nu = i$, задаёт морфизмы $\pi_i : \coprod_\nu X_\nu \to X_i$, такие что $\pi_\nu\iota_\nu = \mathrm{Id}_{X_\nu}$ при всех ν, и $\pi_\nu\iota_\mu = 0$ при $\mu \neq \nu$. Произведение стрелок π_ν задаёт морфизм

$$
\sigma : \coprod_\nu X_\nu \to \prod_\nu X_\nu\,. \tag{3-5}
$$

Упражнение 3.4. Убедитесь, что все ι_ν и σ инъективны, а π_ν сюрьективны.

Если все объекты X_ν являются одинаковыми копиями одного объекта X, занумерованными элементами некоторого множества N, мы обозначаем их копроизведение через $N \otimes X \overset{\text{def}}{=} \coprod\limits_\nu X_\nu$, а произведение — через $X^N \overset{\text{def}}{=} \prod\limits_\nu X_\nu$.

Пример 3.2 (прямая сумма морфизмов)
Во всякой категории с (ко)произведениями любой набор морфизмов $\gamma_\nu : X_\nu \to Y_\nu$ канонически задаёт морфизм произведений $\prod X_\alpha \to \prod Y_\alpha$ и морфизм копроизведений $\coprod X_\alpha \to \coprod Y_\alpha$, которые отвечают, соответственно, наборам стрелок

$$\gamma_\nu \circ \pi_\nu : \prod X_\alpha \to Y_\nu \quad \text{и} \quad \iota_\nu \circ \gamma_\nu : X_\nu \to \coprod Y_\nu ,$$

где $\pi_\nu : \prod X_\alpha \to X_\nu$ и $\iota_\nu : Y_\nu \to \coprod Y_\alpha$ — канонические морфизмы произведения в сомножители и сомножителей в копроизведение. Для конечных прямых сумм в R-линейных категориях эти два морфизма совпадают и называются *прямой суммой* морфизмов γ_ν. Прямая сумма морфизмов обозначается $\oplus\gamma_\nu$. В терминах прим. 3.1 она изображается диагональной матрицей со стрелками γ_ν по диагонали и нулями в остальных местах.

3.1.4. Ядра и коядра. Напомню[1], что объект $0 \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ категории $\mathcal{C}$ называется *нулевым*, если он одновременно начальный и конечный. Такой объект единствен с точностью до единственного изоморфизма (если существует).

Морфизм $X \to Y$ в категории с нулевым объектом называется *нулевым*, если он распадается в композицию $X \to 0 \to Y$.

Упражнение 3.5. Убедитесь, что в R-линейной категории нулевой морфизм является нулевым элементом аддитивной группы $\operatorname{Hom}(X, Y)$ и наоборот.

Уравнитель и коуравнитель стрелки $\varphi : X \to Y$ и нулевого морфизма называются, соответственно, *ядром* и *коядром* стрелки φ и обозначаются $\ker\varphi$ и $\operatorname{coker}\varphi$.

С ядром канонически связана универсальная стрелка $\varkappa : \ker\varphi \to X$, которая аннулирует φ справа: $\varphi\varkappa = 0$, и любая стрелка ψ, аннулирующая φ справа, однозначно представляется в виде $\psi = \varkappa\psi'$. Универсальную стрелку $\varkappa$ мы тоже будем называть *ядром*. Она единственна с точностью до единственного изоморфизма, тождественно действующего на X.

Упражнение 3.6. pb:KerProps Убедитесь, что если ядро существует, то оно мономорфно, и равенство $\varkappa = 0$ равносильно инъективности φ, а равенство $\varkappa = \operatorname{Id}_X$ — тому, что $\varphi = 0$.

В $\mathbb{Z}$-линейной категории ядро представляет предпучок $Z \mapsto \ker\varphi_*^Z$, переводящий объект Z в ядро гомоморфизма абелевых групп $\varphi_*^Z : \operatorname{Hom}(Z, X) \to \operatorname{Hom}(Z, Y)$, который задаёт действие над Z естественного преобразования $\varphi_* : h_X \to h_Y$ левого умножения на φ.

С коядром связана универсальная стрелка $\varsigma : Y \to \operatorname{coker}\varphi$, также называемая *коядром*. Она аннулирует φ слева: $\varsigma\varphi = 0$, и любая стрелка ψ, аннулирующая φ слева однозначно представляется в виде $\psi = \psi'\varsigma$. Стрелка ς единственна с точностью до

[1] См. прим. 2.7 на стр. 27.

единственного изоморфизма, тождественно действующего на Y. В $\mathbb{Z}$-линейной категории коядро копредставляет функтор $Z \mapsto \ker\varphi_Z^*$, где $\varphi_Z^*: \operatorname{Hom}(Y,Z) \to \operatorname{Hom}(X,Z)$ задаёт действие над Z естественного преобразования $\varphi^*: h^Y \to h^X$.

Упражнение 3.7. Убедитесь, что если коядро существует, то оно эпиморфно, и равенство $\varsigma = 0$ равносильно сюрьективности φ, а равенство $\varsigma = \mathrm{Id}_Y$ — тому, что $\varphi = 0$.

Ядро канонической стрелки $\varsigma : Y \to \operatorname{coker}\varphi$ называется *образом* морфизма φ и обозначается $\operatorname{im}\varphi \overset{\text{def}}{=} \ker\varsigma$. Коядро канонической стрелки $\varkappa : \ker\varphi \to X$ называется *кообразом*[1] морфизма φ и обозначается $\operatorname{coim}\varphi \overset{\text{def}}{=} \operatorname{coker}\varkappa$. Если морфизм $\varphi: X \to Y$ имеет ядро, коядро, образ и кообраз, то в силу универсальных свойств двух последних

$$\operatorname{Hom}(\operatorname{coim}\varphi, \operatorname{im}\varphi) \simeq \{\alpha: \operatorname{coim}\varphi \to Y \mid \varsigma\alpha = 0\} \simeq \{\beta: X \to Y \mid \varsigma\beta = 0 \text{ и } \beta\varkappa = 0\}.$$

Стрелка $\overline{\varphi}: \operatorname{coim}\varphi \to \operatorname{im}\varphi$, переводимая этими изоморфизмами в исходную стрелку $\varphi: X \to Y$, это единственный морфизм, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} \operatorname{coker}\varphi & Y \arrow[l, "\varsigma"'] & \operatorname{im}\varphi \arrow[l, "\varkappa'"'] \\ \ker\varphi \arrow[r, "\varkappa"] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\varsigma'"] & \operatorname{coim}\varphi \arrow[u, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd} \tag{3-6}$$

в которой $\varkappa$, $\varkappa'$ — канонические морфизмы из ядер, а ς, ς' — в коядра.

Определение 3.2

Диаграмма (3-6) называется *каноническим разложением* морфизма φ.

Пример 3.3 (фильтрованные абелевы группы)

Рассмотрим категорию $F\mathcal{A}b$, объектами которой являются абелевы группы

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,$$

профильтрованные возрастающими подгруппами $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, а морфизмами — такие гомоморфизмы абелевых групп $\varphi: A \to B$, что $\varphi(A_n) \subset B_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Эта категория аддитивна, и у каждого морфизма $\varphi: A \to B$ есть ядро и коядро, как группы совпадающие с ядром и коядром в $\mathcal{A}b$, и имеющие фильтрации, индуцированные с A и B: $\ker\varphi = \bigcup A_n'$, где $A_n' = A_n \cap \ker\varphi$, и $\operatorname{coker}\varphi = \bigcup B_n'$, где B_n' — образ подгруппы $B_n \subset B$ в факторе $B/\varphi(A)$. Обозначим через $A[1]$ фильтрованную группу с компонентами $A[1]_p = A_{p+1}$. Отображение $s : A \to A[1]$, тождественно действующее на элементы группы, является морфизмом фильтрованных групп и имеет нулевые ядро и коядро, т. е. одновременно инъективно и сюрьективно, но не обратимо, если $A \neq 0$. В каноническом разложении (3-6) морфизма s стрелка $\overline{s} = s$ тоже не изоморфизм:

$$\begin{tikzcd} 0 & A[1] \arrow[l] & A[1] \arrow[l, "\mathrm{Id}_{A[1]}"'] \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "s"] \arrow[r, "\mathrm{Id}_A"] & A. \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd}$$

[1] В категории модулей кообраз $\varphi: X \to Y$ это фактор по ядру: $\operatorname{coim}\varphi = X/\ker\varphi$.

3.2. Абелевы категории. Категория $\mathcal{A}$ называется *аддитивной*, если она $\mathbb{Z}$-линейна, и в ней имеются нулевой объект и прямые суммы любых двух[1] объектов. Аддитивная категория $\mathcal{A}$ называется *абелевой*, если любая стрелка φ в ней имеет ядро и коядро, причём канонический морфизм $\overline{\varphi}$ в её разложении (3-6) является изоморфизмом, т. е. образ любого морфизма канонически изоморфен его кообразу[2]. Отождествляя кообраз с образом при помощи этого изоморфизма, мы получаем для каждой стрелки $\varphi : X \to Y$ *пятичленное разложение*

$$\begin{tikzcd} \ker\varphi \arrow[r, hook, "\varkappa"] & X \arrow[r, two heads, "\varsigma'"] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] & \operatorname{im}\varphi \arrow[r, hook, "\varkappa'"] & Y \arrow[r, two heads, "\varsigma"] & \operatorname{coker}\varphi \end{tikzcd}, \tag{3-7}$$

где $\varkappa'$ мономорфен, ς' эпиморфен, $\varsigma'\varkappa = \varphi$ и $\operatorname{im}\varphi = \ker\varsigma = \operatorname{coker}\varkappa$.

Упражнение 3.8. Покажите, что в абелевой категории $\mathcal{A}$ ядро, коядро и образ являются функторами из категории $\mathcal{A}r(\mathcal{A})$ диаграмм вида[3] $\bullet \to \bullet$ в категорию $\mathcal{A}$, а пятичленное разложение (3-7) является функтором из $\mathcal{A}r(\mathcal{A})$ в категорию диаграмм вида $\bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet$.

Пример 3.4 (категория модулей)
Для любого ассоциативного кольца R категории R-$\mathcal{M}od$ и $\mathcal{M}od$-R левых и правых R-модулей абелевы: ядра, коядра и образы в них суть обычные ядра, коядра и образы R-линейных отображений, а совпадение образа и кообраза проверяется в теореме о строении R-линейного гомоморфизма, утверждающей, что образ канонически изоморфен фактору по ядру. В частности, категория $\mathcal{A}b$ абелевых групп абелева. Её полная подкатегория конечно порождённых абелевых групп также является абелевой.

Пример 3.5 (неабелва аддитивная категория, продолжение прим. 3.3 на стр. 46)
Категория фильтрованных абелевых групп из прим. 3.3 аддитивна, и все стрелки в ней имеют ядра и коядра. Однако эта категория не является абелевой, т. к. в ней есть стрелки φ, у которых $\operatorname{im}\varphi \not\simeq \operatorname{coim}\varphi$.

Упражнение 3.9. Убедитесь, что в категории топологических абелевых групп и их непрерывных гомоморфизмов тоже есть ядра, коядра и прямые суммы, но она не является абелевой.

Пример 3.6 (неаддитивные категории)
Категории множеств, топологических пространств, групп и коммутативных колец не являются даже $\mathbb{Z}$-линейными, поскольку в них $X \times Y \neq X \otimes Y$.

Упражнение 3.10. Покажите, что стрелка φ в абелевой категории обратима , если и только если $\ker\varphi = 0$ и $\operatorname{coker}\varphi = 0$, а также что всякий мономорфизм является ядром своего коядра, а эпиморфизм — коядром своего ядра.

---

[1] А значит — и любого конечного множества.

[2] В начальном курсе алгебры этот факт обычно называют «теоремой о строении гомоморфизма» и доказывают для гомоморфизмов групп, колец и модулей над кольцами.

[3] Т. е. категории функторов $\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{A})$, где категория $\mathcal{N} = \{\bullet \to \bullet\}$ имеет 2 объекта и одну нетождественную стрелку.

3.2.1. Конечная (ко)замкнутость. Поскольку у любых двух стрелок α и β в абелевой категории есть (ко)уравнитель, а именно — (ко)ядро разности $\alpha - \beta$, любая конечная диаграмма в абелевой категории имеет (ко)предел[1]. В частности, каждая пара стрелок $A \xrightarrow{\alpha} C \xleftarrow{\beta} B$ однозначно достраивается до декартова квадрата[2]

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & C \end{tikzcd},$$

а каждая пара стрелок $A \xleftarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B$ — до кодекартова квадрата[3]

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\alpha'"] \\ A \arrow[r, "\beta'"] & A \otimes_C B \end{tikzcd}.$$

Предложение 3.2
В абелевой категории коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha'"'] \arrow[d, "\beta'"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & Q \end{tikzcd} \tag{3-8}$$

декартов, если и только если P является ядром стрелки $\delta : A \oplus B \to Q$ с матрицей[4] $\delta = (\beta, -\alpha)$, и в этом случае вложение этого ядра $\varepsilon : P \hookrightarrow A \oplus B$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$. Двойственным образом, квадрат (3-8) кодекартов тогда и только тогда, когда Q является коядром стрелки $\varepsilon' : P \hookrightarrow A \oplus B$ с матрицей $\begin{pmatrix} \alpha' \\ -\beta' \end{pmatrix}$, и в этом случае проекция на это коядро $\delta' : A \oplus B \twoheadrightarrow Q$ имеет матрицу $\delta = (\beta, -\alpha)$.

Доказательство. Мы докажем первое утверждение, второе получается оборачиванием стрелок. Для произвольного объекта Z запись отображения $\eta : Z \to A \oplus B$ матрицей $\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ устанавливает биекцию между стрелками $\eta : Z \to A \oplus B$ и парами стрелок $\varphi : Z \to A$, $\psi : Z \to B$. Равенство $\alpha\varphi = \beta\psi$ при этом равносильно равенству $\delta\eta = 0$, поскольку $(\alpha, -\beta)\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \alpha\varphi - \beta\psi$. Универсальное свойство вложения ядра

[1] См. зам. 2.1. на стр. 30.
[2] См. прим. 2.10 на стр. 28.
[3] См. прим. 2.11 на стр. 29.
[4] См. прим. 3.1 на стр. 43.

$\varepsilon : \ker\delta \hookrightarrow A \oplus B$, записанное в терминах его матрицы $\varepsilon = \begin{pmatrix}\beta' \\ \alpha'\end{pmatrix}$, превращается таким образом в универсальное свойство стрелок β' и α' в декартовом квадрате (3-8): для любого морфизма $\eta = \begin{pmatrix}\varphi \\ \psi\end{pmatrix}$ со свойством $\delta\eta = 0$, существует единственная такая стрелка $\vartheta : Z \to \ker\delta$, что $\eta = \varepsilon\vartheta$, т. е. $\varphi = \beta'\vartheta$ и $\psi = \alpha'\vartheta$. □

Предложение 3.3
В абелевой категории для каждого декартова квадрата

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & C \end{tikzcd} \tag{3-9}$$

(1) композиция стрелки $\varkappa : \ker\alpha' \hookrightarrow A \times_C B$ со стрелкой β' является ядром для α

(2) инъективность стрелки α равносильна инъективности стрелки α'

(3) если стрелка β сюрьективна, то декартов квадрат (3-9) одновременно является кодекартовым, и стрелка β' тоже сюрьективна.

Доказательство. Из универсального свойства послойного произведения вытекает, что стрелки $\varphi : Z \to A$ со свойством $\alpha\varphi = 0$ и стрелки $\psi : Z \to A \times_C B$ со свойством $\alpha'\psi = 0$ находятся в канонической биекции, которая сопоставляет стрелке $\varphi : Z \to A$ её послойное произведение $\varphi \times_C 0 : Z \to A \times_C B$ с нулевой стрелкой $Z \to B$, а стрелку $\psi : Z \to A \times_C B$ отправляет в композицию $\beta'\psi$:

$$\begin{tikzcd} & A \times_C B \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ Z \arrow[ur, "\psi=\varphi\times_C 0"] \arrow[r, "\varphi=\beta'\psi"'] & A \arrow[r, "\alpha"] & C\,. \end{tikzcd}$$

Поскольку каждая стрелка ψ однозначно пропускается через ядро $\varkappa : \ker\alpha' \hookrightarrow A \times_C B$, отвечающая ей стрелка φ однозначно пропускается через композицию $\beta'\varkappa$. Это доказывает первое утверждение и импликацию $\ker\alpha' = 0 \Rightarrow \ker\alpha = 0$ во втором. Пусть, наоборот, $\ker\alpha = \beta'\varkappa = 0$. Тогда вложение $\varkappa : \ker\alpha' \hookrightarrow A \times_C B$ является послойным произведением нулевых морфизмов $\beta'\varkappa$ и $\alpha'\varkappa$, и поэтому тоже нулевое. Это завершает доказательство второго утверждения. Отметим, что пока мы пользовались только универсальными свойствами произведения и ядер.

Чтобы доказать (3) воспользуемся предл. 3.2, согласно которому $A \times_C B$ является ядром стрелки $\delta = (\alpha, -\beta)$ в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & A \times_C B \arrow[dl, "\beta'"'] \arrow[d, hook, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\alpha'"] & \\
A \arrow[dr, "\alpha"'] & A \oplus B \arrow[d, "\delta"] & B \arrow[dl, "\beta"] \\
 & C &
\end{tikzcd} .$$

Сюрьективность стрелки β влечёт сюрьективность стрелки $\delta' : A \oplus B \to C$ с матрицей $\delta' = (\alpha, \beta)$, поскольку $\beta = \delta' \iota_B$. Тем самым, стрелка δ' является коядром стрелки $\varepsilon' = \begin{pmatrix} \alpha' \\ -\beta' \end{pmatrix}$, а значит, по предл. 3.2 квадрат (3-9) является кодекартовым. Оборачивая стрелки в уже доказанных утверждениях (1) и (2), мы заключаем, что в кодекартовом квадрате сюрьективность стрелки β' равносильна сюрьективности стрелки β. □

Следствие 3.1
В абелевой категории для каждого кодекартова квадрата

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[d, "\alpha'"] \\
B \arrow[r, "\beta'"] & A \otimes_C B
\end{tikzcd} \tag{3-10}$$

(1) композиция стрелки β' с сюрьекцией $\zeta : A \otimes_C B \twoheadrightarrow \operatorname{coker} \alpha'$ доставляет коядро для стрелки α

(2) эпиморфность стрелки α равносильна эпиморфности стрелки α'

(3) если стрелка β инъективна, то кодекартов квадрат (3-9) одновременно является декартовым, и стрелка β' тоже инъективна.

3.2.2. Точность. Пара компонуемых стрелок $\xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{\psi}$ называется *точной*, если $\ker \psi = \operatorname{im} \varphi$. Более длинная цепочка стрелок называется *точной*, если каждая пара её последовательных стрелок точна. Например, точность последовательности

$$0 \to X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$$

означает что стрелка $\varphi : X \hookrightarrow Y$ инъективна и является ядром стрелки ψ, а точность последовательности

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \to 0$$

означает что стрелка $\psi : Y \twoheadrightarrow Z$ сюрьективна и служит коядром стрелки ψ.

Точные последовательности вида

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B \to 0 \tag{3-11}$$

называются *точными тройками*. Точность тройки (3-11) равносильна равенствам $\alpha = \ker\beta$ и $\beta = \operatorname{coker}\alpha$. В этой ситуации B называется *фактором* C по A и обозначается C/A. Точная тройка (3-11) называется *расщепимой*, если существует изоморфизм $\varphi : C \xrightarrow{\sim} A \oplus B$, включающийся в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & C \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\varphi"] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota_A"'] & A \oplus B \arrow[r, "\pi_B"'] & B \arrow[r] & 0 ,
\end{tikzcd} \tag{3-12}$$

нижняя строка которой является канонической диаграммой прямой суммы.

Упражнение 3.11. Покажите, что расщепимость точной тройки (3-11) равносильна наличию такой стрелки $\beta' : C \to A$, что $\beta'\alpha = \mathrm{Id}_A$, а также равносильна наличию такой стрелки $\alpha' : B \to C$, что $\beta\alpha' = \mathrm{Id}_B$. Приведите пример нерасщепимой точной тройки в категории абелевых групп.

3.2.3. Точные функторы. Функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (соотв. $F : \mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{B}$) между абелевыми категориями называется *точным слева*, если он переводит ядра (соотв. коядра) в ядра или, что то же самое, — точные последовательности вида $0 \to A \to B \to C$ (соотв. $A \to B \to C \to 0$) в точные последовательности $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$ (соотв. в $0 \to F(C) \to F(B) \to F(A)$). Двойственным образом, F называется *точным справа*, если он переводит коядра (соотв. ядра) в коядра, или — точные последовательности вида $A \to B \to C \to 0$ (соотв. $0 \to A \to B \to C$) в точные последовательности $F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ (соотв. в $F(C) \to F(B) \to F(A) \to 0$). Функтор называется *точным*, если он точен и справа и слева.

Упражнение 3.12. Убедитесь, что для точности функтора необходимо и достаточно, чтобы он переводил точные тройки в точные тройки, и в этом случае он сохраняет точность любых последовательностей.

Пример 3.7 (представимые функторы)
Из универсального свойства ядра тавтологически вытекает, что всякий копредставимый функтор $h^A : X \mapsto \mathrm{Hom}(A, X)$ (соотв. представимый функтор $h_A : X \mapsto \mathrm{Hom}(X, A)$) переводит ядра (соотв. коядра) в ядра. Тем самым, все (ко)представимые функторы точны слева.

Пример 3.8 (сопряжённые функторы)
Так как (ко)ядро является (ко)пределом диаграммы, по предл. 2.7 на стр. 36 все правые сопряжённые функторы точны слева, а все левые сопряжённые функторы точны справа. В частности, предел диаграммы является точным слева, а копредел — точным справа функторами из категории диаграмм $\mathcal{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ заданного вида $\mathcal{N}$ в абелевой категории $\mathcal{A}$ в саму категорию $\mathcal{A}$. Обратите внимание, что категория функторов $\mathcal{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ со значениями в абелевой категории $\mathcal{A}$ является абелевой для любой малой категории $\mathcal{N}$: (ко)ядра, (ко)произведения и прямые суммы определяются покомпонентно над каждым объектом $\nu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$, и равенство $\mathrm{coim} = \mathrm{im}$ также проверяется отдельно над каждым объектом $\nu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$.

Пример 3.9 (тензорное умножение)
Согласно прим. 2.20 на стр. 38, для любых ассоциативных колец R, S и R-S-бимодуля N функтор $\mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{M}od\text{-}S$, $X \mapsto X \otimes_R N$, точен справа.

Упражнение 3.13. В категории абелевых групп приведите примеры, показывающие, что (ко)представимый функтор может быть не точен справа, а тензорное умножение на фиксированную абелеву группу N может быть не точно слева.

3.2.4. Отступление: короткий список аксиом абелевой категории. Данное выше определение абелевой категории не является логически минимальным и выбрано нами постольку, поскольку все абелевы категории, с которыми мы будем иметь дело в этом курсе, изначально линейны, и в них выполняется теорема о строении гомоморфизма. Общепринятое в логике и теории категорий «минималистское» определение таково: (произвольная) категория $\mathcal{C}$ называется *абелевой*, если в ней

(A0) есть нулевой объект[1]

(A1) у каждой пары объектов есть произведение и копроизведение

(A2) у каждого морфизма есть ядро и коядро

(A3) каждый мономорфизм является ядром некоторой стрелки, а каждый эпиморфизм — коядром некоторой стрелки

Эти аксиомы самодвойственны: их выполнение в категории $\mathcal{C}$ равносильно их выполнению в $\mathcal{C}^{\text{opp}}$. Вывод нашего определения из этих аксиом намечен в следующем ниже упражнении и подробно изложен во второй главе книги: *P. Freyd*. «Abelian Categories».

Упражнение 3.14* (не то, чтобы трудное, но довольно трудоёмкое). Пользуясь только предыдущими аксиомами (A0) – (A3), покажите, что в категории $\mathcal{C}$

а) сопоставления стрелке её ядра и коядра корректно задают взаимно обратные биекции между множествами под- и фактор объектов[2] каждого объекта

б) любая одновременно мономорфная и эпиморфная стрелка обратима

в) у каждых двух подобъектов любого объекта есть максимальная нижняя и минимальная верхняя грани[3] (они называются *пересечением* и *объединением* этих подобъектов)

г) любые две стрелки имеют уравнитель и коуравнитель (как следствие, в $\mathcal{C}$ есть (ко)пределы всех конечных диаграмм)

д) образ и кообраз любого морфизма канонически изоморфны

е) для каждой пары объектов X, Y канонический морфизм $X \otimes Y \to X \times Y$, задаваемый стрелками $\mathrm{Id}_X \times 0 : X \to X \times Y$ и $0 \times \mathrm{Id}_Y : Y \to X \times Y$, обратим (т. е. копроизведение любых двух объектов одновременно является копроизведением)

ж) конструкция из n° 3.1.2 на стр. 44 задаёт структуру абелевой группы на каждом множестве $\mathrm{Hom}(X, Y)$, что в свою очередь вводит $\mathbb{Z}$-линейную структуру на категории $\mathcal{C}$.

[1] См. прим. 2.7 на стр. 27.
[2] См. n° 1.1.2 на стр. 5.
[3] В смысле порядка из упр. 1.1 на стр. 5.

3.3. Проективные и инъективные объекты. Объект Q абелевой категории $\mathcal{A}$ называется *проективным* (соотв. *инъективным*), если функтор $h^Q: X \mapsto \mathrm{Hom}(Q, X)$ (соотв. функтор $h_Q: X \mapsto \mathrm{Hom}(X, Q)$) точен справа.

Упражнение 3.15. Покажите, что прямая сумма (даже бесконечная, если существует) проективных объектов проективна, а прямое произведение (даже бесконечное) инъективных объектов инъективно.

Лемма 3.1
Проективность объекта P абелевой категории $\mathcal{A}$ равносильна каждому из свойств:

(P1) любая стрелка $\varphi: P \to X$ поднимается вдоль любого эпиморфизма $\pi: Y \twoheadrightarrow X$, т. е. существует такая стрелка $\psi: P \to Y$, что $\varphi = \pi\psi$

(P2) любой эпиморфизм $\pi: Z \twoheadrightarrow P$ расщепляется, т. е. существует такой изоморфизм $\gamma: Z \xrightarrow{\sim} \ker\pi \oplus P$, что $\pi = \pi_P\gamma$.

Инъективность объекта I абелевой категории $\mathcal{A}$ равносильна каждому из свойств:

(I1) любая стрелка $\varphi: X \to I$ продолжается на любое расширение $\iota: X \hookrightarrow Y$, т. е. существует такая стрелка $\psi: Y \to I$, что $\psi\iota = \varphi$

(I2) любое вложение $\iota: I \hookrightarrow Z$ расщепляется, т. е. $\iota = \gamma\iota_I$ для некоторого изоморфизма $\gamma: I \oplus \mathrm{coker}\,\iota \xrightarrow{\sim} Z$.

Доказательство. Условие (P1) означает эпиморфность морфизмов

$$h^P(\pi) = \pi_*: h^P(Y) \to h^P(X)$$

для всех сюрьекций $\pi: Y \twoheadrightarrow X$, в чём и заключается точность справа функтора h^P. Из условия (P1) следует, что тождественный морфизм Id_P можно поднять вдоль любого эпиморфизма $\pi: Z \twoheadrightarrow P$ до такой стрелки $\iota: P \to Z$, что $\pi\iota = \mathrm{Id}_P$, а это по упр. 3.11 и означает расщепимость точной тройки $\ker\pi \hookrightarrow Z \twoheadrightarrow P$. Наоборот, пусть любой эпиморфизм на P расщепляется, и задана пара стрелок $Y \twoheadrightarrow X \leftarrow P$. Достроим её до декартова квадрата

$$\begin{tikzcd} Y \times_X P \arrow[r, two heads, "\pi'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & P \arrow[l, dotted, bend left, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, two heads, "\pi"'] & X\,. \end{tikzcd}$$

Так как π сюрьективен, π' тоже сюрьективен[1]. Пусть $\iota: P \hookrightarrow Y \times_X P$ расщепляет π'. Тогда стрелка φ поднимается стрелкой $\psi = \varphi'\iota$. Эквивалентность условий (I1), (I2) инъективности объекта I доказывается обращением стрелок. □

[1]См. предл. 3.3 на стр. 49.

Упражнение 3.16. Проведите эти рассуждения.

3.3.1. Проективные и инъективные модули. В категории $\mathcal{M}od$-R правых модулей над произвольным кольцом R с единицей свободный модуль R ранга 1 проективен, поскольку имеется естественный изоморфизм функторов $h^R \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}$, который действует над модулем M преобразованием $\mathrm{Hom}(R, M) \xrightarrow{\sim} M$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$. По упр. 3.15 все свободные модули $E \otimes R$ тоже проективны, а по лем. 3.1 любой проективный модуль P изоморфен прямому слагаемому свободного модуля: каждый модуль P является образом эпиморфизма $S(P) \otimes R \twoheadrightarrow P$, где $S(P)$ — множество векторов модуля P, и для проективного P этот эпиморфизм расщепляется.

Упражнение 3.17. Убедитесь в обратном: если модуль $P \oplus Q = E \otimes R$ свободен, то и P и Q проективны.

Инъективность модуля I означает возможность в нём деления на любые необратимые элементы кольца:

Лемма 3.2
Правый R-модуль I инъективен , если и только если для любого правого идеала $\mathfrak{q} \subset R$ и любого R-линейного справа гомоморфизма $q : \mathfrak{q} \to I$ имеется такой вектор $e_q \in I$, что $q(x) = e_q \cdot x$ для всех $x \in \mathfrak{q}$, т. е. в I имеется частное $q(x)/x = e_q$.

Доказательство. Импликация $\Rightarrow$ вытекает из лем. 3.1: продолжим q до R-линейного справа гомоморфизма $q' : R \to I$ и возьмём $e_q = q'(1)$. Для доказательства обратной импликации рассмотрим произвольное расширение модулей $N \subset M$ и любой R-линейный гомоморфизм $\varphi : N \to I$. Чтобы продолжить его на M воспользуемся леммой Цорна. Содержащие N подмодули $N' \subseteq M$, на которые продолжается φ, образуют чум по включению, и каждая линейно упорядоченная цепочка в нём мажорируется объединением элементов цепочки. Поэтому в M существует максимальный по включению подмодуль $L \supseteq N$ и гомоморфизм $\psi : L \to I$ с ограничением $\psi|_N = \varphi$. Если имеется вектор $m \in M \smallsetminus L$, то подмодуль L', порождённый L и m, строго больше L, и для завершения доказательства достаточно продолжить ψ с L на L'. Подмодуль L' является образом эпиморфизма $\pi_m : L \oplus R \twoheadrightarrow L'$, $(\ell, x) \mapsto \ell + mx$, и стало быть, изоморфен $L \oplus R/\ker \pi_m$, где $\ker \pi_m = \{(\ell, x) \mid mx = -\ell \in L\}$ в свою очередь изоморфно правому идеалу $\mathfrak{k} = \{x \in R \mid mx \in L\}$, который R-линейно отображается в I по правилу $x \mapsto \psi(mx)$. Берём вектор $e = \psi(mx)/x \in I$, такой что $\psi(mx) = e \cdot x$ для всех $x \in \mathfrak{k}$, и задаём продолжение $\psi' : L' \to I$ правилом $\psi'(\ell + mx) = \psi(\ell) + e \cdot x$. □

Упражнение 3.18. Убедитесь в корректности последнего правила и проверьте, что $\mathbb{Z}$-модули $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ инъективны, причём второй замечателен тем, что для любого $\mathbb{Z}$-модуля A и любого элемента $a \in A$ есть гомоморфизм $\varphi : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ с $\varphi(a) \neq 0$.

3.3.2. Гротендиковы категории. Абелева категория $\mathcal{A}$ называется *гротендиковой*, если она замкнута и козамкнута, умеренно мощна[1] и для любой фильтрующейся малой категории $\mathcal{F}$ функтор $\mathrm{colim} : \mathcal{F}un(\mathcal{F}, \mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ точен. Последнее условие означает, что фильтрующиеся копределы в $\mathcal{A}$ перестановочны с ядрами, а значит, и с пределами любых конечных диаграмм. Например, категория абелевых групп $\mathcal{A}b$ гротен-

[1] Т. е. подобъекты и фактор объекты любого объекта образуют множество.

дикова в силу предл. 2.8 на стр. 38. Как следствие, для любой малой абелевой категории $\mathcal{A}$ категория функторов $\mathcal{F}un(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$ тоже гротендикова.

Упражнение 3.19 (непересекающиеся подобъекты). Убедитесь, что в любой абелевой категории следующие два условия на пару подобъектов $A \hookrightarrow M \hookleftarrow B$ объекта M эквивалентны: а) $A \times_M B = 0$ б) сквозное отображение $B \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/A$ инъективно.

Предложение 3.4
В гротендиковой категории для инъективности объекта I необходимо и достаточно, чтобы в любом собственном[1] расширении $I \hookrightarrow M$ существовал ненулевой подобъект $N \hookrightarrow M$, не пересекающийся[2] с I.

Доказательство. Необходимость очевидна, поскольку по свойству (I2) из лем. 3.1 на стр. 53 любое расширение инъективного объекта расщепляется в прямую сумму I и дополнительного подобъекта, который не пересекается с I. Наоборот, пусть объект I удовлетворяет условию предложения. Докажем, что каждое собственное расширение $I \hookrightarrow M$ расщепляется. Подобъекты $N \hookrightarrow M$ со свойством $I \times_M N = 0$ образуют непустое частично упорядоченное[3] множество, удовлетворяющее условиям леммы Цорна: для любой линейно упорядоченной цепочки подобъектов $N_\nu \hookrightarrow M$ со свойством $I \times_M N_\nu = 0$, их объединение $\operatorname{colim} N_\nu$ тоже обладает этим свойством, так как копредел в гротендиковой категории перестановочен с конечными пределами. Пусть $N \hookrightarrow M$ — максимальный по включению подобъект в M со свойством $I \times_M N = 0$. Тогда проекция $M \twoheadrightarrow M/N$ является минимальным фактором M, для которого сквозное отображение $I \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/N$ инъективно. В частности, в M/N нет непересекающихся с I подобъектов (иначе фактор по такому объекту был бы строго меньшим, чем M/N фактором M, в который вкладывается I). По условию леммы, расширение $I \hookrightarrow M/N$ несобственное, т. е. является изоморфизмом. Тем самым, имеется проекция $M \twoheadrightarrow I$ с тождественным сквозным отображением $I \hookrightarrow M \twoheadrightarrow I$, расщепляющая расширение $I \hookrightarrow M$. □

3.4. (Ко)порождающие объекты. Объект G абелевой категории $\mathcal{A}$ называется *генератором*[4] (соотв. *когенератором*) категории $\mathcal{A}$, если функтор $h^G : X \mapsto \operatorname{Hom}(G, X)$ (соотв. функтор $h_G : X \mapsto \operatorname{Hom}(X, G)$) строг, т. е. переводит разные стрелки в разные[5].

Например, свободный модуль R ранга 1 порождает категорию $\mathcal{M}od$-R, ибо функтор $h^R \simeq \operatorname{Id}$ не только строг, но и вполне строг.

Упражнение 3.20 (электрификация). Покажите, что каждая абелева категория с генератором умеренно мощна[6].

Для произвольных объектов G, X рассмотрим прямую сумму

$$\operatorname{Hom}(G, X) \otimes G \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\varphi : G \to X} \varphi \otimes G$$

[1] Т. е. не являющегося изоморфизмом.

[2] Т. е. удовлтворяющий равносильным условиям из упр. 3.19.

[3] Стандартным порядком на подобъектах, задаваемым включением, см. упр. 1.1 на стр. 5.

[4] (Ко)генераторы также называют *(ко)порождающими объектами* категории $\mathcal{A}$.

[5] Или, эквивалентно, ненулевые — в ненулевые.

[6] См. n° 1.1.2 на стр. 5.

одинаковых копий G, занумерованных стрелками $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, X)$, и отобразим слагаемое $\varphi \otimes G$ в X при помощи стрелки $\varphi : G \to X$. Получим морфизм

$$c : \mathrm{Hom}(G, X) \otimes G \to X , \tag{3-13}$$

который называется *канонической свёрткой*. Двойственным образом, рассмотрим для объектов Y, C прямое произведение

$$C^{\mathrm{Hom}(Y,C)} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\varphi : Y \to C} C^{\varphi}$$

одинаковых копий C, занумерованных стрелками $\varphi : Y \to C$, и отобразим Y в сомножитель C^{φ} при помощи стрелки $\varphi : Y \to C$. Получим морфизм

$$c' : Y \to C^{\mathrm{Hom}(Y,C)} \tag{3-14}$$

который называется *канонической косвёрткой*.

Предложение 3.5
Кополная абелева категория $\mathcal{A}$ тогда и только тогда порождается объектом G, когда для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ каноническая свёртка (3-13) эпиморфна. Полная абелева категория тогда и только тогда копорождается объектом C, когда для любого $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ каноническая косвёртка (3-14) мономорфна.

Доказательство. Докажем второе. Применим к морфизму (3-14) сохраняющий ядра функтор h^X с произвольным $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Получим точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, \ker c') \to \mathrm{Hom}(X, Y) \xrightarrow{c'_*} \mathrm{Hom}(X, C)^{\mathrm{Hom}(Y,C)}$$

морфизм c'_* которой переводит стрелку $\varphi : X \to Y$ в график отображения

$$\varphi^* : \mathrm{Hom}(Y, C) \to \mathrm{Hom}(X, C) , \quad \psi \mapsto \psi\varphi .$$

Тем самым, инъективность c'_* равносильна инъективности действия функтора

$$h_C : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}\left(h_C(Y), h_C(X)\right) .$$

Если $\ker c' = 0$, отображение c'_* инъективно для всех X, Y, т. е. функтор h_C строг. Наоборот, если h_C строг, то $\mathrm{Hom}(X, \ker c') = 0$ для всех X, и беря $X = \ker c'$, заключаем, что $\ker c' = 0$. □

Упражнение 3.21. Докажите первую часть предл. 3.5 и покажите, что любой модуль является коядром гомоморфизма свободных модулей.

Следствие 3.2
Инъективная абелева группа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ копорождает категорию абелевых групп.

Доказательство. Косвёртка $c' : A \to \left(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$ инъективна по упр. 3.18. □

Упражнение 3.22. Убедитесь, что абелева группа $I_R = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ со структурой правого R-модуля, задаваемой левым действием R на себе (соотв. со структурой левого R-модуля, задаваемой правым действием R на себе), является инъективным когенератором категории $\mathcal{M}od$-R (соотв. категории R-$\mathcal{M}od$).

Определение 3.3
Будем говорить, что в абелевой категории $\mathcal{A}$ *достаточно много инъективных* (соотв. *проективных*) *объектов*, если любой объект является подобъектом инъективного (соотв. фактором проективного) объекта. Например, в категории модулей над ассоциативным кольцом с единицей достаточно много как инъективных, так и проективных объектов.

Теорема 3.1
Замкнутая абелева категория, имеющая генератор и достаточно много инъективных объектов, обладает инъективным когенератором.

Доказательство. Обозначим генератор через G. По упр. 3.20 на стр. 55 категория умеренно мощна. В частности, фактор объекты генератора составляют множество Q. Произведение $\prod_{F \in Q} F$ вкладывается в некоторый инъективный объект I. Покажем, что функтор h_I переводит любую ненулевую стрелку $\varphi : X \to Y$ в ненулевую стрелку

$$\varphi^* : \mathrm{Hom}(Y, I) \to \mathrm{Hom}(X, I), \quad \psi \mapsto \psi\varphi.$$

Поскольку функтор h^G строг, существует морфизм $\gamma : G \to X$ с ненулевой композицией $\varphi\gamma : G \to Y$. Её образ $\mathrm{im}(\varphi\gamma) \in Q$ вкладывается в I. Поднимем это вложение до морфизма $\psi : Y \to I$. Тогда $\psi\varphi \neq 0$, ибо по построению $\psi\varphi\gamma \neq 0$. □

Теорема 3.2
Всякая гротендикова категория[1] с генератором имеет достаточно много инъективных объектов.

Доказательство. Назовём расширение $X \hookrightarrow E$ *существенным*, если все ненулевые подобъекты в E пересекаются[2] с X. Достаточно показать, что каждый объект X обладает максимальным по включению существенным расширением, ибо такое расширение инъективно по предл. 3.4 на стр. 55.

Пользуясь аксиомой выбора, сопоставим каждому объекту Z диаграмму $Z \hookrightarrow E(Z)$, которая для инъективных Z является тождественным отображением Id_Z, а в остальных случаях — собственным[3] существенным расширением объекта Z. Тогда над каждым объектом X возникает проиндексированная ординалами вполне упорядоченная по включению неубывающая цепочка существенных расширений $\varepsilon_\omega : X \hookrightarrow E_\omega$, в которой $\varepsilon_\varnothing : X \hookrightarrow E(X)$ и для любых $\eta < \omega$ расширение $\varepsilon_\omega : X \hookrightarrow E_\omega$ является композицией существенных расширений $\varepsilon_\eta : X \hookrightarrow E_\eta$ и $\varepsilon_{\eta,\omega} : E_\eta \hookrightarrow E_\omega$.

Упражнение 3.23. Убедитесь, что композиция двух существенных расширений является существенным расширением.

[1] См. n° 3.3.2 на стр. 54.
[2] См. упр. 3.19 на стр. 55.
[3] Т. е. отличным от изоморфизма.

В самом деле, пусть ω является наименьшим ординалом, на который такую цепочку нельзя продолжить. Если у ω есть предшествующий ординал ω', положим ε_ω равным сквозному отображению $X \hookrightarrow E_{\omega'} \hookrightarrow E(E_{\omega'})$. Если у ω нет предшествующего ординала, положим $E_\omega = \operatorname{colim}_{\eta<\omega} E_\eta$.

Упражнение 3.24. Убедитесь, что E_ω является существенным расширением X и всех предыдущих E_η.

Наличие у X максимального существенного расширения означает, что указанная цепочка в какой-то момент стабилизируется на инъективном расширении. Допустим, что для какого-то X этого не произошло, и для каждой пары неравных ординалов $\omega < \tau$ существенное расширение $E_\omega \hookrightarrow E_\tau$ является собственным.

Обозначим генератор категории через G и положим $R = \operatorname{End}(G)$. Это ассоциативное кольцо с единицей, и функтор $h^G : Z \to \operatorname{Hom}(G, Z)$ принимает значения в категории правых R-модулей. Покажем, что он переводит собственные существенные расширения $A \hookrightarrow B$ в собственные существенные расширения $h^G(A) \hookrightarrow h^G(B)$. Собственность сохраняется в силу строгости функтора h^G и его точности слева: при применении h^G к точной тройке $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow B/A$ с ненулевой правой стрелкой получится тройка $h^G(A) \hookrightarrow h^G(B) \to h^G(B/A)$ с ненулевой правой стрелкой, пропускающейся через коядро левой. Стало быть, это коядро тоже ненулевое. Чтобы установить существенность, рассмотрим произвольный R-подмодуль $N \subset h^G(B) = \operatorname{Hom}(G, B)$, содержащий ненулевой элемент $\varphi : G \to B$. Если расширение $\alpha : A \hookrightarrow B$ существенно, то его образ пересекается с образом φ и левый верхний угол декартова квадрата

$$\begin{tikzcd} A \times_B G \arrow[r, hook, "\alpha'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & G \arrow[d, "\varphi"] \\ A \arrow[r, hook, "\alpha"] & B \end{tikzcd}$$

отличен от нуля. Так как G это генератор, существует стрелка $\psi : G \to A \times_B G$ с ненулевой композицией $\phi\alpha'\psi$. Поскольку $\alpha'\psi \in R$, эта композиция тоже принадлежит R-подмодулю $N \subset \operatorname{Hom}(G, B)$. С другой стороны, в силу коммутативности квадрата, она лежит и в образе вложения $\alpha_* : h^G(A) \hookrightarrow h^G(B)$, что и требовалось установить.

Итак, функтор h^G переводит вполне упорядоченную цепочку собственных существенных расширений объекта X в обладающую теми же свойствами цепочку расширений R-модуля $h^G(X)$. Этот модуль содержится в некотором инъективном R-модуле I. Для любого собственного существенного расширения R-модулей $N \hookrightarrow M$ каждое вложение $N \hookrightarrow I$ продолжается до гомоморфизма $M \hookrightarrow I$, тоже инъективного, поскольку иначе его ядро нетривиально пересекалось бы с N. По индукции[1], вложение $h^G(X) \hookrightarrow I$ продолжается до вложения в I всей трансфинитной цепочки $h^G(E_\omega)$. Мы получаем вполне упорядоченную цепочку неограниченной мощности из строго возрастающих подмодулей, лежащих между $h^G(X)$ и I, что невозможно. □

Следствие 3.3

Для любой малой абелевой категории $\mathcal{A}$ категория функторов $\mathcal{F}un(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$ из $\mathcal{A}$ в абелевы группы является гротендиковой, имеет генератор, инъективный когенератор и достаточно много инъективных объектов.

[1] Имеется в виду трансфинитная индукция по ординалам типа уже проделанной выше.

Доказательство. Категория $\mathcal{F}un(\mathcal{A},\mathcal{A}b)$ абелева и гротендикова, поскольку пределы и копределы диаграмм[1] функторов $F_\nu : \mathcal{A} \to \mathcal{A}b$, а также точность последовательностей естественных преобразований $F \to G \to H$ таких функторов и сложение этих преобразований определяются, проверяются и вычисляются отдельно над каждым объектом $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}b$, где они превращаются в диаграммы $F_\nu(A)$ и последовательности $F(A) \to G(A) \to H(A)$ абелевых групп.

Покажем, что функтор $G = \bigoplus_{A\in\operatorname{Ob}\mathcal{A}} h^A : X \mapsto \bigoplus_{A\in\operatorname{Ob}\mathcal{A}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A,X)$ является генератором категории $\mathcal{F}un(\mathcal{A},\mathcal{A}b)$. Согласно предл. 3.5 достаточно проверить, что для любого функтора $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}b$ каноническая свёртка $c : \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{A},\mathcal{A}b)}(G,F)\otimes G \twoheadrightarrow F$ сюрьективна. При помощи естественных изоморфизмов[2]

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{A},\mathcal{A}b)}(G,F) \simeq \prod_{A\in\operatorname{Ob}\mathcal{A}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{A},\mathcal{A}b)}(h^A,G) \simeq \prod_{A\in\operatorname{Ob}\mathcal{A}} G(A)$$

действие канонической свёртки c над объектом $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ можно записать в виде

$$c_X : \Big(\prod_{A\in\operatorname{Ob}\mathcal{A}} F(A)\Big) \otimes \Big(\bigoplus_{A\in\operatorname{Ob}\mathcal{A}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A,X)\Big) \to F(X), \quad (x_A)\otimes(\varphi_A) \mapsto \sum_A F\varphi_A(x_A).$$

Тогда каждый элемент $z \in F(X)$ является образом разложимого тензора $z\otimes\operatorname{Id}_X$, левый и правый сомножители которого имеют в $\prod_A F(A)$ и $\bigoplus_A \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A,X)$ координаты

$$x_A = \begin{cases} 0 & \text{при } A \neq X \\ z & \text{при } A = X\,, \end{cases} \qquad \varphi_A = \begin{cases} 0 & \text{при } A \neq X \\ \operatorname{Id}_X & \text{при } A = X\,. \end{cases}$$

Будучи гротендиковой и обладая генератором, категория $\mathcal{F}un(\mathcal{A},\mathcal{A}b)$ имеет достаточно много инъективных объектов по теор. 3.2 и инъективный когенераор по теор. 3.1. □

3.5. Категории модулей. Объект K козамкнутой категории $\mathcal{C}$ называется *компактным*, если функтор $h^K : Z \mapsto \operatorname{Hom}(K,Z)$ коммутирует с фильтрующимися копределами, т. е. для любого функтора $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ из фильтрующейся малой категории $\mathcal{N}$ каноническая стрелка $\operatorname{colim}\operatorname{Hom}(K,X_\nu) \to \operatorname{Hom}(K,\operatorname{colim}X_\nu)$, $[\varphi_\nu] \mapsto \iota_\nu\circ\varphi_\nu$, переводящая класс в $\operatorname{colim}\operatorname{Hom}(K,X_\nu)$ морфизма $\varphi_\nu : K \to X_\nu$ в композицию этого морфизма с каноническим отображением $\iota_\nu : X_\nu \to \operatorname{colim}X_\nu$, биективна. Подробнее это означает, что любой морфизм $\varphi : K \to \operatorname{colim}X_\nu$ пропускается через каноническое отображение ι_ν для некоторого ν, и две стрелки $\varphi_\nu : K \to X_\nu$ и $\varphi_\mu : K \to X_\mu$ задают одно и то же отображение $\iota_\nu\varphi_\nu = \iota_\mu\varphi_\mu : K \to \operatorname{colim}X_\nu$, если и только если $X(\nu\to\eta)\circ\varphi_\nu = X(\mu\to\eta)\circ\varphi_\mu$ как отображения $K \to X_\eta$ для некоторых стрелок $\nu\to\eta\leftarrow\mu$ в категории $\mathcal{N}$.

Очевидно, что проективный генератор R категории $\mathcal{M}od$-R правых модулей над ассоциативным кольцом R с единицей компактен, поскольку $h^R \simeq \operatorname{Id}$. Конечные прямые суммы компактных объектов тоже компактны.

Упражнение 3.25. Покажите, что копредел конечной диаграммы компактных объектов компактен.

[1] В частности, ядра, коядра и прямые суммы.

[2] Мы пользуемся тем, что функтор $\operatorname{Hom}(\,*\,,G)$ переводят копределы в пределы, и леммой Ионеды.

Из упражнения вытекает, что каждый конечно представимый модуль, т. е. коядро гомоморфизма $R^m \to R^n$, компактен. Легко видеть, что каждый компактный модуль M конечно порождён, поскольку представляется в виде фильтрующегося копредела (объединения) своих конечно порождённых подмодулей $N \subset M$ и, стало быть, содержится в одном из них, так как тождественный морфизм $M \to M = \operatorname{colim} N$ пропускается через какой-нибудь из этих подмодулей.

Упражнение 3.26. Покажите, что всякий конечно порождённый проективный модуль конечно представим.

Тем самым, проективный модуль компактен , если и только если он конечно порождён.

Теорема 3.3
Козамкнутая абелева категория $\mathcal{A}$ с компактным проективным генератором P точно эквивалентна[1] категории $\mathcal{M}od$-R правых R-модулей над кольцом $R = \operatorname{End}_{\mathcal{A}}(P)$.

Доказательство. Функтор $h^P : \mathcal{A} \to \mathcal{A}b$ принимает значение в $\mathcal{M}od$-R: правое действие $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,P)$ на абелевой группе $h^P(X) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,X)$ задаётся правым умножением стрелок на f. В силу проективности P функтор h^P точен. Проверим, что он по-существу сюрьективен и вполне строг[2]. Из предл. 3.5 вытекает, что любой объект $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ представляется в виде коядра морфизма между прямыми суммами подходящих упорядоченных множеств I, J одинаковых копий генератора P:

$$J \otimes P \xrightarrow{\varphi} I \otimes P \twoheadrightarrow X \to 0\,. \tag{3-15}$$

Морфизм φ задаётся некоторой матрицей[3] Φ формата $I \times J$ с элементами

$$\varphi_{ij} \in \operatorname{Hom}(j \otimes P, i \otimes P) \simeq \operatorname{Hom}(P,P) = R\,,$$

имеющей при каждом j лишь конечное число ненулевых φ_{ij}. Применяя к (3-15) функтор h^P и пользуясь компактностью P получаем для $h^P(X)$ представление в виде коядра морфизма свободных R-модулей

$$J \otimes R \xrightarrow{\varphi_*} I \otimes R \twoheadrightarrow h^P(X) \to 0\,, \tag{3-16}$$

который задаётся умножением столбца[4] $(x_j) \in J \otimes R$ слева на матрицу Φ. Так как каждый R-модуль является коядром гомоморфизма свободных R-модулей, функтор h^P по-существу сюрьективен. Для любого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ группа $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ является ядром стрелки $h_Y(\varphi)$, получающейся применением $h_Y : Z \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}b}(Z,Y)$ к диаграмме (3-15), а группа $\operatorname{Hom}_R\left(h^P(X), h^P(Y)\right)$ является коядром стрелки $h_{h^P(Y)}(\varphi_*)$, получающейся применением $h_{h^P(Y)} : M \mapsto \operatorname{Hom}_R(M, h^P(Y))$ к диаграмме (3-16). Эти стрелки совпадают друг с другом, ибо каждая из них представляет собою гомоморфизм $h^P(Y)^I \to h^P(Y)^J$

[1] Т. е. имеется эквивалентность категорий, переводящая точные тройки в точные тройки.
[2] См. предл. 1.1 на стр. 13.
[3] См. прим. 3.1 на стр. 43.
[4] В котором имеется лишь конечное число $x_j \neq 0$.

прямых произведений одинаковых копий группы $h^P(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, Y)$, который действует на строку[1] $(y_i)_{i\in I}$, $y_i \in h^P(Y)$, правым умножением на матрицу Φ. Тем самым, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_R\left(h^P(X), h^P(Y)\right)$. □

Теорема 3.4 (эквивалентность Мориты)
Следующие три свойства колец R и S с единицами эквивалентны друг другу:

(1) категории $\mathcal{M}od\text{-}R$ и $\mathcal{M}od\text{-}S$ точно эквивалентны

(2) $R \simeq \mathrm{Hom}_S(P, P)$ для некоторого конечно порождённого проективного S-модуля P, являющегося генератором категории $\mathcal{M}od\text{-}S$

(3) существует такой R-S бимодуль T, что тензорное умножение $\mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{M}od\text{-}S$, $M \mapsto M \otimes_R T$, является точной эквивалентностью категорий.

Доказательство. Ясно, что (3) влечёт (1). Если выполнено (1), то эквивалентность $\mathcal{M}od\text{-}R \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}od\text{-}S$ переводит R в S-модуль P, являющийся компактным проективным генератором категории $\mathcal{M}od\text{-}S$ и имеющий $\mathrm{Hom}_S(P, P) \simeq \mathrm{Hom}_R(R, R) = R$, что даёт (2), так как компактный модуль конечно порождён. Если выполнено (2), возьмём в качестве T удовлетворяющий условию (2) компактный проективный генератор P категории $\mathcal{M}od\text{-}S$, снабдив его канонической структурой левого модуля над $R = \mathrm{End}_S(P)$. Функтор $M \mapsto M \otimes_R P$ сопряжён слева функтору[2] $h^P : N \mapsto \mathrm{Hom}_S(P, N)$, который по теор. 3.3 задаёт эквивалентность категорий $\mathcal{M}od\text{-}S \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}od\text{-}R$. Как мы заметили в прим. 2.4 на стр. 23, функтор $M \mapsto M \otimes_R P$ тоже должен быть эквивалентностью категорий, квазиобратной к функтору h^P. Это даёт (3). □

Определение 3.4 (эквивалентность Мориты)
Кольца R и S, удовлетворяющие условиям теор. 3.4, называются *Морита-эквивалентными*, а функторы $M \mapsto M \otimes_R P$ и $N \mapsto \mathrm{Hom}(P, N)$ называются *эквивалентностями Мориты*. Из доказательства теор. 3.4 вытекает, что они квазиобратны друг другу.

Упражнение 3.27. Покажите, что категория R-модулей точно эквивалентна категории модулей над кольцом матриц $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ любого конечного размера.

Теорема 3.5 (слабая теорема о вложении)
Если абелева категория $\mathcal{B}$ козамкнута и имеет проективный генератор[3], то любая её малая полная точная[4] абелева подкатегория $\mathcal{A}$ допускает точное вполне строгое вложение в категорию правых модулей над некоторым кольцом с единицей.

Доказательство. Обозначим через P проективный генератор категории $\mathcal{B}$ и положим $Q \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{X\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}} \mathrm{Hom}(P, X) \otimes P$ (прямая сумма одинаковых копий генератора P, по одной копии для каждой стрелки, ведущей из P в подкатегории $\mathcal{A}$).

Упражнение 3.28. Убедитесь, что прямая сумма проективных генераторов также является проективным генератором.

[1] В этой строке допускается бесконечно много ненулевых y_i, однако в каждом столбце матрицы Φ имеется только конечное число ненулевых элементов.
[2] См. предл. 2.3 на стр. 24.
[3] Не обязательно компактный!
[4] Т. е. такая, что точные тройки из $\mathcal{A}$ точны и в $\mathcal{B}$.

Тогда для каждого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ существует сюрьективный морфизм $Q \twoheadrightarrow X$. Положим $R = \operatorname{End}_{\mathcal{B}}(Q)$ и как в доказательстве теор. 3.3 рассмотрим точный строгий функтор $h^Q : \mathcal{A} \to \mathcal{M}od\text{-}R$, $X \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(Q, X)$. Покажем, что он полон, т. е. для любых $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ каждая стрелка $\varphi : h^Q(X) \to h^Q(Y)$ в категории $\mathcal{M}od\text{-}R$ представляет собою левое умножение $\psi_* : \vartheta \mapsto \psi\vartheta$ на некоторую стрелку $\psi : X \to Y$ из категории $\mathcal{A}$. Для этого зафиксируем какие-нибудь сюрьекции $\pi : Q \twoheadrightarrow Y$, $\tau : Q \twoheadrightarrow X$ и дополним вторую из них ядром $K = \ker\tau$ до точной тройки $0 \longrightarrow K \xrightarrow{\varkappa} Q \xrightarrow{\tau} X \longrightarrow 0$. После применения точного функтора h^Q имеем такую диаграмму R-модулей:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & h^Q(K) \arrow[r, "\varkappa_*"] & R \arrow[r, "\eta_*"] & h^Q(X) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
 & & R \arrow[r, "\pi_*"] & h^Q(Y) \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}
\tag{3-17}
$$

Зафиксируем какой-нибудь элемент $\zeta \in R = \operatorname{End}(Q)$, переводимый эпиморфизмом π_* в элемент $\varphi\eta_*(\operatorname{Id}_Q) \in h^Q(Y)$. Левое умножение на ζ достраивает диаграмму (3-17) до коммутативной диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
h^Q(K) \arrow[r, "\varkappa_*"] & R \arrow[r, "\eta_*"] \arrow[d, "\zeta_*"'] & h^Q(X) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
 & R \arrow[r, "\pi_*"] & h^Q(Y) \arrow[r] & 0\,,
\end{tikzcd}
\tag{3-18}
$$

По построению, вся эта диаграмма, за исключением стрелки φ, является результатом применения функтора h^Q к диаграмме

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\varkappa"] & Q \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\zeta"'] & X \arrow[r] & 0 \\
 & & Q \arrow[r, "\pi"] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\tag{3-19}
$$

в категории $\mathcal{A}$. В силу строгости функтора h^Q композиция $\pi\zeta\varkappa : K \to Y$ нулевая, ибо h^Q-образ этого зигзага на диаграмме (3-18) нулевой. Поэтому в точной последовательности абелевых групп

$$
0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \xrightarrow{\eta^*} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Q, Y) \xrightarrow{\varkappa^*} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(K, Y)\,,
$$

полученной применением точного слева функтора h_Y к верхней строке из (3-19), выполняется равенство $\varkappa^*(\pi\zeta) = 0$, а значит, существует единственная такая стрелка $\psi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$, что $\psi\eta = \pi\zeta$. Она дополняет (3-19) до коммутативной диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\varkappa"] & Q \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\zeta"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
 & & Q \arrow[r, "\pi"] & Y \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}
$$

Результат применения к этой стрелке функтора h^Q обязан совпасть со стрелкой φ на диаграмме (3-18), поскольку создать коммутативный квадрат в правой части

$$\begin{tikzcd} h^Q(K) \arrow[r, "\varkappa_*"] & R \arrow[r, "\eta_*"] \arrow[d, "\zeta_*"'] & h^Q(X) \arrow[r] & 0 \\ & R \arrow[r, "\pi_*"] & h^Q(Y) \arrow[r] & 0\,, \end{tikzcd}$$

как и на диаграмме (3-19), можно ровно одной стрелкой $h^Q(X) \to h^Q(Y)$. Это, как и выше, вытекает из точной последовательности абелевых групп

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(h^Q(X), h^Q(Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R, h^Q(Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(h^Q(K), h^Q(Y))\,,$$

полученной применением точного слева функтора $\mathrm{Hom}_R(*, h^Q(Y))$ к верхней строке диаграммы. $\square$

§4. Комплексы и когомологии

4.1. Исчисление градуированных объектов. Диаграмма $V : \mathbb{Z} \to \mathcal{A}$, где $\mathbb{Z}$ рассматривается как дискретная категория, называется *градуированным объектом* абелевой категории $\mathcal{A}$. Такой объект представляет собою набор занумерованных целыми числами объектов $V^k \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$, которые называются *однородными компонентами* степени k в V. Если компоненты $V^k = 0$ при всех $k \ll 0$ (соотв. при всех $k \gg 0$) градуированный объект V называется *ограниченным слева* (соотв. *справа*).

Через $V[m]$ обозначается градуированный объект с компонентами

$$V[m]^k \overset{\text{def}}{=} V^{k+m} .$$

Для градуированного объекта $V : \mathbb{Z} \to \mathcal{A}$ мы по определению полагаем

$$V_k \overset{\text{def}}{=} V^{-k} . \tag{4-1}$$

Сопоставление $k \mapsto V_k$ является композицией функтора V с оборачивающей стандартный линейный порядок на $\mathbb{Z}$ инволюцией $k \mapsto -k$. При этом

$$V[m]_k = V[m]^{-k} = V^{m-k} = V_{k-m} .$$

Спуск и подъём индексов позволяет избегать отрицательных чисел. Верхняя индексация обычно называется *когомологической*, а нижняя — *гомологической*. В категориях модулей про элементы $v \in V_k$ говорят, что они имеют *нижнюю* (или *гомологическую*) степень k или *верхнюю* (или *когомологическую*) степень $-k$. Вычет $k \pmod 2$ называется *чётностью* элемента $v \in V^k$ и обозначается $|v| \in \mathbb{Z}/(2)$. Чётность не зависит от того, верхние или нижние индексы используются.

Естественное преобразование $f : U \to W[k]$ диаграммы $U : \mathbb{Z} \to \mathcal{A}$ в диаграмму $W[k] : \mathbb{Z} \to \mathcal{A}$ называется *однородным морфизмом* степени k между градуированными объектами U и W. Такой морфизм представляет собою набор морфизмов $f_\nu : U^\nu \to W^{\nu+k}$ в категории $\mathcal{A}$. Например, *сдвиг градуировки* $s : V \to V[1]$, тождественно отображающий V^ν в $V^\nu = V[1]^{\nu-1}$, однороден степени -1.

При использовании нижних индексов однородные морфизмы степени k

$$f : (D_\nu) \to (B_\mu), \quad g : (D_\nu) \to (U^\mu) \quad \text{и} \quad g : (U^\mu) \to (B_\nu)$$

представляют собою наборы стрелок

$$f_\nu : D_\nu \to B_{\nu-k} , \quad g_\nu : D_\nu \to U^{k-\nu} \quad \text{и} \quad h_\nu : U^\nu \to B_{-\nu-k} ,$$

соответственно, уменьшающих нижний индекс на k и сохраняющих сумму верхнего и нижнего индексов, которая будет равна k, если морфизм «поднимает» индексы, и равна $-k$, если он их «опускает».

Однородные морфизмы степени k из V в W образуют абелеву группу, обозначаемую $\operatorname{GrHom}^k(V, W)$. При композиции однородных гомоморфизмов их степени складываются: $\operatorname{GrHom}^i \circ \operatorname{GrHom}^j \subset \operatorname{GrHom}^{i+j}$. Прямая сумма

$$\operatorname{GrHom}(V, W) \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_k \operatorname{GrHom}^k(V, W) \tag{4-2}$$

называется *градуированной группой морфизмов* из V в W. Градуированная группа эндоморфизмов $\operatorname{GrHom}(V, V)$ всякого градуированного объекта V является ассоциативным градуированным кольцом с единицей.

4.1.1. Кошулево правило знаков. При работе с градуированными объектами мы всегда придерживаемся так называемых *s-версий*[1] стандартных операций над отображениями и векторами, которые отличаются от обычных использованием *кошулева правила знаков*: если результат применения операции к аргументам a_i в неградуированной теории является однородной линейной комбинацией (некоммутативных) мономов от этих аргументов и каких-либо вспомогательных операторов f_j, где все мономы отличаются друг от друга только перестановками участвующих в них символов, то в s-версии этой операции каждая транспозиция любых двух символов x, y должна дополнительно сопровождаться умножением соответствующего монома на $(-1)^{|x|\cdot|y|}$. Например, *s-коммутатор* однородных эндоморфизмов определяется как

$$[f,g] \overset{\text{def}}{=} f\circ g-(-1)^{|f||g|}g\circ f\,,$$

а *s-правило Лейбница* для однородного оператора D на градуированной алгебре и однородных элементов a, b этой алгебры имеет вид

$$D(ab)=(Da)b+(-1)^{|D|\cdot|a|}a(Db)\,.$$

Результат применения тензорного произведения $f_1\otimes f_2\otimes\cdots\otimes f_n$ однородных гомоморфизмов градуированных модулей $f_i:\ V_i\to V_i$ к тензорному моному

$$v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_n\in V_1\otimes V_2\otimes\cdots\otimes V_n$$

из однородных векторов v_i будет всегда вычисляться как

$$f_1\otimes\cdots\otimes f_m\left(v_1\otimes\cdots\otimes v_m\right)\overset{\text{def}}{=}(-1)^{\varepsilon}f_1(v_1)\otimes\cdots\otimes f_m(v_m),\tag{4-3}$$

где $\varepsilon=|f_m|\big(|v_1|+\cdots+|v_{m-1}|\big)+|f_{m-1}|\big(|v_1|+\cdots+|v_{m-2}|\big)+\cdots+|f_2||v_1|$. Композиция тензорных произведений однородных гомоморфизмов тоже вычисляется как

$$\left(f_1\otimes\cdots\otimes f_m\right)\circ\left(g_1\otimes\cdots\otimes g_m\right)\overset{\text{def}}{=}(-1)^{\varepsilon}(f_1\circ g_1)\otimes\cdots\otimes(f_m\circ g_m)\tag{4-4}$$

где $\varepsilon=|f_m|\big(|g_1|+\cdots+|g_{m-1}|\big)+|f_{m-1}|\big(|g_1|+\cdots+|g_{m-2}|\big)+\cdots+|f_2||g_1|$.

4.1.2. Комплексы и (ко)гомологии. Градуированный объект V, оснащённый однородным эндоморфизмом $d:\ V\to V$ степени 1 с $d^2=0$ называется *комплексом* с *дифференциалом* d. Действие дифференциала удобно изображать диаграммой

$$\cdots\xrightarrow{d}V^{\nu-1}\xrightarrow{d}V^{\nu}\xrightarrow{d}V^{\nu+1}\xrightarrow{d}\cdots\,.\tag{4-5}$$

Равенство $d^2=0$ означает, что $\operatorname{im}d$ является подобъектом[2] в $\ker d$.

Упражнение 4.1. Покажите, что в абелевой категории для любой пары компонуемых стрелок α, β с $\beta\alpha=0$ имеются канонические инъекция $\iota:\ \operatorname{im}\alpha\hookrightarrow\ker\beta$, сюрьекция $\pi:\ \operatorname{coker}\alpha\twoheadrightarrow\operatorname{im}\beta$ и изоморфизм $\operatorname{coker}\iota\simeq\ker\pi$.

[1] Префикс *s*- можно воспринимать как указание на присутствие дополнительных знаков (*signs*) или как сокращение для *super*- или *skew*-.

[2] Или, что то же самое, — фактором объекта $\operatorname{coker}d$.

Градуированный объект $H(V) \overset{\text{def}}{=} \ker d\,/\operatorname{im} d$ с однородными компонентами

$$H^{\nu}(V) = \frac{\ker\left(d : V^{\nu} \to V^{\nu+1}\right)}{\operatorname{im}(d : V^{\nu-1} \to V^{\nu})}.$$

называется *когомологиями* комплекса V. Если $H(V) = 0$, т. е. $\ker d = \operatorname{im} d$, комплекс V называется *точным* или *ацикличным*. В категориях модулей элементы из $\ker d$ называются *коциклами*, а элементы из $\operatorname{im} d$ — *кограницами*.

При использовании нижней индексации (4-1) дифференциал принято обозначать кириллической буквой ∂. Диаграмма (4-5) приобретает при этом вид

$$\cdots \xrightarrow{\partial} V_{\nu+1} \xrightarrow{\partial} V_{\nu} \xrightarrow{\partial} V_{\nu-1} \xrightarrow{\partial} \cdots. \tag{4-6}$$

В таком контексте факторы $H_{\nu}(V) \overset{\text{def}}{=} \ker\left(\partial : V_{\nu} \to V_{\nu-1}\right)/\operatorname{im}\left(\partial : V_{\nu+1} \to V_{\nu}\right)$ называют *гомологиями*, элементы из $\ker\partial$ — *циклами*, а элементы из $\operatorname{im}\partial$ — *границами*[1].

Пример 4.1 (цепной комплекс симплициального множества)
Пусть $X : \Delta^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ — симплициальное множество, а K — коммутативное кольцо. Обозначим через $C_n = C_n(X, K)$ свободный K-модуль с базисом $X_n = X([n])$. Его элементы называются n-мерными *симплициальными цепями* в X с коэффициентами из K. Напомню[2], что мы обозначили через $\partial_n^{(i)} : [n-1] \hookrightarrow [n]$ — возрастающее вложение, образ которого не содержит i. Контравариантный функтор X переводит его в отображение i-той грани, которое мы обозначим просто через $\partial_i : X_n \to X_{n-1}$ и которое сопоставляет n-мерному симплексу $x \in X_n$ тот $(n-1)$-мерный симплекс $\partial_i x \in X_{n-1}$, что подклеивается к x в качестве гиперграни, натянутой на все вершины кроме i-той, где $i = 0, 1, \dots$ K-линейный оператор $\partial : C_n \to C_{n-1}$, действующий на базисный вектор $x \in X_n \subset C_n$ по формуле

$$\partial x \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i x, \tag{4-7}$$

называется *граничным оператором*. Он сопоставляет каждому симплексу его ориентированную границу. Например, ориентированной границей треугольника 012 будет цепь $12 - 02 + 01$, которую можно интерпретировать как контур треугольника, обходимый в направлении ориентированного ребра 01, если договориться, что смена знака перед симплексом означает смену ориентации у этого симплекса, т. е. $-02 = 20$.

Упражнение 4.2. Убедитесь, что $\partial^2 = 0$.

Комплекс (C, ∂) называется *цепным комплексом*, а его гомологии — *гомологиями* симплициального множества X с коэффициентами в K.

В случае, когда $X = S(T)$ является множеством сингулярных симплексов[3] топологического пространства T, эти гомологии называются *сингулярными гомологиями* пространства T с коэффициентами в K и обозначаются $H(T, K)$.

[1] Однако комплексы так и остаются комплексами ☺

[2] См. прим. 1.4 на стр. 5.

[3] См. прим. 2.6 на стр. 25.

Всё вышесказанное в равной степени применимо и к полусимплициальным множествам $X : \Delta_s^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$. Получающиеся при этом гомологии называют *симплициальными гомологиями* триангулированного топологического пространства $T = |X|$ — геометрической реализации полусимплициального множества X, и тоже обозначают[1] $H(T, K)$.

Упражнение 4.3. Вычислите гомологии $H(T, \mathbb{Z})$ стандартной триангуляции двумерного тора T с рис. 1◇1 на стр. 8.

4.1.3. Бикомплексы. Биградуированный объект $V = \bigoplus\limits_{p,q} V^{p,q}$ с парой таких дифференциалов $d_1, d_2 : V \to V$, что $d_1^2 = 0$, $d_2^2 = 0$, $d_1 d_2 = -d_2 d_1$ и при всех p, q

$$d_1(V^{p,q}) \subset V^{p+1,q} \quad \text{и} \quad d_2(V^{p,q}) = V^{p,q+1}\,,$$

называется *бикомплексом*. С каждым бикомплексом связан обычный комплекс

$$\mathrm{Tot}\, V = \bigoplus_{\nu} \mathrm{Tot}^{\nu} V\,, \quad \text{где} \quad \mathrm{Tot}^{\nu} V \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{p+q=\nu} V^{p,q} \quad \text{и} \quad d_{\mathrm{Tot}} \stackrel{\text{def}}{=} d_1 + d_2\,.$$

Он называется *свёрткой* или *тотальным комплексом* бикомплекса V.

Пример 4.2 (тензорное произведение комплексов модулей)
Тензорные произведения $U^p \otimes W^q$ однородных компонент комплексов модулей (U, d_U) и (W, d_W) образуют бикомплекс с дифференциалами $d_1 = d_U \otimes 1_W$ и $d_2 = 1_U \otimes d_W$, поскольку согласно кошулеву правилу знаков для $|d_U| = |d_V| = 1$ имеем:

$$(d_U \otimes 1) \circ (1 \otimes d_V) = d_U \otimes d_V = -(1 \otimes d_V) \circ (d_U \otimes 1)\,.$$

Тотальный комплекс этого бикомплекса обозначается $U \otimes W$ и называется *тензорным произведением* комплексов U и V. Он имеет однородные компоненты

$$(U \otimes W)^k = \bigoplus_{\mu+\nu=k} U^{\mu} \otimes W^{\nu}\,,$$

а его дифференциал продолжает дифференциалы комплексов U, V правилу Лейбница

$$d_{U\otimes V} \stackrel{\text{def}}{=} d_U \otimes 1 + 1 \otimes d_V \tag{4-8}$$

и действует на однородный тензор $u \otimes v$ по формуле

$$d_{U\otimes V}(u \otimes v) = (d_U \otimes 1)(u \otimes v) + (1 \otimes d_V)(u \otimes v) = (d_U u) \otimes v + (-1)^{|v|} v \otimes (d_V v)\,.$$

Тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_m$ произвольного набора комплексов определяется аналогично: это градуированный объект с компонентами

$$\left(V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n\right)^{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\sum \nu_i = \nu} V_1^{\nu_1} \otimes V_2^{\nu_2} \otimes \cdots \otimes V_n^{\nu_n} \tag{4-9}$$

[1] В начальных курсах алгебраической топологии доказывается, что симплициальные гомологии триангулируемого топологического пространства совпадают с сингулярными и, в частности, не зависят от выбора триангуляции. См. *А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс*, «Курс гомотопической топологии», М., Наука, 1989 или *В. В. Прасолов*, «Элементы теории гомологий», МЦНМО, 2006.

и дифференциалом, продолжающим дифференциалы $d_i : V_i \to V_i$ по правилу Лейбница:

$$d_{\otimes V_i} = \sum_{i=1}^{m} 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes d_i \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1\,, \tag{4-10}$$

причём отдельные слагаемые этой суммы перемножаются друг с другом и применяются к однородным тензорам согласно кошулеву правилу знаков.

Пример 4.3 (комплекс однородных гомоморфизмов)
Для любых двух комплексов (U, ∂_U), (W, d^W) в произвольной абелевой категории $\mathcal{A}$, абелевы группы $\mathrm{Hom}(U_p, W^q)$ образуют бикомплекс с дифференциалами

$$d_1 = \partial_U^* : \varphi \mapsto (-1)^{|\varphi|+1} \varphi \circ \partial_U \quad \text{и} \quad d_2 = d_*^W : \varphi \mapsto d_W \circ \varphi\,. \tag{4-11}$$

Тотальный комплекс этого бикомплекса обозначается $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(U, W)$ и называется *комплексом морфизмов* между комплексами U и V. Как градуированная абелева группа он совпадает с $\mathrm{GrHom}(U, W)$ из форм. (4-2) на стр. 64 и имеет

$$\mathrm{Hom}^k_{\mathrm{DG}}(U, W) = \mathrm{GrHom}^k(U, W) = \bigoplus_{\mu+\nu=k} \mathrm{Hom}(U_\mu, W^\nu)\,.$$

Мы пишем $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}$, а не GrHom, чтобы подчеркнуть что первая градуированная группа, в отличие от второй, рассматривается вместе с дифференциалом[1] d, переводящим однородный морфизм $\varphi : V \to W$ в его s-коммутатор с дифференциалами из V и W:

$$\begin{gathered} d : \mathrm{Hom}^k_{\mathrm{DG}}(U, W) \to \mathrm{Hom}^{k+1}_{\mathrm{DG}}(U, W) \\ \varphi \mapsto [d, \varphi] \overset{\text{def}}{=} d_W \circ \varphi - (-1)^{|\varphi|} \varphi \circ \partial_W\,. \end{gathered} \tag{4-12}$$

Упражнение 4.4. Убедитесь, что дифференциалы (4-11) антикоммутируют и дифференциал (4-12) имеет $d^2 = 0$.

Замечание 4.1. (мультикомплексы) Кроме бикомплексов можно рассматривать и более общие *m-комплексы*, т. е. $\mathbb{Z}^m$-градуированные K-модули $V = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Z}^m} V^\mu$, оснащённые m дифференциалами d_i так, что мультистепень каждого d_i равна стандартному базисному вектору[2] $e_i \in \mathbb{Z}^m$ и при всех i, j выполняются соотношения $d_i^2 = 0$ и $d_i d_j + d_j d_i = 0$. Иными словами, дифференциалы d_i задают на V действие грассмановой алгебры с m образующими, согласованное с $\mathbb{Z}^m$-градуировками на V и на грассмановой алгебре. Каждому m-комплексу V тоже можно сопоставить *полную свёртку* $\mathrm{Tot}\, V$ с $\mathrm{Tot}^\nu V \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{\sum \mu_i = \nu} V^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m}$ и $d_{\mathrm{Tot}} = \sum d_i$. Тензорное произведение m комплексов $V_1, V_2, \dots, V_m$ можно воспринимать как свёртку m-комплекса с компонентами $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_m$ и m дифференциалами из правой части (4-10).

[1] Обозначение DG является аббревиатурой для «differential graded», т. е. *дифференциальная градуированная* группа.

[2] Т. е. $d_i(V^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m}) \subset V^{\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_i + 1, \mu_{i+1}, \dots, \mu_m}$

4.2. Категории комплексов. С заданной абелевой категорией $\mathcal{A}$ связаны три различных категории комплексов: *DG-категория* $\mathcal{C}om_{\mathrm{DG}}(\mathcal{A})$, «обычная» категория комплексов $\mathcal{C}om(\mathcal{A})$ и *гомотопическая категория* $\mathcal{H}o(\mathcal{A})$. Все они имеют один и тот же класс объектов — комплексы, состоящие из объектов категории $\mathcal{A}$, однако различаются множествами морфизмов между комплексами V, W.

DG-категория комплексов $\mathcal{C}om_{\mathrm{DG}}(\mathcal{A})$ имеет в качестве морфизмов из V в W *комплекс* морфизмов $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(V, W)$ из предыдущего прим. 4.3.

Определение 4.1
Аддитивная категория $\mathcal{C}$, в которой каждое из множеств $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ является комплексом абелевых групп, причём дифференциал композиции удовлетворяет s-правилу Лейбница
$$d(\varphi \circ \psi) = (d\varphi) \circ \psi + (-1)^{|\varphi|}\varphi \circ (d\psi), \tag{4-13}$$
называется *дифференциальной градуированной* (или *DG*-) категорией.

Упражнение 4.5. Убедитесь, что категория $\mathcal{C}om_{\mathrm{DG}}(\mathcal{A})$ действительно является DG-категорией.

4.2.1. Категория комплексов $\mathcal{C}om(\mathcal{A})$ имеет в качестве морфизмов из V в W подгруппу в $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(V, W)$, состоящую из перестановочных с дифференциалами однородных морфизмов степени нуль
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}om}(V, W) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}^0_{\mathrm{DG}}(V, W) \cap \ker d = \{\varphi : V \to W \mid \forall \nu\ \varphi(V^\nu) \subset W^\nu \ \&\ d_W\varphi = \varphi d_V\}.$$
Каждый такой морфизм корректно задаёт морфизм когомологий $\varphi_* : H(V) \to H(W)$, переводящий класс коцикла[1] ξ по модулю кограниц в класс коцикла $\varphi(\xi)$.

Упражнение 4.6. Убедитесь в этом.

Для любой абелевой категории $\mathcal{A}$ категория $\mathcal{C}om(\mathcal{A})$ тоже абелева: ядро морфизма комплексов $\varphi : V \to W$ это подкомплекс в V, образованный ядрами $\ker f_\nu$ морфизмов $\varphi_\nu : V^\nu \to W^\nu$, а коядро образовано коядрами $\operatorname{coker} \varphi_\nu = W^\nu / \operatorname{im} \varphi_\nu$ этих морфизмов.

Упражнение 4.7. Убедитесь, что ядра $\ker \varphi_\nu$ действительно образуют подкомплекс в V, т. е. d_V переводит $\ker \varphi_\nu$ в $\ker \varphi_{\nu+1}$, и что коядра $\operatorname{coker} \varphi_\nu$ образуют фактор комплекс комплекса W, т. е. d_W корректно задаёт отображение фактор объектов $W^\nu / \operatorname{im} \varphi_\nu \to W^{\nu+1} / \operatorname{im} \varphi_{\nu+1}$.

Существование прямых сумм, наличие нулевого объекта и совпадение образа с кообразом имеют место постольку, поскольку они имеют место в категории диаграмм[2] $\mathbb{Z} \to \mathcal{A}$ и их естественных преобразований, которая, как легко видеть, абелева.

Упражнение 4.8. Убедитесь в этом.

---

[1] Всюду далее мы будем рассуждать в терминах элементов объектов, как будто подлежащая абелева категория $\mathcal{A}$ является категорией модулей над ассоциативным кольцом. Справедливость получаемых таким образом результатов для произвольной абелевой категории $\mathcal{A}$ может быть установлена при помощи сильной теоремы о вложении: минимальная по включению полная абелева подкатегория, содержащая заданное множество объектов из $\mathcal{A}$, является малой и по сильной теореме о вложении может быть точно и вполне строго вложена в категорию модулей над ассоциативным кольцом.

[2] Где $\mathbb{Z}$ рассматривается как дискретная категория.

Предложение 4.1
С точной тройкой комплексов $0 \to U \xrightarrow{\iota} W \xrightarrow{\pi} W/U \to 0$ функториально[1] связана длинная точная последовательность когомологий

$$\cdots \xrightarrow{\iota_*} H^i(W) \xrightarrow{\pi_*} H^i(W/U) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(U) \xrightarrow{\iota_*} H^{i+1}(W) \xrightarrow{\pi_*} \cdots, \tag{4-14}$$

в которой *связывающий гомоморфизм* $\delta : H^i(W/U) \to H^{i+1}(U)$ переводит когомологический класс коцикла $\pi(w) \in \ker d_{W/U}$ в когомологический класс коцикла $d_W(w)$.

Доказательство. Проверим, что δ является корректно определённым отображением из $H(W/U)$ в $H(U)$. Поскольку $\pi d_W(w) = d_{W/U}\pi(w) = 0$, элемент $d_W(w) \in \ker \pi = U$. Он является коциклом, так как $d_U d_W(w) = d_W^2(w) = 0$. Его когомологический класс в $H(U)$ не зависит от выбора элемента $w \in W$, представляющего класс когомологий $[\pi(w)] \in H(W/U)$, поскольку $d_W(U + dW) = d_U(U) = 0$ в $H(U)$. По построению, каждый из морфизмов φ_*, ψ_* и δ функториально зависит от исходной точной тройки комплексов, и композиция любой пары последовательных стрелок в (4-14) нулевая. Проверку точного совпадения ядер с образами мы оставляем читателю. □

Упражнение 4.9. Сделайте эту проверку.

Определение 4.2 (сдвиг градуировки)
Функтор сдвига $S : \mathcal{C}om \to \mathcal{C}om$, $V \mapsto SV = V[1]$, действует на комплекс по правилу $SV^\nu = V^{\nu+1}$, $d_{SV} = -d_V$, так что *естественное преобразование сдвига* $s : V \to V[1]$, тождественно действующее на элементы и лежащее в $\mathrm{Hom}^{-1}_{\mathrm{DG}}(V, V[1])$, s-коммутирует с дифференциалом: $[d, s] = d_{SV}s + sd_V = 0$. Действие функтора S на морфизмы тождественно. Функтор S обратим в сильном смысле: тождественно действующий на морфизмы функтор $T : V \mapsto V[-1]$, где $V[-1]^\nu = V^{\nu-1}$ и $d_{TV} = -d_V$, таков что $TS = ST = \mathrm{Id}$ (точное равенство, а не эквивалентность функторов). Итерации функтора сдвига обозначаются $S^kV = T^{-k}V = V[k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 4.4 (конус морфизма)
Со всяким морфизмом комплексов $\varphi : U \to W$ функториально связан сосредоточенный в двух столбцах с номерами -1 и 0 бикомплекс

$$\begin{tikzcd}
 & \\
U^{i+1} \arrow[u, "-d_U"] \arrow[r, "\varphi"] & W^{i+1} \arrow[u, "d_W"'] \\
U^{i} \arrow[u, "-d_U"] \arrow[r, "\varphi"] & W^{i} \arrow[u, "d_W"'] \\
U^{i-1} \arrow[u, "-d_U"] \arrow[r, "\varphi"] & W^{i-1} \arrow[u, "d_W"'] \\
 \arrow[u, "-d_U"] & \arrow[u, "d_W"']
\end{tikzcd} \tag{4-15}$$

[1]В том смысле, что сопоставление точной тройке её длинной последовательности когомологий является функтором из категории точных диаграмм вида $0 \to * \to * \to * \to 0$ в $\mathcal{C}om(\mathcal{A})$ в категорию бесконечных точных диаграмм $\cdots \to * \to * \to \cdots$ в $\mathcal{A}$.

свёртка которого называется *конусом* морфизма φ и обозначается $\mathrm{Con}(\varphi)$. Как градуированный модуль, $\mathrm{Con}(\varphi) \simeq U[1] \oplus W$ имеет $\mathrm{Con}^i(\varphi) = U^{i+1} \oplus W^i$, но дифференциал

$$d_{\mathrm{Con}(\varphi)} : U[1] \oplus W \to U[1] \oplus W, \quad \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -d_U & 0 \\ \varphi & d_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \tag{4-16}$$

не равен прямой сумме дифференциалов. Комплекс $W \subset \mathrm{Con}(\varphi)$ является подкомплексом в $\mathrm{Con}(\varphi)$ с фактором $\mathrm{Con}(\varphi)/W \simeq V[1]$, причём точная тройка комплексов

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{\iota_\varphi} \mathrm{Con}(\varphi) \xrightarrow{\pi_\varphi} U[1] \longrightarrow 0, \tag{4-17}$$

вообще говоря, *не расщепляется* в категории $\mathcal{C}om$. Длинная точная последовательность когомологий тройки (4-17) имеет вид

$$\cdots \longrightarrow H^i(\mathrm{Con}\,\varphi) \xrightarrow{\pi_{\varphi_*}} H^{i+1}(U) \xrightarrow{\varphi_*} H^{i+1}(W) \xrightarrow{\iota_{\varphi_*}} H^{i+1}(\mathrm{Con}\,\varphi) \longrightarrow \cdots, \tag{4-18}$$

и её связывающий гомоморфизм $\delta : H^i(U[1]) = H^{i+1}(U) \to H^{i+1}(W)$ совпадает с φ_*.

4.2.2. Гомотопическая категория комплексов $\mathcal{H}o$ и имеет в качестве морфизмов нулевые когомологии комплексов $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}o}(V,W) \overset{\mathrm{def}}{=} H^0\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(V,W)\right) = \frac{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}om}(V,W)}{\mathrm{im}\left(d : \mathrm{Hom}^{-1}_{\mathrm{DG}}(V,W) \to \mathrm{Hom}^0_{\mathrm{DG}}(V,W)\right)}.$$

Иначе говоря, морфизмы в $\mathcal{H}o$ суть классы морфизмов $\varphi : V \to W$ в $\mathcal{C}om$ по модулю сложения с морфизмами вида $[d,\gamma] = d_W\gamma + \gamma d_V$, где $\gamma \in \mathrm{Hom}^{-1}_{\mathrm{DG}}(V,W)$. Морфизмы вида $[d,\gamma]$ называются *гомотопными нулю*. Морфизмы комплексов φ и ψ называются *гомотопными*, если их разность гомотопна нулю. При этом любое однородное степени -1 отображение $\gamma : V \to W$, такое что $\varphi - \psi = [d,\gamma]$, называется *гомотопией* между φ и ψ, что записывается как $\varphi \underset{\gamma}{\sim} \psi$. Итак, морфизмы в категории $\mathcal{H}o$ суть морфизмы комплексов, рассматриваемые с точностью до гомотопии.

Упражнение 4.10. Убедитесь, что если $\varphi \underset{\gamma}{\sim} 0$, то $\varphi\psi \underset{\gamma\psi}{\sim} 0$ и $\eta\varphi \underset{\eta\gamma}{\sim} 0$ всякий раз, когда композиции $\varphi\psi$ и $\eta\varphi$ определены.

Таким образом, гомотопные нулю морфизмы образуют в $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}om)$ двусторонний идеал, и значит, композиция морфизмов в $\mathcal{C}om$ корректно спускается на классы гомотопных морфизмов, так что $\mathcal{H}o$ действительно является категорией.

Всякий гомотопный нулю морфизм комплексов $\varphi = d_W\gamma + \gamma d_V : V \to W$ задаёт нулевой морфизм когомологий $\varphi_* : H(V) \to H(W)$, так как для любого коцикла $\xi \in \ker d_V$ коцикл $\varphi(\xi) = d_W(\gamma\xi) + \varphi\gamma(d_V\xi) = d_W(\gamma\xi)$ является кограницей. Поэтому гомотопные морфизмы комплексов одинаково действуют на когомологиях. В частности, при вычислении когомологий произвольного комплекса $V \in \mathcal{C}om$ можно заменить этот комплекс любым другим комплексом W, изоморфным V в категории $\mathcal{H}o$ — когомологии у W будут те же, что и у V, хотя изоморфизма между V и W в категории $\mathcal{C}om$ при этом может и не быть.

Определение 4.3
Комплекс V называется *стягиваемым*, если $\mathrm{Id}_V \underset{\gamma}{\sim} 0$. Гомотопия γ между нулевым и тождественным эндоморфизмами называется *стягивающей гомотопией*.

Упражнение 4.11. Убедитесь, что в категории $\mathcal{H}o$ все стягиваемые комплексы изоморфны нулевому комплексу (в частности, ацикличны).

Пример 4.5 (конус тождественного морфизма)
Конус[1] $\operatorname{Con}\mathrm{Id}_V$ тождественного морфизма $\mathrm{Id}_V : V \to V$, как градуированный модуль равный $V[1] \oplus V$, изоморфен нулю в категории $\mathcal{H}o$. Стягивающая гомотопия между тождественным и нулевым эндоморфизмами задаётся формулой

$$\gamma : V[1] \oplus V \to V \oplus V[-1], \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 4.12. Убедитесь в этом и покажите, что вложение ι_{Id} и проекция π_{Id} из точной в категории $\mathcal{C}om$ тройки[2] $0 \longrightarrow V \xrightarrow{\iota_{\mathrm{Id}}} \operatorname{Con}\mathrm{Id}_V \xrightarrow{\pi_{\mathrm{Id}}} V[1] \longrightarrow 0$ тоже гомотопны нулю.

4.3. Комплексы Кошуля. Для произвольного элемента $f \in K$ обозначим через K_f сосредоточенный в степенях -1 и 0 двучленный комплекс

$$0 \to K \xrightarrow{f} K \to 0, \tag{4-19}$$

с дифференциалом $f : x \mapsto fx$ и когомологиями

$$H^0(K_f) = K/(f) \quad \text{и} \quad H^{-1}(K_f) = \operatorname{Ann} f = \{a \in K \mid af = 0\}.$$

Лемма 4.1
Всякий комплекс K-модулей C вписывается в категории $\mathcal{C}om$ в точную тройку

$$0 \to C \hookrightarrow K_f \otimes C \twoheadrightarrow C[1] \to 0, \tag{4-20}$$

которая производит длинную точную последовательность когомологий

$$\cdots \to H^i(C) \xrightarrow{f} H^i(C) \to H^i(K_f \otimes C) \to H^{i+1}(C) \xrightarrow{f} H^{i+1}(C) \to \cdots$$

со связывающим гомоморфизмом $f : [x] \mapsto [fx]$.

Доказательство. Комплекс $K_f \otimes C$ имеет компонентой степени k прямую сумму

$$\left(K_f^{-1} \otimes C^{k+1}\right) \oplus \left(K_f^0 \otimes C^k\right) = C^{k+1} \oplus C^k.$$

Согласно Кошулеву правилу знаков, дифференциал $f \otimes 1 + 1 \otimes d_C$ действует на эти слагаемые как $1 \otimes c^{k+1} \mapsto f \otimes c^{k+1} - 1 \otimes dc^{k+1}$, $1 \otimes c^k \mapsto 1 \otimes dc^k$. Таким образом, комплекс $K_f \otimes C$ совпадает с конусом морфизма $f : C \to C$, $c \mapsto fc$, и все утверждения вытекают из прим. 4.4 на стр. 70. □

[1] См. прим. 4.4 на стр. 70.
[2] См. формулу (4-17) из прим. 4.4 на стр. 70.

Следствие 4.1
Если $f \in K$ обратим, то комплекс $K_f \otimes C$ ацикличен для любого комплекса C. $\square$

Следствие 4.2
Если f не делит нуль в K-модуле $H(C)$, то $H^i\left(K_f \otimes C\right) \simeq H^i(C)/fH^i(C)$ при всех i. $\square$

4.3.1. Комплекс Кошуля последовательности элементов. Для конечной упорядоченной последовательности элементов $f_1, f_2, \dots, f_m \in K$ тензорное произведение

$$K_{f_1 f_2 \dots f_m} \overset{\text{def}}{=} \bigotimes_{\alpha=1}^{m} K_{f_\alpha}$$

двучленных комплексов (4-19) называется *комплексом Кошуля* последовательности $f_1, f_2, \dots, f_m$. Комплекс $K_{f_1 f_2 \dots f_m}$ сосредоточен в степенях от $-m$ до 0, и его компонента степени $-k$ является прямой суммой $\binom{m}{k}$ свободных модулей ранга один

$$K^{\otimes m} = K \otimes K \otimes \cdots \otimes K \simeq K ,$$

занумерованных последовательностями $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ возрастающих индексов

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant m ,$$

равных номерам тех k из m тензорных сомножителей, что имеют степень -1. Сопоставим базисному вектору $1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$ того произведения, в котором степень -1 имеют в точности k сомножителей, стоящих на местах с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$, грассманов моном $\xi_I = \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k} \in \Lambda^k(K^m)$ из внешней алгебры $\Lambda(K^m)$ свободного K-модуля ранга m с базисом $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$. Таким образом мы изоморфно отображаем компоненту степени $-k$ комплекса $K_{f_1 f_2 \dots f_m}$ на $\Lambda^k(K^m)$. Этот изоморфизм превращает дифференциал комплекса $K_{f_1 f_2 \dots f_m}$ в грассманов дифференциальный оператор[1]

$$\partial = \sum_{\alpha=1}^{m} f_\alpha \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} : \Lambda^k(K^m) \to \Lambda^{k-1}(K^m) , \quad \omega \mapsto \sum_{\alpha=1}^{m} f_\alpha \cdot \partial\omega / \partial\xi_\alpha , \tag{4-21}$$

так что комплекс Кошуля перепишется в виде

$$0 \to \Lambda^m(K^m) \to \Lambda^{m-1}(K^m) \to \cdots \to \Lambda^2(K^m) \to K^m \to K \to 0 , \tag{4-22}$$

где самый правый ненулевой дифференциал ∂ переводит базисный вектор $\xi_i \in K^m$ в элемент $f_i \in K$, так что $\mathrm{im}(\partial : K^m \to K) = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ это идеал, порождённый элементами f_i в K.

Определение 4.4
Последовательность $f_1, f_2, \dots, f_m \in K$ называется *регулярной*, если при каждом i класс элемента f_i не делит нуль в факторе[2] $K/(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})$.

[1] Напомню, что грассмановы частные производные антикоммутируют и подчиняются s-правилу Лейбница, см. раздел 2.5 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/lec-02.pdf.

[2] Для $i = 1$ это означает, что f_1 не делит нуль в K.

Предложение 4.2
Если элементы $f_1, f_2, \ldots, f_m \in K$ образуют регулярную последовательность, то комплекс Кошуля (4-22) имеет $H^0(K_{f_1 f_2 \ldots f_m}) \simeq K\,/\,(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ и ацикличен во всех отрицательных степенях.

Доказательство. Индукция по m с использованием сл. 4.2. □

Следствие 4.3
Если хоть один из элементов f_i обратим в K, то комплекс Кошуля $K_{f_1 f_2 \ldots f_m}$ ацикличен всюду.

Доказательство. Это вытекает из сл. 4.1. □

Пример 4.6 (комплексы Кошуля и Де Рама кольца многочленов)
Возьмём в качестве $K = SV^* \simeq \Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ симметрическую алгебру векторного пространства V^* с базисом $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем $\Bbbk$ и положим $f_i = x_i$. В силу изоморфизма $\Lambda^k(K^n) \simeq \Lambda^k V^* \underset{\Bbbk}{\otimes} SV^*$ комплекс (4-22), дополненный справа фактором $\Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_n]\,/\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \simeq \Bbbk$, можно переписать как сосредоточенный в степенях от $-m$ до $+1$ комплекс свободных SV^*-модулей

$$0 \to \Lambda^m V^* \underset{\Bbbk}{\otimes} SV^* \to \cdots \to \Lambda^2 V^* \underset{\Bbbk}{\otimes} SV^* \to V^* \underset{\Bbbk}{\otimes} SV^* \to SV^* \to \Bbbk \to 0 \tag{4-23}$$

с дифференциалом

$$\begin{gathered} \partial = \sum \frac{\partial}{\partial \xi_i} \otimes x_i : \ \Lambda^k V^* \otimes S^m V^* \to \Lambda^{k-1} V^* \otimes S^{k+1} V^* \\ \omega \otimes f \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_i} \otimes x_i \cdot f\,, \end{gathered} \tag{4-24}$$

где x_i и ξ_i суть базисные векторы пространства V^*, рассматриваемые как образующие симметрической и внешней алгебр пространства V соответственно. Будучи комплексом Кошуля регулярной последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$, комплекс (4-23) ацикличен. Если $\operatorname{char} \Bbbk = 0$, это можно увидеть без предл. 4.2 при помощи следующего гомотопического соображения.

На пространстве[1] $\Lambda V^* \underset{\Bbbk}{\otimes} SV^*$ помимо дифференциала Кошуля, который является гомоморфизмом SV^*-модулей и имеет бистепень $(-1, 1)$ по грассмановым и коммутирующим переменным, имеется хорошо известный из курса анализа *дифференциал Де Рама* d, который является гомоморфизмом ΛV^*-модулей, имеет бистепень $(1, -1)$ и задаётся формулой

$$\begin{gathered} d = \sum \xi_i \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} : \ \Lambda^k V^* \otimes S^m V^* \to \Lambda^{k+1} V^* \otimes S^{k-1} V^* \\ \omega \otimes f \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi_i \wedge \omega \otimes \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{gathered}$$

[1] Известном у физиков как *алгебра полиномиальных суперфункций* на V.

и может восприниматься как $\Bbbk$-линейный эндоморфизмом степени -1 комплекса векторных пространств (4-23).

Упражнение 4.13. Убедитесь, что $d^2 = 0$ и что s-коммутатор $[\partial, d] = \partial d + d\partial$ действует на компоненте $\Lambda^k V^* \otimes S^m V^*$ гомотетией с коэффициентом[1] $(k+m)$.

Из этого упражнения вытекает, что дифференциал Де Рама задаёт гомотопию между нулевым эндоморфизмом комплекса (4-23) и эндоморфизмом $\deg = \partial d + d\partial$, действующим на каждую однородную компоненту $\Lambda^k V^* \otimes S^m V^*$ как $(k+m) \cdot \mathrm{Id}$. Поэтому эндоморфизм $\deg_*$ пространства когомологий комплекса (4-23), умножающий все лежащие в $\Lambda^k V^* \underset{\Bbbk}{\otimes} S^m V^*$ циклы на $k+m$, является нулевым. Таким образом, если $\operatorname{char} \Bbbk = 0$, то нетривиальные циклы в комплексе (4-23) могут быть только в компоненте нулевой степени самого правого дифференциала $\Lambda^0 V^* \underset{\Bbbk}{\otimes} S^0 V^* \to \Bbbk$, равной $\mathrm{Id}_{\Bbbk}$ и тоже не имеющей когомологий. Тем самым, комплекс (4-23) ацикличен. Это рассуждение заодно устанавливает и ацикличность над полем характеристики нуль *комплекса ДеРама*

$$\cdots \xrightarrow{d} S^3 V^* \underset{\Bbbk}{\otimes} \Lambda V^* \xrightarrow{d} S^2 V^* \underset{\Bbbk}{\otimes} \Lambda V^* \xrightarrow{d} V^* \underset{\Bbbk}{\otimes} \Lambda V^* \xrightarrow{d} \Bbbk \to 0$$

который с алгебраической точки зрения представляет собою бесконечный влево комплекс свободных модулей над алгеброй ΛV^*, а в геометрии интерпретируется[2] как комплекс *дифференциальных форм с полиномиальными коэффициентами* на аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$.

4.3.2. Комплекс Кошуля квадратичной алгебры. Предыдущий пример допускает следующее некоммутативное обобщение. Обозначим через $T(V) = \bigoplus\limits_{k \geqslant 0} V^{\otimes k}$ свободную ассоциативную алгебру конечномерного векторного пространства V над полем $\Bbbk$. Градуированная алгебра $A = T(V)/(I)$, являющаяся фактором алгебры $T(V)$ по однородному двустороннему идеалу $(I) \subset T(V)$, порождённому каким-нибудь векторным подпространством $I \subset V \otimes V$, называется *квадратичной алгеброй*. Симметрическая алгебра SV и грассманова алгебра ΛV являются примерами квадратичных алгебр: их идеалы соотношений порождаются линейными оболочками квадратичных тензоров вида $v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1$ и $v \otimes v$ соответственно. Квадратичная алгебра $A^! \stackrel{\text{def}}{=} T(V^*)/(I^\perp)$, где $I^\perp = \operatorname{Ann} I \subset V^* \otimes V^*$, называется *двойственной* к квадратичной алгебре $A = T(V)/(I)$. Обратите внимание, что $A^{!!} \simeq A$.

Упражнение 4.14. Убедитесь, что квадратичные алгебры SV и ΛV^* двойственны друг другу.

Из пары двойственных квадратичных алгебр A и $B = A^!$ можно изготовить ассоциативную алгебру $B \otimes A$, которая как векторное пространство представляет собою тензорное произведение векторных пространств $B \otimes A$ над полем $\Bbbk$, а умножение однородных разложимых тензоров производится с учётом кошулева правила знаков по

[1] Этот факт известен как *теорема Эйлера об однородных суперфункциях*.

[2] При этом буквы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ заменяются традиционными для анализа символами $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$.

формуле $(a_1 \otimes b_1)\cdot(a_2 \otimes b_2) \overset{\text{def}}{=} (-1)^{|a_2||b_1|}(a_1 a_2)\otimes(b_1 b_2)$ и распространяется на все остальные тензоры по линейности.

Упражнение 4.15. Убедитесь, что так определённое умножение корректно определено и ассоциативно.

Тензор $\mathrm{Id}_V \in \operatorname{End} V \simeq V^* \otimes V \subset B \otimes A$ называется *элементом Казимира* алгебры $B \otimes A$ и обозначается $\varkappa$. В двойственных базисах x_i и e_i пространств V^* и V он записывается как $\varkappa = \sum x_i \otimes e_i$.

Упражнение 4.16. Покажите, что $\varkappa^2 = 0$ в алгебре $B \otimes A$.

Тензорное произведение векторных пространств $\mathcal{K} \overset{\text{def}}{=} B \otimes A^*$ является правым $B\otimes A$-модулем, на котором элемент $b \otimes a$ действует оператором $\varrho_b \otimes \lambda_a^*$, где $\varrho_b :\ B \to B$, $\beta \mapsto \beta b$, это оператор правого умножения на b в алгебре B, а $\lambda_a^* :\ A^* \to A^*$, это оператор, двойственный к оператору $\lambda_a :\ A \to A$, $\alpha \mapsto a\alpha$, левого умножения на a в алгебре A. В силу упр. 4.16 правое действие оператора Казимира $\varkappa$ задаёт на $\mathcal{K}$ структуру комплекса векторных пространств[1]. Он называется *комплексом Кошуля* квадратично двойственных алгебр A и B. В терминах двойственных базисов $x_i \in V^*$ и $e_i \in V$ действие дифференциала задаётся формулой

$$\partial :\ b \otimes \alpha \mapsto \sum_i (b \cdot x_i) \otimes (e_i \llcorner \alpha),$$

где $\alpha \in T(V^*)$ рассматривается как полилинейная форма на пространстве V, и $e_i \llcorner \alpha$ означает подстановку вектора e_i в её первый аргумент.

Упражнение 4.17. Убедитесь, что для двойственных квадратичных алгебр $A = S(V)$ и $B = \Lambda(V^*)$ оператор Казимира $\varkappa$ переводит $\Lambda^k V^* \otimes S^m V^*$ в $\Lambda^{k-1} V^* \otimes S^{k+1} V^*$, и его действие на этой однородной компоненте связано с кошулевым дифференциалом ∂ из форм. (4-24) на стр. 74 соотношением $\varkappa = m^{-1}\partial$.

Квадратичная алгебра A называется *кошулевой*, если комплекс Кошуля $\mathcal{K}$ точен.

Упражнение 4.18* (кошулева двойственность). Покажите, что кошулевость квадратичной алгебры A равносильна кошулевости двойственной ей квадратичной алгебры $B = A^!$.

4.4. Спектральные последовательности. Рассмотрим последовательность таблиц $E_0, E_1, E_2, \dots$, клетки которых занумерованы целыми числами $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ так, что p увеличивается по горизонтали, а q по вертикали. Если при каждом r

- в клетках таблицы E_r располагаются модули $E_r^{p,q}$ и задан дифференциал d_r бистепени $(r, 1-r)$ по (p, q), действующий из клеток диагонали $p+q = n$ в клетки следующей диагонали $p + q = n + 1$ со сдвигом на r единиц вправо:

$$d_r :\ E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+1-r}, \quad d_r^2 = 0$$

- очередная таблица E_{r+1} состоит из когомологий предыдущей таблицы E_r:

$$E_{r+1}^{p,q} = \ker\left(d_r :\ E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+1-r}\right) / d_r\left(E_r^{p-r,q-1+r}\right)$$

[1] И даже B-A-бимодулей.

то говорят, что эти таблицы образуют *спектральную последовательность*[1] *когомологического типа*[2]. Скажем, что спектральная последовательность *стабилизируется*, если содержимое каждой клетки с какого-то момента перестаёт меняться, т. е.

$$\forall\,(p,q)\ \exists\, N = N(p,q)\ :\ \forall\, r \geqslant N \quad d_r\left(E_r^{p,q}\right) = 0 \quad \text{и} \quad d_r\left(E_r^{p-r,q+r-1}\right) = 0\,. \tag{4-25}$$

Например, такое заведомо происходит, когда в одной из таблиц E_r на каждой диагонали $p+q=\mathrm{const}$ имеется лишь конечное число ненулевых модулей. Если спектральная последовательность стабилизируется, то модуль $E_r^{p,q}$ с $r \geqslant N(p,q)$ из условия (4-25) обозначается $E_\infty^{p,q}$ и называется *предельным*. В этой ситуации говорят, что спектралка *сходится* к градуированным модулям $E_\infty^n \overset{\text{def}}{=} \bigoplus\limits_{p+q=n} E_\infty^{p,q}$ и пишут $E_r^{p,q} \Rightarrow E_\infty^n$. Спектральные последовательности являются основным инструментом для получения информации о когомологиях комплексов, тем или иным способом «собранных» из более элементарных комплексов.

Предложение 4.3 (спектральная последовательность фильтрованного комплекса) Пусть комплекс C обладает такой убывающей системой подкомплексов[3] $F^pC \subseteq C$,

$$C \supseteq \dots \supseteq F^{p-1}C \supseteq F^pC \supseteq F^{p+1}C \supseteq \dots \supseteq 0\,, \tag{4-26}$$

что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ подмодули F^pC^n совпадают с C^n при всех $p \ll 0$ и зануляются при всех $p \gg 0$. Тогда существует спектральная последовательность с

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}\left(\mathrm{Gr}^p C\right)\,, \quad \text{где} \quad \mathrm{Gr}^p C \overset{\text{def}}{=} F^pC\,/\,F^{p+1}C\,,$$

сходящаяся к присоединённым факторам $\mathrm{Gr}^p H^{p+q}(C) \overset{\text{def}}{=} F^pH^{p+q}(C)/F^{p+1}H^{p+q}(C)$ убывающей фильтрации $F^\bullet H(C)$ на модуле когомологий $H(C)$, относящей в подмодуль $F^pH(C) \subseteq H(C)$ все коциклы, лежащие в подкомплексе F^pC, по модулю всех попавших в этот подкомплекс кограниц.

Доказательство. Расположим в столбцах таблицы E_0 фактор комплексы Gr^pC так, чтобы дифференциал комплекса C действовал в них снизу вверх, а присоединённые факторы каждого модуля C^n из комплекса C располагались на диагонали $p+q=n$, т. е. положим $E_0^{p,q} = \mathrm{Gr}^pC^{p+q}$. Обозначим через $\pi :\ F^pC \twoheadrightarrow \mathrm{Gr}^pC$ каноническую проекцию с ядром $F^{p+1}C$, и для каждого r рассмотрим в модуле F^pC^{p+q}, который накрывает $E_0^{p,q}$ при этой проекции, подмодуль

$$Z_r^{p,q} = \{c \in F^pC^{p+q} \mid dc \in F^{p+r}C^{p+q}\}\,.$$

При $r \to \infty$ он аппроксимирует «снаружи» лежащие в F^pC^{p+q} коциклы дифференциала d в том смысле, что с ростом r кограницы элементов из $Z_r^{p,q}$ оказываются во всё

[1] В просторечии — *спектралку*.

[2] Согласно договорённостям из n° 4.1.2, в спектралке *гомологического типа* таблицы нумеруются верхним индексами: $E^0, E^1, E^2, \dots$ и заполняются модулями $E^r_{p,q}$ с дифференциалами $\partial_r :\ E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ бистепени $(-r, r-1)$, бьющими из клеток диагонали $p+q=n$ в клетки предыдущей диагонали $p+q=n-1$ со сдвигом на r единиц в влево.

[3] Это означает, что $d_C(F^pC) \subset F^pC$ при всех $p \in \mathbb{Z}$.

более глубоких стратах фильтрации и полностью зануляются при $r \gg 0$. В том же самом смысле когранницы дифференциала d, лежащие в F^pC^{p+q}, аппроксимируются «изнутри» подмодулями $dF^{p-r}C^{p+q} \cap F^pC^{p+q} = dZ_r^{p-r,q+r-1}$, которые содержатся в подмодуле всех когранниц $dC^{p+q-1} \cap F^pC^{p+q}$ и совпадают с ним при $r \gg 0$.

Приступим к построению спектралки. Ядро выходящего из клетки (p, q) дифференциала $d : E_0^{p,q} \to E_0^{p,q+1}$ равно $\pi Z_1^{p,q}$, а образ входящего в неё дифференциала $d : E_0^{p,q-1} \to E_1^{p,q}$ равен $\pi dZ_0^{p,q-1}$. Тем самым, таблица когомологий $E_1 = H(E_0)$ имеет в этой клетке модуль

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(\mathrm{Gr}^p C) = \frac{\pi Z_1^{p,q}}{\pi dZ_0^{p,q-1}} \simeq \frac{Z_1^{p,q} + F^{p+1}C^{p+q}}{dZ_0^{p,q-1} + F^{p+1}C^{p+q}} \simeq$$
$$\simeq \frac{Z_1^{p,q}}{dZ_0^{p,q-1} + (Z_1^{p,q} \cap F^{p+1}C^{p+q})} \simeq \frac{Z_1^{p,q}}{dZ_0^{p,q-1} + Z_0^{p+1,q-1}}$$

(в последних двух переходах мы воспользовались перечисленными в упр. 4.19 ниже стандартными соображениями из линейной алгебры, включением $dZ_0^{p,q-1} \subset Z_1^{p,q}$ и равенством $Z_1^{p,q} \cap F^{p+1}C^{p+q} = Z_0^{p+1,q-1}$).

Упражнение 4.19. Покажите, что во всяком модуле для любых подмодулей V и $W \supset U$ имеют место равенство $W \cap (U + V) = U + (W \cap V)$ и естественные изоморфизмы

$$\frac{W+V}{V} \simeq \frac{W}{V \cap W} \quad \text{и} \quad \frac{W+V}{U+V} \simeq \frac{W}{U + (V \cap W)}\,.$$

Поскольку $dZ_1^{p,q} \subset Z_1^{p+1,q}$ и $d^2 = 0$, дифференциал комплекса C корректно факторизуется до дифференциала бистепени $(1, 0)$ на таблице E_1

$$d : E_1^{p,q} = \frac{Z_1^{p,q}}{dZ_0^{p,q-1} + Z_0^{p+1,q-1}} \to \frac{Z_1^{p+1,q}}{dZ_0^{p+1,q-1} + Z_0^{p+2,q-1}} = E_1^{p+1,q}\,.$$

Следующие таблицы $E_2, E_3, \dots$ строятся дословно также. Для каждого r положим

$$E_r^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi Z_r^{p,q}}{\pi dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}} \simeq \frac{Z_r^{p,q} + F^{p+1}C^{p+q}}{dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} + F^{p+1}C^{p+q}} \simeq \frac{Z_r^{p,q}}{dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}$$

(мы пользуемся тем, что $dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} \subset Z_r^{p,q}$ и $Z_r^{p,q} \cap F^{p+1}C^{p+q} = Z_{r-1}^{p+1,q-1}$). Поскольку $dZ_r^{p,q} \subset Z_r^{p+r,q-r+1}$ и $d^2 = 0$, дифференциал d комплекса C корректно факторизуется до дифференциала бистепени $(p, 1-p)$ на таблице E_r:

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \simeq \frac{Z_r^{p,q}}{dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}} \to \frac{Z_r^{p+r,q-r+1}}{dZ_{r-1}^{p+1,q-1} + Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}} \simeq E_r^{p+r,q-r+1}\,,$$

ядро которого изоморфно фактору подмодуля $\{c \in Z_r^{p,q} \mid dc \in dZ_{r-1}^{p+1,q-1} + Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}\}$ по его пересечению с $dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}$. Поскольку $Z_{r-1}^{p+1,q-1} \subset Z_r^{p,q}$, все элементы $c \in Z_r^{p,q}$ с $dc \in dZ_{r-1}^{p+1,q-1}$ попадают в нулевой класс, а так как элементы $c \in Z_r^{p,q}$ с $dc \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}$ составляют подмодуль $Z_{r+1}^{p,q} \subset Z_r^{p,q}$, этот фактор изоморфен

$$\frac{Z_{r+1}^{p,q}}{Z_{r+1}^{p,q} \cap \left(dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}\right)}\,.$$

Снова пользуясь тем, что $dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} \subset Z_{r+1}^{p,q}$ и $Z_{r+1}^{p,q} \cap Z_{r-1}^{p+1,q-1} = Z_r^{p+1,q-1}$, получаем

$$\ker d_r^{p,q} \simeq \frac{Z_{r+1}^{p,q}}{dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} + Z_r^{p+1,q-1}}\,. \tag{4-27}$$

Образ приходящего в клетку (p,q) дифференциала $d_r^{p-r,q+r-1}\colon E_r^{p-r,q+r-1} \to E_r^{p,q}$ имеет вид $dZ_r^{p-r,q+r-1} / dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}$. Факторизуя по нему ядро (4-27) получаем

$$H^{p,q}(E_r) \simeq \frac{Z_{r+1}^{p,q}}{dZ_r^{p-r,q+r-1} + Z_r^{p+1,q-1}} \simeq E_{r+1}^{p,q}\,.$$

Таким образом, таблицы E_r образуют спектральную последовательность с нужным E_1. Модули, из которых состоят все таблицы E_r, являются подфакторами в C, и дифференциалы во всех таблицах являются корректно определёнными ограничениями дифференциала d комплекса C на эти подфакторы.

Наложенные на фильтрацию $F^\bullet C$ условия гарантируют, что на каждой диагонали таблицы E_0 имеется лишь конечное число ненулевых модулей. Поэтому спектральная последовательность E_r сходится к градуированным модулям $E_\infty^n = \bigoplus_{p+q=n} E_\infty^{p,q}$ с компонентами

$$E_\infty^{p,q} = \frac{\pi\{c \in F^pC^{p+q} \mid dc = 0\}}{\pi\{c \in C^{p+q-1} \mid dc \in F^pC^{p+q}\}} \simeq \mathrm{Gr}^p H^{p+q}(C)\,,$$

что и утверждалось. □

Пример 4.7 (двучленная фильтрация)
Точная тройка комплексов $0 \to U \to V \to W \to 0$ задаёт на среднем комплексе V двучленную фильтрацию $V = F^0V \supset U = F^1V \supset 0 = F^2V$ с присоединёнными факторами $\mathrm{Gr}^0V = V/U = W$ и $\mathrm{Gr}^1V = U/0 = U$. В этом случае таблица E_1 спектральной последовательности из предл. 4.3 сосредоточена в двух столбцах $p = 0, 1$ и имеет вид

$$\begin{array}{c}
H^{q+1}(W) \xrightarrow{d_V} H^{q+2}(U) \\[2em]
H^{q}(W) \xrightarrow{d_V} H^{q+1}(U) \\[2em]
H^{q-1}(W) \xrightarrow{d_V} H^{q}(U) \\[2em]
H^{q-2}(W) \xrightarrow{d_V} H^{q-1}(U)\,,
\end{array}$$

где каждая горизонтальная стрелка переводят являющийся d_W-коциклом класс элемента $v \in V$ в факторе $W = V/U$ в когомологический класс элемента $d_V v$, т. е. совпадает со связывающим гомоморфизмом[1] δ из длинной точной последовательности

[1] См. предл. 4.1 на стр. 70.

когомологий точной тройки $0 \to U \to V \to W \to 0$. Таблица $E_2 = H(E_1)$ уже является предельной таблицей E_∞ и состоит из присоединённых факторов индуцированной двучленной фильтрации на $H(V)$, т. е. при каждом n мы имеем точную тройку

$$\operatorname{coker}\left(H^{n-1}(W) \xrightarrow{\delta} H^n(U)\right) \hookrightarrow H^n(V) \twoheadrightarrow \ker\left(H^n(W) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(U)\right),$$

что несёт ровно ту же информацию об $H(V)$, что и длинная точная последовательность когомологий $\cdots \to H^{n-1}(W) \xrightarrow{\delta} H^n(U) \to H^n(V) \to H^n(W) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(U) \to \cdots$.

4.4.1. Спектральные последовательности бикомплекса. Тотальный комплекс[1]

$$C^n = \operatorname{Tot}^n(V) = \bigoplus_{p+q=n} V^{p,q}$$

каждого бикомплекса $V = V^{p,q}$ обладает двумя симметричными фильтрации, которые получаются одна из другой отражением $p \leftrightarrow q$ относительно диагонали $p = q$. Первая из этих фильтраций имеет

$$F^p \operatorname{Tot}^n(V) \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{\nu \geqslant p} V^{\nu, n-\nu} \tag{4-28}$$

и индуцирует на $H^n(\operatorname{Tot}(V))$ убывающую фильтрацию, присоединённые градуированные факторы которой можно вычислять при помощи спектральной последовательности из предл. 4.3. Поскольку горизонтальная компонента $d_1 : V^{p,q} \to V^{p+1,q}$ дифференциала тотального комплекса аннулирует присоединённые факторы фильтрации (4-28), дифференциал $d = d_1 + d_2$ действует на них только своей вертикальной компонентой $d_2 : V^{p,q} \to V^{p,q+1}$. Поэтому стартовая таблица E_0 спектралки, связанной фильтрацией (4-28), образована комплексами-столбцами $V^{p,*}$ бикомплекса V. Следующая таблица $E_1 = H(E_0)$ состоит из когомологий $E_1^{p,q} = H^q_{d_2}(V^{p,*})$ дифференциала d_2, и d действует на них как d_1.

Упражнение 4.20. Убедитесь, что всякий антикоммутирующий с дифференциалами d_U, d_W комплексов U, W морфизм $\varphi \in \operatorname{Hom}^0_{\mathrm{DG}}(U, W)$ также, как и морфизм комплексов, корректно задаёт морфизм когомологий $\varphi_* : H(U) \to H(W)$.

Таким образом, таблица E_2 состоит из модулей когомологий $E_2^{p,q} = H^p_{d_1}\left(H^q_{d_2}(V)\right)$ дифференциала d_1, действующего на когомологиях дифференциала d_2.

Вторая убывающая фильтрация на $\operatorname{Tot}^n(V)$ получается из первой перестановкой букв p, q и имеет

$$F^q \operatorname{Tot}^n(V) = \bigoplus_{\nu \geqslant q} V^{n-\nu, \nu}.$$

С нею связана спектралка с дифференциалами $E_r^{p,q} \to E_r^{p-r+1,q+r}$, которые наклоняются с ростом r влево и вверх, симметрично относительно диагонали $p = q$ тому, как вели себя дифференциалы первой спектралки, а в клетке (p, q) её второй таблицы стоят $H^p_{d_2}\left(H^q_{d_1}(V)\right)$. Чтобы сделать индексацию и поведение дифференциалов стандартными, какими они были описаны в начале n° 4.4 на стр. 76, следует ещё раз поменять местами буквы p и q. Получаем

[1]См. n° 4.1.3 на стр. 67.

Предложение 4.4
С каждым бикомплексом V связаны две спектральные последовательности с E_2-членами

$$ {}^{I}E_2^{p,q} = H^p_{d_1}\left(H^q_{d_2}(V)\right) \quad \text{и} \quad {}^{II}E_2^{p,q} = H^p_{d_2}\left(H^q_{d_1}(V)\right). \tag{4-29}$$

Если на каждой диагонали $p+q=\mathrm{const}$ бикомплекса V имеется лишь конечное число ненулевых модулей $V^{p,q}$, обе спектралки сходятся к присоединённым градуированным факторам некоторых убывающих с ростом p фильтраций на $H^{p+q}(\mathrm{Tot}(V))$. □

4.4.2. Спектральная последовательность точной пары. Наиболее общим источником спектралок являются точные в каждом члене диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}, \tag{4-30}$$

называемые *точными парами*[1]. Композиция $d \overset{\text{def}}{=} jk : E \to E$ имеет $d^2 = jkjk = 0$ и называется *дифференциалом* точной пары (4-30). Диаграмма

$$\begin{tikzcd} iD \arrow[rr, "i"] & & iD \arrow[dl, "j_1"] \\ & H(E) \arrow[ul, "k_1"] & \end{tikzcd},$$

в которой $H(E) = \ker d/\operatorname{im} d$, $j_1 : i(x) \mapsto j(x)$, $k_1 : [x] \mapsto k(x)$, называется *производной* от точной пары (4-30).

Упражнение 4.21. Убедитесь, что морфизмы j_1, k_1 определены корректно и производная тоже является точной парой.

Модуль $H(E)$ в производной паре является подфактором исходного модуля E:

$$H(E) = \ker(jk)/\operatorname{im}(jk) = k^{-1}(\ker j)/j(\operatorname{im} k) = k^{-1}(\operatorname{im} i)/j(\ker i).$$

Повторяя эти рассуждения m раз, приходим к m-той производной паре от (4-30)

$$\begin{tikzcd} i^m D \arrow[rr, "i"] & & i^m D \arrow[dl, "j_m"] \\ & E_m \arrow[ul, "k_m"] & \end{tikzcd},$$

где $E_m = H(E_{m-1}) \simeq k^{-1}(\operatorname{im} i^m)/j(\ker i^m)$ является подфактором модуля E из исходной пары (4-30), морфизм $k_m : [x] \mapsto k(x)$ является (корректно определённым) ограничением исходного морфизма k на этот подфактор, а $j_m = ji^{-m} : i^m(x) \mapsto j(x)$.

Если точная пара (4-30) образована биградуированными модулями

$$D = \bigoplus D^{p,q}, \quad E = \bigoplus E^{p,q}$$

а морфизмы i, j, k однородны бистепеней $|i| = (-1,1)$, $|j| = (0,0)$, $|k| = (1,0)$, как на диаграмме:

[1] По-английски *exact couple*.

$$\begin{tikzcd}
D^{p-1,q+2} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q+2} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q+2} \arrow[r, "j"] & E^{p,q+2} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q+2} \arrow[r, "j"] & E^{p+1,q+2} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q+2} \\
D^{p-1,q+1} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q+1} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q+1} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p,q+1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q+1} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p+1,q+1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q+1} \arrow[ull, "i"] \\
D^{p-1,q} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p,q} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p+1,q} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q} \arrow[ull, "i"] \\
D^{p-1,q-1} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q-1} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q-1} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p,q-1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q-1} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p+1,q-1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q-1} \arrow[ull, "i"]
\end{tikzcd}$$

Рис. 4◇1. Биградуированная точная пара.

то размещая модули $E^{p,q}$ в клетки таблицы E_1, а их последовательные производные — в следующие таблицы E_2, E_3, … , мы получим спектральную последовательность, имеющую $E_1 = E$ и для всех последующих $r \geqslant 2$

$$E_r^{p,q} \simeq k^{-1}\left(i^{r-1}D^{p+r-1,q-r+1}\right) / \, j\left(\ker(i^{r-1}|_{D^{p,q}})\right) \tag{4-31}$$

с дифференциалом $d_r = j_{r-1}k_{r-1} = ji^{1-r}k : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$, переводящим класс $[e] \in k^{-1}\left(i^{r-1}D^{p+r-1,q-r+1}\right)$ элемента $e \in E$ с $k(e) = i^{r-1}(x)$ в класс $[j(x)]$ элемента $j(x) \in E$.

Пример 4.8 (фильтрованные комплексы)
Если у комплекса C имеется убывающая фильтрация подкомплексами $F^pC \subset C$, то точные тройки комплексов $0 \to F^{p+1}C \xrightarrow{\iota} F^pC \xrightarrow{\pi} \mathrm{Gr}^pC \to 0$ производят длинные точные последовательности когомологий

$$\dots \xrightarrow{\delta} H^n(F^{p+1}C) \xrightarrow{\iota_*} H^n(F^pC) \xrightarrow{\pi_*} H^n(\mathrm{Gr}^pC) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(F^{p+1}C) \xrightarrow{\iota_*} \dots$$

которые собираются в точную пару биградуированных модулей

$$E^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} H^{p+q}\left(\mathrm{Gr}^pC\right), \quad D^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} H^{p+q}\left(F^pC\right)$$

и однородных морфизмов

$$\begin{aligned}
i \stackrel{\text{def}}{=} \iota_* &: H^{p+q}(F^pC) \to H^{p+q}(F^{p-1}C)\\
j \stackrel{\text{def}}{=} \pi_* &: H^{p+q}(F^pC) \to H^{p+q}(\mathrm{Gr}^pC)\\
k \stackrel{\text{def}}{=} \delta &: H^{p+q}(\mathrm{Gr}^pC) \to H^{p+q+1}(F^{p+1}C)
\end{aligned}$$

бистепеней $|i| = (-1,1)$, $|j| = (0,0)$ и $|k| = (1,0)$, как в диаграмме на предыдущей странице. Спектральная последовательность этой точной пары имеет

$$E_r^{p,q} \simeq \frac{\delta^{-1}\,\mathrm{im}\left(i^{r-1} : H^{p+q+1}(F^{p+r}C) \to H^{p+q+1}(F^pC)\right)}{\pi_*\ker\left(i^{r-1} : H^{p+q}(F^pC) \to H^{p+q}(F^{p-r+1}C)\right)}\,. \tag{4-32}$$

Поскольку связывающий гомоморфизм $\delta : H^{p+q}(F^pC \,/\, F^{p+1}C) \to H^{p+q+1}(F^{p+r}C)$ задаётся дифференциалом $d : C \to C$, числитель в (4-32) состоит из классов π-образов элементов $c \in F^pC^{p+q}$ с $dc \in F^{p+r}C^{p+q+1}$ по модулю πdF^pC^{p+q-1}, т. е. в обозначениях из доказательства предл. 4.3 на стр. 77 равен $\pi Z_r^{p,q}$. Знаменатель в (4-32) состоит из π_*-образов классов когомологий тех коциклов $c \in F^{p+1}C^{p+q+1}$ которые лежат в $dF^{p-r+1}C^{p+q}$, и стало быть, изоморфен $\pi dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}$. Таким образом, при каждом $r \geqslant 1$ таблица E_r спектралки (4-32) состоит из тех же подфакторов в C, что и таблица E_r у спектралки из предл. 4.3. Поскольку дифференциалы обеих таблиц являются ограничениями дифференциала $d : C \to C$ на эти подфакторы, спектральные последовательности совпадают друг с другом, начиная с таблицы E_1.

Предложение 4.5
Пусть в представленной на рис. 4◇1 биградуированной точной паре при каждом n модули $D^{p,q}$ с $p+q=n$ зануляются при всех $p \gg 0$ и становятся равными одному и тому же модулю H^n при $p \ll 0$, причём при этих p все морфизмы $i : D^{p,q} \to D^{p-1,q+1}$ между модулями H^n тождественны. Тогда спектральная последовательность такой точной пары сходится к присоединённым градуированным факторам убывающих фильтраций на модулях H^n подмодулями $F^pH^n = i^{m(p,n)}(D^{p,n-p})$, где степень $m(p,n)$ настолько велика, чтобы $i^{m(p,n)}$ отображал $D^{p,n-p}$ в H^n.

Доказательство. Согласно форм. (4-31) на стр. 82 при фиксированных p, q и $r \gg 0$

$$E_r^{p,q} \simeq \frac{k^{-1}\left(i^{r-1}D^{p+r-1,q-r+1}\right)}{j\left(\ker(i^{r-1}|_{D^{p,q}})\right)} \simeq \frac{k^{-1}(0)\cap D^{p,q}}{j\ker\left(i^{m(p,n)} : D^{p,q} \to H_n\right)} \simeq$$

$$\simeq \frac{\ker(k : E_r^{p,q} \to D^{p+1,q})}{j\ker i^{m(p,n)}} \simeq \frac{jD^{p,q}}{j\ker i^{m(p,n)}} \simeq \frac{D^{p,q}}{\ker i^{m(p,n)}} \simeq \operatorname{im} i^{m(p,n)}.$$

□

4.5. Отмеченные треугольники. Бесконечная в обе стороны 3-периодическая последовательность морфизмов[1] в гомотопической категории комплексов $\mathcal{H}o$

$$\cdots \xrightarrow{\beta[-1]} C[-1] \xrightarrow{\gamma[-1]} A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} A[1] \xrightarrow{\alpha[1]} B[1] \xrightarrow{\beta[1]} \cdots$$

называется *треугольником* и обозначается $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} A[1]$. Морфизм между треугольниками $A_1 \xrightarrow{\alpha_1} B_1 \xrightarrow{\beta_1} C_1 \xrightarrow{\gamma_1} A_1[1]$ и $A_2 \xrightarrow{\alpha_2} B_2 \xrightarrow{\beta_2} C_2 \xrightarrow{\gamma_2} A_2[1]$ это такая тройка стрелок $\alpha : A_1 \to A_2$, $\beta : B_1 \to B_2$, $\gamma : C_1 \to C_2$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\beta"'] & C_1 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "\gamma"'] & A_1[1] \arrow[d, "\alpha[1]"'] \\
A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & C_2 \arrow[r, "\gamma_2"] & A_2[1]
\end{tikzcd}$$

[1] Напомню (см. опр. 4.2 на стр. 70), что функтор сдвига $X \mapsto X[1]$ тождественно действует на морфизмах, но комплекс $X[1]$ имеет $d_{X[1]} = -d_X$ и $X[1]^\nu = X^{\nu+1}$.

коммутативна в категории $\mathcal{H}o$. Если все вертикальные стрелки являются изоморфизмами в категории $\mathcal{H}o$, то треугольники называются *изоморфными*. Треугольник называется *отмеченным* или *точным*[1], если он изоморфен треугольнику вида

$$U \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\iota_\varphi} \operatorname{Con}\varphi \xrightarrow{\pi_\varphi} U[1]\,, \tag{4-33}$$

где $\varphi : U \to W$ — произвольный морфизм комплексов, а стрелки ι_φ и π_φ суть вложение и проекция из построенной в прим. 4.4 на стр. 70 точной в категории $\mathcal{C}om$ тройки

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{\iota_\varphi} \operatorname{Con}\varphi \xrightarrow{\pi_\varphi} U[1] \longrightarrow 0\,. \tag{4-34}$$

Например, треугольник $X \xrightarrow{\mathrm{Id}} X \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} X[1]$ точен, поскольку согласно упр. 4.12 на стр. 72 диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}"'] & X \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}"'] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & X[1] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}"'] \\
X \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & X \arrow[r, "\iota_{\mathrm{Id}}"] & \operatorname{Con}\mathrm{Id} \arrow[r, "\pi_{\mathrm{Id}}"] & X[1]
\end{tikzcd}$$

коммутативна в категории $\mathcal{H}o$ и нулевая вертикальная стрелка в ней, как мы видели в прим. 4.5 на стр. 72, является в категории $\mathcal{H}o$ изоморфизмом.

Точные треугольники вида (4-33) называются *стандартными*. Каждый морфизм комплексов $\varphi : U \to W$ включается в стандартный точный треугольник, и любой коммутативный квадрат продолжается до морфизма стандартных треугольников:

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\psi'"] & W_1 \arrow[d, "\psi''"] \\
U_2 \arrow[r, "\varphi_2"] & W_2
\end{tikzcd}
\quad\Rrightarrow\quad
\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\psi'"] & W_1 \arrow[r, "\iota_{\varphi_1}"] \arrow[d, "\psi''"] & \operatorname{Con}\varphi_1 \arrow[r, "\pi_{\varphi_1}"] \arrow[d, "\psi''\oplus\psi'[1]"] & U_1[1] \arrow[d, "\psi'[1]"] \\
U_2 \arrow[r, "\varphi_2"] & W_2 \arrow[r, "\iota_{\varphi_2}"] & \operatorname{Con}\varphi_2 \arrow[r, "\pi_{\varphi_2}"] & U_2[1]\,.
\end{tikzcd}$$

Так как всякий точный треугольник изоморфен стандартному, любой коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\psi'"] & B_1 \arrow[d, "\psi''"'] \\
A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] & B_2\,,
\end{tikzcd}$$

построенный на начальных стрелках любых двух отмеченных треугольников

$$A_1 \xrightarrow{\alpha_1} B_1 \xrightarrow{\beta_1} C_1 \xrightarrow{\gamma_1} A_1[1] \quad \text{и} \quad A_2 \xrightarrow{\alpha_2} B_2 \xrightarrow{\beta_2} C_2 \xrightarrow{\gamma_2} A_2[1]\,,$$

всегда продолжается некоторой стрелкой[2] $\psi : C_1 \to C_2$ до морфизма треугольников.

[1]Этот термин вовсе не означает, что ядра какой-нибудь стрелки равно образу предыдущей.
[2]Вообще говоря, не единственной.

Предложение 4.6 (точная последовательность когомологий)
В абелевой категории $\mathcal{A}$ точна бесконечная в обе последовательность когомологий

$$\cdots \xrightarrow{\gamma_*} H^i(A) \xrightarrow{\alpha_*} H^i(B) \xrightarrow{\beta_*} H^i(C) \xrightarrow{\gamma_*} H^{i+1}(A) \xrightarrow{\alpha_*} \cdots \tag{4-35}$$

каждого точного в гомотопической категории комплексов $\mathcal{Ho}(\mathcal{A})$ треугольника

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} A[1]\,.$$

Доказательство. В прим. 4.4 на стр. 70 мы видели, что для стандартного точного треугольника $U \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\iota_\varphi} \operatorname{Con}\varphi \xrightarrow{\pi_\varphi} U[1]$ последовательность (4-35) представляет собою длинную точную последовательность когомологий для точной в абелевой категории $\mathcal{Com}(\mathcal{A})$ тройки комплексов $0 \longrightarrow W \xrightarrow{\iota_\varphi} \operatorname{Con}\varphi \xrightarrow{\pi_\varphi} U[1] \longrightarrow 0$. Функтор

$$H^0 : \mathcal{Ho}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}\,, \quad V \mapsto H^0(V)\,,$$

переводит каждую бесконечную в обе стороны коммутативную в категории $\mathcal{Ho}(\mathcal{A})$ диаграмму треугольников

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "{\gamma[-1]}"] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\psi"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\psi'"] & C \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\psi''"] & A[1] \arrow[r, "{\alpha[1]}"] \arrow[d, "{\psi[1]}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "{\pi_\varphi[-1]}"] & U \arrow[r, "\varphi"] & W \arrow[r, "\iota_\varphi"] & \operatorname{Con}\varphi \arrow[r, "\pi_\varphi"] & U[1] \arrow[r, "{\varphi[1]}"] & \cdots,
\end{tikzcd}$$

вертикальные стрелки которой являются изоморфизмами в категории $\mathcal{Ho}(\mathcal{A})$, в бесконечную в обе стороны коммутативную диаграмму в категории $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\beta_*"] & H^{i-1}(C) \arrow[r, "\gamma_*"] \arrow[d, "\psi''_*"] & H^i(A) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "\psi_*"] & H^i(B) \arrow[r, "\beta_*"] \arrow[d, "\psi'_*"] & H^i(C) \arrow[r, "\gamma_*"] \arrow[d, "\psi''_*"] & H^{i+1}(A) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "\psi_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\iota_{\varphi*}"] & H^{i-1}(\operatorname{Con}\varphi) \arrow[r, "\pi_{\varphi*}"] & H^i(U) \arrow[r, "\varphi_*"] & H^i(W) \arrow[r, "\iota_{\varphi*}"] & H^i(\operatorname{Con}\varphi) \arrow[r, "\pi_{\varphi*}"] & H^{i+1}(U) \arrow[r, "\varphi_*"] & \cdots,
\end{tikzcd}$$

все вертикальные стрелки которой изоморфизмы, а нижняя строка точна. Поэтому и верхняя строка точна. □

Предложение 4.7
Если треугольник $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} A[1]$ точен, то точны также треугольники

$$B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} A[1] \xrightarrow{-\alpha[1]} B[1] \quad \text{и} \quad C[-1] \xrightarrow{-\gamma[-1]} A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C\,.$$

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для стандартного треугольника

(4-33), т. е. построить коммутативные в категории $\mathcal{Ho}$ диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\iota_\varphi"] \arrow[d, equal] & \operatorname{Con}\varphi \arrow[r, "\pi_\varphi"] \arrow[d, equal] & U[1] \arrow[r, "-\varphi[1]"] \arrow[d, shift left, "\nu'"] & W[1] \arrow[d, equal] \\
W \arrow[r, "\iota_\varphi"] & \operatorname{Con}\varphi \arrow[r, "\iota_{\iota_\varphi}"] & \operatorname{Con}\iota_\varphi \arrow[r, "\pi_{\iota_\varphi}"] \arrow[u, shift left, "\nu''"] & W[1]
\end{tikzcd}
\tag{4-36}
$$

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "-\varphi"] \arrow[d, equal] & W \arrow[r, "\iota_\varphi"] \arrow[d, shift left, "\omega'"] & \operatorname{Con}\varphi[-1] \arrow[r, "\pi_\varphi"] \arrow[d, equal] & U[1] \arrow[d, equal] \\
U \arrow[r, "\iota_{\pi_f}[-1]"] & \operatorname{Con}\pi_\varphi[-1] \arrow[r, "\pi_{\pi_\varphi}[-1]"] \arrow[u, shift left, "\omega''"] & \operatorname{Con}\varphi \arrow[r, "\pi_\varphi"] & U[1]
\end{tikzcd}
\tag{4-37}
$$

на которых стрелки ν', ν'', а также стрелки ω', ω'' являются обратными друг другу изоморфизмами в категории $\mathcal{Ho}$. Как градуированные модули,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Con}\pi_\varphi[-1] &= \operatorname{Con}\varphi \oplus U[-1] = U[1] \oplus W \oplus U \\
\operatorname{Con}\iota_\varphi &= W[1] \oplus \operatorname{Con}(\varphi) = W[1] \oplus U[1] \oplus W\,,
\end{aligned}
$$

и при таком разложении их дифференциалы имеют матрицы[1]

$$
d_{\operatorname{Con}\pi_\varphi[-1]} = \begin{pmatrix} -d_U & 0 & 0 \\ \varphi & d_W & 0 \\ -1_U & 0 & d_U \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad d_{\operatorname{Con}\iota_\varphi} = \begin{pmatrix} -d_W & 0 & 0 \\ 0 & -d_U & 0 \\ 1_W & \varphi & d_W \end{pmatrix}.
$$

Таким образом, W является подкомплексом в $\operatorname{Con}\pi_\varphi[-1]$, и $\operatorname{Con}\pi_\varphi[-1]/W \simeq \operatorname{Con}(-\mathrm{Id}_U)$. Симметричным образом, $U[1]$ является фактором комплекса $\operatorname{Con}\iota_\varphi$ по подкомплексу $\operatorname{Con}\mathrm{Id}_W$. Возьмём в качестве искомых ω' и ν'' соответствующие вложение и проекцию из точных в категории $\mathcal{Com}$ троек комплексов

$$
0 \longrightarrow W \xrightarrow{\omega'} \operatorname{Con}\left(\pi_\varphi\right)[-1] \longrightarrow \operatorname{Con}(-\mathrm{Id}_U) \longrightarrow 0 \tag{4-38}
$$

$$
0 \longrightarrow \operatorname{Con}(\mathrm{Id}_W) \longrightarrow \operatorname{Con}\left(\iota_\varphi\right) \xrightarrow{\nu''} U[1] \longrightarrow 0\,. \tag{4-39}
$$

Идущие в противоположную сторону стрелки зададим так:

$$
\begin{gathered}
\omega'' : \ \operatorname{Con}\pi_\varphi[-1] \to W\,, \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ w \\ u \end{pmatrix} \mapsto w + \varphi u \\
\nu' : \ U[1] \to \operatorname{Con}\iota_\varphi\,, \quad u_1 \mapsto \begin{pmatrix} -\varphi u_1 \\ u_1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{gathered}
$$

Упражнение 4.22. Убедитесь, что ω'' и ν' являются морфизмами комплексов, причём $\omega''\omega' = \mathrm{Id}_W$, а $\nu''\nu' = \mathrm{Id}_{U[1]}$, и что в категории $\mathcal{Com}$ выполняются равенства

$$
\pi_{\iota_\varphi}\nu' = -\varphi = \omega''\iota_{\pi_\varphi}\,, \quad \nu''\iota_{\iota_\varphi} = \pi_\varphi\,, \quad \pi_{\pi_\varphi}\omega' = \iota_\varphi\,.
$$

[1] См. формулу (4-16) на стр. 71.

Конусы тождественных морфизмов в точных тройках (4-38) и (4-39) стягиваются гомотопией из прим. 4.5 на стр. 72, а именно — отображениями

$$\gamma' : \; U[1]\oplus W\oplus U \to U\oplus W[-1]\oplus U[-1]\,, \quad \begin{pmatrix} u_1\\ w\\ u\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -u\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\gamma'' : \; W[1]\oplus U[1]\oplus W \to W\oplus U\oplus W[-1]\,, \quad \begin{pmatrix} w_1\\ u_1\\ w\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Первое из них задаёт гомотопическую эквивалентность $\omega'\omega'' + [d_{\mathrm{Con}\,\pi_\varphi[-1]}, \gamma'] = \mathrm{Id}$:

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{pmatrix} -du_1\\ \varphi u_1 + dw\\ -u_1+du\end{pmatrix} \arrow[rr, mapsto, "\gamma'"] & & \begin{pmatrix} u_1-du\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \arrow[dr, dotted, no head] & \\
\begin{pmatrix} 0\\ w+\varphi u\\ 0\end{pmatrix} & w+\varphi u \arrow[l, mapsto, "\omega'"'] & \begin{pmatrix} u_1\\ w\\ u\end{pmatrix} \arrow[l, mapsto, "\omega''"'] \arrow[ul, mapsto, "d_{\mathrm{Con}\,\pi_\varphi[-1]}"'] \arrow[dl, mapsto, "\gamma'"] \arrow[rr, mapsto, "d_{\mathrm{Con}\,\pi_\varphi[-1]}\gamma' + \gamma' d_{\mathrm{Con}\,\pi_\varphi[-1]}"] & & \begin{pmatrix} u_1\\ -\varphi u\\ u\end{pmatrix} \arrow[dl, dotted, no head] \\
 & \begin{pmatrix} -u\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \arrow[rr, mapsto, "d_{\mathrm{Con}\,\pi_\varphi[-1]}"'] & & \begin{pmatrix} du\\ -\varphi u\\ u\end{pmatrix}, &
\end{tikzcd}$$

второе — гомотопическую эквивалентность $\nu'\nu'' + [d_{\mathrm{Con}\,\iota_\varphi}, \gamma''] = \mathrm{Id}$:

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{pmatrix} w_1+\varphi u_1+dw\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \arrow[dl, dotted, no head] & & \begin{pmatrix} -dw_1\\ -du_1\\ w_1+\varphi u_1+dw\end{pmatrix} \arrow[ll, mapsto, "\gamma''"'] & \\
\begin{pmatrix} w_1+\varphi u_1\\ 0\\ w\end{pmatrix} \arrow[dr, dotted, no head] & & \begin{pmatrix} w_1\\ u_1\\ w\end{pmatrix} \arrow[ll, mapsto, "d_{\mathrm{Con}\,\iota_\varphi}\gamma'' + \gamma'' d_{\mathrm{Con}\,\iota_\varphi}"'] \arrow[ur, mapsto, "d_{\mathrm{Con}\,\iota_\varphi}"] \arrow[r, mapsto, "\nu''"] \arrow[dr, mapsto, "\gamma''"'] & u_1 \arrow[r, mapsto, "\nu'"] & \begin{pmatrix} -\varphi u_1\\ u_1\\ 0\end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} -dw\\ 0\\ w\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} w\\ 0\\ 0\end{pmatrix}. \arrow[ll, mapsto, "d_{\mathrm{Con}\,\iota_\varphi}"] &
\end{tikzcd}$$

Таким образом, морфизмы ω', ω'', как и морфизмы ν', ν'', взаимно обратны в категории $\mathcal{H}o$. Поэтому последняя группа равенств из упр. 4.22 означает коммутативность диаграмм (4-36), (4-37) в категории $\mathcal{H}o$. $\square$

Предложение 4.8
Для любого комплекса V действующие из категории $\mathcal{H}o$ в категорию абелевых групп функторы $h_V : X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}o}(X, V)$ и $h^V : X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}o}(V, X)$ переводят каждый отмеченный треугольник $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} A[1]$ в длинные точные последовательности

$$\dots\ \mathrm{Hom}^{i-1}(A, V) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}^i(C, V) \xrightarrow{\gamma^*} \mathrm{Hom}^i(B, V) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}^i(A, V) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}^{i+1}(C, V) \dots$$

$$\dots\ \mathrm{Hom}^{i-1}(V, C) \xrightarrow{\gamma_*} \mathrm{Hom}^i(V, A) \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}^i(V, B) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}^i(V, C) \xrightarrow{\gamma_*} \mathrm{Hom}^{i+1}(V, A) \dots$$

где $\mathrm{Hom}^i(U, W) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}o}(U, W[i])$.

Доказательство. В силу предл. 4.7 достаточно проверить только точность композиций $\alpha^*\beta^*$ и $\beta_*\alpha_*$. Мы разберёмся с первой из них, оставив вторую в качестве упражнения. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, dashed, "0"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\beta^*\varphi"] & C \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\varphi"] & A[1] \arrow[d, dashed, "0"] \\
0 \arrow[r, "0"] & V \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & V \arrow[r, "0"] & 0\,,
\end{tikzcd}$$

которая продолжает средний коммутативный квадрат до морфизма между точными треугольниками $B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} A[1] \xrightarrow{-\alpha[1]} B[1]$ и $V \xrightarrow{\mathrm{Id}} V \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} V[1]$, вытекает, что $\alpha^*\beta^*(\varphi) = 0$ для всех $\varphi \in h_V(C)$. С другой стороны, каждая $\psi : B \to V$ из ядра α^* имеет вид $\psi = \beta^*(\varphi)$ для стрелки $\varphi : C \to V$, которая достраивает левый коммутативный квадрат на диаграмме

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "0"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\psi"] & C \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & A[1] \arrow[d, "0"] \\
0 \arrow[r, "0"] & V \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & V \arrow[r, "0"] & 0\,,
\end{tikzcd}$$

до морфизма точных треугольников $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} B[1]$ и $0 \xrightarrow{0} V \xrightarrow{\mathrm{Id}} V \xrightarrow{0} 0$. □

Предложение 4.9
Для любых двух точных треугольников $A \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} B \xrightarrow{\varphi} A[1]$ и $C \xrightarrow{\gamma} E \xrightarrow{\delta} D \xrightarrow{\psi} [1]$ общей вершиной E композиции морфизмов $\beta\gamma$ и $\delta\alpha$ тоже включаются в отмеченные треугольники с общей вершиной $F \simeq \mathrm{Con}(\beta\gamma) \simeq \mathrm{Con}(\delta\alpha)$, так что возникает следующая диаграмма, все линии на которой являются начальными частями точных тре-

угольников[1]:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[ddr, "\alpha"] \arrow[drr, "\delta\alpha"] & & & \\
& & D \arrow[dr, "\iota_D"] & \\
& E \arrow[ur, "\delta"'] \arrow[dr, "\beta"] & & F \\
& & B \arrow[ur, "\iota_B"'] & \\
C \arrow[uur, "\gamma"] \arrow[urr, "\beta\gamma"'] & & &
\end{tikzcd}\ , \tag{4-40}
$$

а из двух заключённых между этими треугольниками квадратов

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] & E \\
F[-1] \arrow[u, "{\pi_A[-1]}"] \arrow[r, "{\pi_C[-1]}"] & C \arrow[u, "\gamma"']
\end{tikzcd}
\quad \text{и} \quad
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\iota_D"] & F \\
E \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "\beta"] & B \arrow[u, "\iota_B"']
\end{tikzcd}
\tag{4-41}
$$

первый антикоммутативен, а второй коммутативен.

Доказательство. Можно считать оба данных треугольника стандартными с $D = \operatorname{Con}\gamma$ и $B = \operatorname{Con}\alpha$, так что в категории $\mathcal{C}om$ имеются точные тройки вида (4-34)

$$
\begin{gathered}
0 \longrightarrow E \xrightarrow{\beta} \operatorname{Con}\alpha \xrightarrow{\varphi} A[1] \longrightarrow 0 \\
0 \longrightarrow E \xrightarrow{\delta} \operatorname{Con}\gamma \xrightarrow{\psi} C[1] \longrightarrow 0\,.
\end{gathered}
$$

Как градуированные модули, $\operatorname{Con}(\delta\alpha) = A[1] \oplus C[1] \oplus E$ и $\operatorname{Con}(\beta\gamma) = C[1] \oplus A[1] \oplus E$, а дифференциалы этих комплексов задаются матрицами

$$
d_{\operatorname{Con}(\delta\alpha)} = \begin{pmatrix} -d_A & 0 & 0 \\ 0 & -d_C & 0 \\ \alpha & \gamma & d_E \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad d_{\operatorname{Con}(\beta\gamma)} = \begin{pmatrix} -d_C & 0 & 0 \\ 0 & -d_A & 0 \\ \gamma & \alpha & d_E \end{pmatrix}.
$$

Очевидно, что транспозиция σ_{12} первых двух прямых слагаемых устанавливает изоморфизм между этими комплексами. Положим в диаграмме (4-40) $F \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Con}(\delta\alpha) = \sigma_{12}\operatorname{Con}(\beta\gamma)$, $\iota_D \overset{\text{def}}{=} \iota_{\delta\alpha}$, $\pi_A \overset{\text{def}}{=} \pi_{\delta\alpha}$, $\iota_B \overset{\text{def}}{=} \sigma_{12}\iota_{\beta\gamma}$, $\pi_C \overset{\text{def}}{=} \sigma_{12}\pi_{\beta\gamma}$, где в правых частях стоят

[1] Ср. с упр. 4.1 на стр. 65.

канонические морфизмы из точных в абелевой категории $\mathcal{C}om$ троек вида (4-34):

$$\begin{tikzcd}
 & D = \operatorname{Con}\gamma \arrow[d, equal] & \operatorname{Con}\delta\alpha \arrow[d, equal] & & \\
0 \arrow[r] & C[1]\oplus E \arrow[r, "\iota_D=\iota_{\delta\alpha}"] & A[1]\oplus C[1]\oplus E \arrow[r, "\pi_A=\pi_{\delta\alpha}"] \arrow[d, equal] & A[1] \arrow[r] & 0 \\
 & & F \arrow[d, equal] & & \\
0 \arrow[r] & A[1]\oplus E \arrow[r, "\iota_B"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, "\iota_{\beta\gamma}"'] & A[1]\oplus C[1]\oplus E \arrow[r, "\pi_C"] \arrow[d, shift left, "\sigma_{12}"] & C[1] \arrow[r] & 0\,. \\
 & B = \operatorname{Con}\alpha & C[1]\oplus A[1]\oplus E = \operatorname{Con}\beta\gamma \arrow[u, shift left, "\sigma_{12}"] \arrow[ur, "\pi_{\beta\gamma}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Упражнение 4.23. Убедитесь, что второй из квадратов (4-41) коммутативен прямо в категории $\mathcal{C}om$.

В первом квадрате композиции $\alpha\pi_A$ и $\gamma\pi_C$ переводят элемент

$$\begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} \in A\oplus C\oplus E[-1] = F[-1] \tag{4-42}$$

соответственно в $\alpha(a)$ и $\gamma(c)$. Отображение $h:\ A\oplus C\oplus E[-1]\to E$ степени -1, переводящее тот же элемент (4-42) в e, удовлетворяет соотношению $\iota_B\beta = -\iota_D\delta + [d,h]$, поскольку $d_E h$ переводит элемент (4-42) в $d_E e$, а $hd_{F[-1]} = -hd_F$ переводит его в $-\alpha(a)-\gamma(c)-d_E(e)$ (проверьте!). Тем самым, первый квадрат антикоммутативен в категории $\mathcal{H}o$. □

Замечание 4.2. (диаграмма октаэдра) Треугольники из диаграммы (4-40) иногда изображают в виде граней октаэдра, составленного из двух четырёхугольных пирамид[1]

$$\begin{tikzcd}
C[1] \arrow[dd, squiggly, "-\beta\gamma[1]"'] \arrow[dr, squiggly, "-\gamma[1]"] & & D \arrow[ll, "\psi"'] \\
 & E \arrow[ur, "\delta"] \arrow[dl, "\beta"] & \\
B \arrow[rr, squiggly, "\varphi"'] & & A \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[uu, "\delta\alpha"']
\end{tikzcd}
\quad\text{и}\quad
\begin{tikzcd}
C[1] \arrow[dd, squiggly, "-\beta\gamma[1]"'] & & D \arrow[ll, "\psi"'] \arrow[dl, "\iota_D"] \\
 & F \arrow[ul, "\pi_C"'] \arrow[dr, squiggly, "\pi_A[-1]"'] & \\
B \arrow[ur, "\iota_B"] \arrow[rr, squiggly, "\varphi"'] & & A \arrow[uu, "\delta\alpha"']
\end{tikzcd}\,, \tag{4-43}$$

где волнистая стрелка $X \rightsquigarrow Y$ означает морфизм $X\to Y[1]$, все треугольники, имеющие ровно одну волнистую сторону отмечены, а все остальные треугольники коммутативны[2]. Верхний точный треугольник $E\xrightarrow{\delta} D\xrightarrow{\psi}[1]\xrightarrow{-\gamma[1]}E[1]$ левой пирамиды

[1] Диаграммы (4-43) показывают вид на эти пирамиды сверху, так что E и F являются противоположными вершинами октаэдра, а лежащий в основании пирамид квадрат $ABCD$ служит для октаэдра экватором.

[2] Так что точные и коммутативные треугольники располагаются на октаэдре в шахматном порядке.

является «повёрнутой» в соответствии с предл. 4.7 на стр. 85 версией треугольника $C \xrightarrow{\gamma} E \xrightarrow{\delta} D \xrightarrow{\psi} [1]$ с диаграммы (4-40), что приводит к изменению знака стрелки γ и делает оба квадрата с противоположными вершинами в E и F коммутативными, в отличие от (4-40), где содержащий стрелку γ квадрат был антикоммутативен.

В терминах октаэдра (4-43) предыдущее предл. 4.9 переформулируется следующим образом: если задана диаграмма коммутативных и отмеченных треугольников, имеющая вид четырёхугольной пирамиды (мы смотрим на неё сверху)

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[dd, rightsquigarrow] \arrow[dr, rightsquigarrow] & & * \arrow[ll] \\
& * \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
* \arrow[rr, rightsquigarrow] & & * \arrow[uu] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

то она всегда достраивается до октаэдра второй четырёхугольной пирамидой вида

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[dd, rightsquigarrow] \arrow[dr] & & * \arrow[ll] \\
& * \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
* \arrow[rr, rightsquigarrow] & & * \arrow[uu] \arrow[ul, rightsquigarrow]
\end{tikzcd}$$

с тем же основанием так, что оба квадрата с противоположными вершинами в вершинах этих пирамид будут коммутативны.

§5. Функторы Tor и Ext

5.1. Инъективные и проективные резольвенты. Пусть абелева категория $\mathcal{A}$ имеет достаточно много проективных (соотв. инъективных) объектов, т. е. любой её объект является фактором проективного (соотв. подобъектом инъективного) объекта. Тогда любой объект $M \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ включается в точные последовательности

$$\cdots \to P_3 \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0 \tag{5-1}$$

$$0 \to M \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to I^3 \to \cdots , \tag{5-2}$$

где все P_ν проективны, а все I^μ инъективны. Для этого надо зафиксировать эпиморфизм $\pi_0 : P_0 \twoheadrightarrow M$ из какого-нибудь проективного объекта P_0 и положить $R_0 = \ker \pi_0$, потом зафиксировать эпиморфизм $\pi_1 : P_1 \twoheadrightarrow R_0$ из какого-нибудь проективного объекта P_1 и положить $R_1 = \ker \pi_1$ и т. д., после чего склеить все полученные точные тройки $R_i \hookrightarrow P_i \twoheadrightarrow R_{i-1}$ в одну длинную точную последовательность (5-1), где каждый морфизм $\partial_i : P_i \to P_{i-1}$ является композицией проекции $\pi_i : P_i \twoheadrightarrow R_{i-1}$ и включения $R_{i-1} \hookrightarrow P_{i-1}$. Инъективная версия (5-2) строится симметричным образом.

Пример 5.1 (свободная резольвента модуля и сизигии)
Каждый правый модуль M над ассоциативным кольцом S является фактором свободного. Гомоморфизм свободного модуля $F_0 = G_0 \otimes S$ с базисом G_0, отправляющий базисный вектор $g \in G_0$ в некоторый элемент $m_g \in M$, сюрьективен , если и только если элементы m_g, $g \in G_0$, линейно порождают M над S. Таким образом, выбор сюрьекции $\pi_0 : G_0 \otimes S \to M$ это в точности выбор множества образующих в M. Модуль M называется *конечно порождённым*, если множество образующих G_0 можно выбрать конечным. Ядро $R_0 = \ker \pi_0 \subset G_0 \otimes S$ состоит из таких[1] $r = \sum_{g\in G_0} g \otimes \varrho_g \in F_0$, что $\sum_{g\in G_0} m_g\varrho_g = 0$ в M, т. е. элементами R_0 являются в точности линейные соотношения между выбранными образующими. Поэтому R_0 называется *модулем соотношений* или *нулевых сизигий* между образующими m_g. Выбор следующей сюрьекции $\pi_1 : G_1 \otimes S \to R_0$ означает выбор некоторого множества G_1 *образующих соотношений* — таких, что любое линейное соотношение между элементами m_g является их линейной комбинацией. Модуль M называется *конечно представимым*, если он порождается конечным набором образующих и имеет конечное множество образующих линейных соотношений между ними, т. е. когда оба множества G_0 и G_1 можно сделать конечными. Ядро $R_1 = \ker \pi_1 \subset G_1 \otimes S$ состоит из линейных соотношений между образующими соотношениями и называется модулем *первых сизигий*. Он завит как от выбора образующих, так и от выбора образующих соотношений. Далее процесс продолжается по индукции.

Например, идеал $M = (x_1, x_2, x_3)$ в кольце многочленов $S = \Bbbk[x_1, x_2, x_3]$, где $\Bbbk$ — поле, имеет три образующих x_1, x_2, x_3, так что возникает эпиморфизм[2]

$$\pi_0 : S^3 \twoheadrightarrow M , \quad e_1 \mapsto x_1 , \; e_2 \mapsto x_2 , \; e_3 \mapsto x_3 . \tag{5-3}$$

Его ядро $R_0 = \ker \pi_0 \subset S$ содержит три очевидных соотношения:

$$r_1 = x_3e_2 - x_2e_3 , \quad r_2 = x_3e_1 - x_1e_3 , \quad r_3 = x_2e_1 - x_1e_2 , \tag{5-4}$$

[1] Напомним, что в наборе коэффициентов $(\varrho_g)_{g\in G_0}$ почти все $\varrho_g = 0$.

[2] Векторы e_1, e_2, e_3 образуют стандартный базис свободного модуля S^3 в левой части (5-3).

так что возникает гомоморфизм[1]

$$\pi_1 : S^3 \to \ker \pi_0 , \quad f_1 \mapsto r_1 , \, f_2 \mapsto r_2 , \, f_3 \mapsto r_3 . \tag{5-5}$$

На самом деле, модуль $R_0 = \ker \pi_0$ порождается соотношениями (5-4) и гомоморфизм (5-5) сюрьективен, хотя это и не вполне очевидно. Ядро R_1 гомоморфизма π_1 тоже ненулевое: между векторами $r_1, r_2, r_3 \in S^3$ из формулы (5-4) имеется очевидное соотношение $x_1 r_1 - x_2 r_2 + x_3 r_3 = 0$ (проверьте!), так что возникает гомоморфизм

$$\pi_2 : S \to \ker \pi_1 , \quad 1 \mapsto x_1 f_1 - x_2 f_2 + x_3 f_3 .$$

Сюрьективность обоих гомоморфизмов π_1, π_2 вытекает *a posteriori* из того, что построенный нами комплекс $0 \to S \to S^3 \to S^3 \to M \to 0$, дифференциалы которого задаются матрицами

$$\partial_0 = (x_1, x_2, x_3) : S^3 \to M , \quad \partial_1 = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix} : S^3 \to S^3 , \quad \partial_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : S \to S^3$$

является частью комплекса Кошуля из форм. (4-22) на стр. 73 (убедитесь в этом!) для регулярной[2] последовательности элементов $x_1, x_2, x_3 \in S$:

$$0 \to \Lambda^3 S^3 \xrightarrow{\partial} \Lambda^2 S^3 \xrightarrow{\partial} \Lambda^1 S^3 \xrightarrow{\partial} \Lambda^0 S^3 \to S/(x_1, x_2, x_3) \to 0 , \quad \partial = \sum x_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} ,$$

который точен согласно предл. 4.2 на стр. 74. Таким образом, регулярность последовательности элементов коммутативного кольца S означает, среди прочего, что в порождённом ими идеале, рассматриваемом как S-модуль, между этими элементами есть только очевидные «грассмановы» сизигии вида (5-4), имеющиеся в любом наборе элементов коммутативного кольца.

Определение 5.1 (канонические резольвенты)
Получающиеся удалением M из точных последовательностей (5-1) и (5-2) комплексы

$$\cdots \to P_3 \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to 0 \quad \text{и} \quad 0 \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to I^3 \to \cdots ,$$

которые состоят из проективных (соотв. инъективных) объектов и имеют единственную ненулевую (ко)гомологию $H_0(P) = M = H^0(I)$, называются, соответственно, *проективной* (или *канонической левой*) и *инъективной* (или *канонической правой*) *резольвентами* объекта M и обозначается P^M и I_M. Названия и обозначения объясняются тем, что сопоставления $M \mapsto P^M$ и $M \mapsto I_M$ являются функторами из категории $\mathcal{A}$ в гомотопическую категорию комплексов $\mathcal{H}o(\mathcal{A})$. Это вытекает из следующей леммы.

[1]Векторы f_1, f_2, f_3 образуют стандартный базис свободного модуля S^3 в левой части (5-5).
[2]См. опр. 4.4 на стр. 73.

Лемма 5.1
Если в диаграмме с точными строками

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_3^P"] & P_2 \arrow[r, "\partial_2^P"] \arrow[d, dashed, "\varphi_2^P"] & P_1 \arrow[r, "\partial_1^P"] \arrow[d, dashed, "\varphi_1^P"] & P_0 \arrow[r, "\partial_0^P"] \arrow[d, dashed, "\varphi_0^P"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "\partial_3^Q"'] & Q_2 \arrow[r, "\partial_2^Q"'] & Q_1 \arrow[r, "\partial_1^Q"'] & Q_0 \arrow[r, "\partial_0^Q"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

все объекты P_i проективны, то любая вертикальная стрелка $\varphi : M \to N$ достраивается до морфизма комплексов единственным с точностью до гомотопической эквивалентности набором вертикальных стрелок φ_i^P. Симметричным образом, в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\partial_0^Q"] \arrow[d, "\varphi"] & Q^0 \arrow[r, "\partial_1^Q"] \arrow[d, dashed, "\varphi_I^0"] & Q^1 \arrow[r, "\partial_2^Q"] \arrow[d, dashed, "\varphi_I^1"] & Q^2 \arrow[r, "\partial_3^Q"] \arrow[d, dashed, "\varphi_I^2"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\partial_0^I"'] & I^0 \arrow[r, "\partial_1^I"'] & I^1 \arrow[r, "\partial_2^I"'] & I^2 \arrow[r, "\partial_3^I"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

с точными строками и инъективными I^ν любая вертикальная стрелка $\varphi : N \to M$ тоже достраивается до морфизма комплексов единственным с точностью до гомотопической эквивалентности набором вертикальных стрелок φ_I^ν.

Доказательство. Пусть $\varphi_{-1}^P = \varphi$, и по индукции стрелка φ_{i-1}^P уже построена. Так как P_i проективен, стрелка $\varphi_{i-1}^P \circ \partial_i^P : P_i \to \ker \partial_{i-1}^Q$ поднимается вдоль эпиморфизма $\partial_i^Q : Q_i \twoheadrightarrow \ker \partial_{i-1}^Q$ до такой стрелки $\varphi_i^P : P_i \to Q_i$, что $\partial_i^Q \varphi_i^P = \varphi_{i-1}^P \partial_i^P$. Это доказывает существование подъёма. Чтобы установить его единственность, достаточно убедиться, что любой подъём φ^P нулевого морфизма $\varphi = 0$ гомотопен нулю, т. е. построить такие диагональные стрелки γ_i в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
& \cdots \arrow[r, "\partial_3^P"] & P_2 \arrow[r, "\partial_2^P"] \arrow[d, "\varphi_2^P"] \arrow[dl, dashed, "\gamma_2"] & P_1 \arrow[r, "\partial_1^P"] \arrow[d, "\varphi_1^P"] \arrow[dl, dashed, "\gamma_1"] & P_0 \arrow[r, "\partial_0^P"] \arrow[d, "\varphi_0^P"] \arrow[dl, dashed, "\gamma_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "0"] \arrow[dl, dashed, "\gamma_{-1}"] & 0 \\
& \cdots \arrow[r, "\partial_3^Q"'] & Q_2 \arrow[r, "\partial_2^Q"'] & Q_1 \arrow[r, "\partial_1^Q"'] & Q_0 \arrow[r, "\partial_0^Q"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

что $\varphi_i^P = \partial_{i+1}^Q \gamma_i + \gamma_{i-1} \partial_i^P$. Пусть $\gamma_{-1} = 0$ и по индукции стрелка γ_{i-1} уже построена. Разность $\varphi_i^P - \gamma_{i-1}\partial_i^P$ переводит P_i в ядро $\ker \partial_i^Q$, поскольку

$$\partial_i^Q(\varphi_i^P - \gamma_{i-1}\partial_i^P) = (\varphi_{i-1}^P - \partial_i^Q \gamma_{i-1})\partial_i^P = \gamma_{i-2}\partial_{i-1}^P \partial_i^P = 0\,.$$

Следовательно, эта разность поднимается вдоль сюрьекции $\partial_{i+1}^Q : Q_{i+1} \twoheadrightarrow \ker \partial_i^Q$ до такой стрелки $\gamma_i : P_i \to Q_{i+1}$, что $\partial_{i+1}^Q \gamma_i = \varphi_i^P - \gamma_{i-1}\partial_i^P$. □

Упражнение 5.1. Докажите симметричное утверждение про инъективную резольвенту.

Следствие 5.1
Все проективные резольвенты произвольно заданного объекта M гомотопически эквивалентны друг другу. То же верно и для инъективных резольвент.

Доказательство. Пусть P и Q — две различных проективных резольвенты для M. Тождественный морфизм $\mathrm{Id}_M : M \to M$ поднимается до морфизмов комплексов $\alpha : P \to Q$ и $\beta : Q \to P$. Поскольку композиции $\alpha\beta : Q \to Q$ и $\beta\alpha : P \to P$ тоже поднимают Id_M, они гомотопны тождественным подъёмам Id_Q и Id_P соответственно. Дословно это же рассуждение проходит и для инъективных резольвент. □

Следствие 5.2
Сопоставления $M \to P^M$ и $M \to I_M$ задают функторы из категории $\mathcal{A}$ в полные подкатегории гомотопической категории $\mathcal{H}o(\mathcal{A})$, образованные комплексами из проективных и инъективных объектов категории $\mathcal{A}$ соответственно. □

Лемма 5.2 (резольвента точной тройки)
Для любой точной тройки $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ в $\mathcal{A}$ и любых проективных резольвент $P' \twoheadrightarrow M'$ и $P'' \twoheadrightarrow M''$ у объекта M имеется проективная резольвента P, как градуированный объект изоморфная прямой сумме $P \simeq P' \oplus P''$ и оснащённая таким дифференциалом, что диаграмма[1]

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P' \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d] & P \arrow[r, "\pi''"] \arrow[d] & P'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

коммутативна, а её верхняя строчка является точной тройкой в категории[2] $\mathcal{C}om(\mathcal{A})$.

Доказательство. Повторим описанное в начале n° 5.1 пошаговое построение проективной резольвенты M, подстраиваясь под уже заданные резольвенты для крайних членов тройки. Сначала рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
P_0' \arrow[r, hook, "\iota_0'"] \arrow[d, "\partial_0'"'] \arrow[dr, "\tau_0"] & P_0' \oplus P_0'' \arrow[r, two heads, "\pi_0''"] \arrow[d, dashed, "\partial_0"] & P_0'' \arrow[d, "\partial_0''"] \arrow[dl, dashed, "\eta_0"] \\
M' \arrow[r, hook, "\alpha"'] & M \arrow[r, two heads, "\beta"'] & M'' ,
\end{tikzcd} \tag{5-6}$$

в которой $\tau_0 = \alpha\partial_0'$, а $\eta_0 : P_0'' \to M$ является подъёмом стрелки $\partial_0'' : P_0'' \twoheadrightarrow M''$ вдоль сюрьекции $\beta : M \twoheadrightarrow M''$. Стрелка $\partial_\nu : P_0' \oplus P_0'' \to M$, однозначно задаваемая стрелками τ_0 и η_0, делает все квадраты коммутативными, превращая диаграмму (5-6) в точную тройку вертикальных двучленных комплексов. Её длинная точная последовательность когомологий имеет вид

$$0 \to \ker \partial_0' \to \ker \partial_0 \to \ker \partial_0'' \to \operatorname{coker} \partial_0' \to \operatorname{coker} \partial_0 \to \operatorname{coker} \partial_0'' \to 0 .$$

[1]Морфизмы ι' и π'' которой взяты из канонической диаграммы прямой суммы
[2]Но, вообще говоря, нерасщепима в категории $\mathcal{C}om$.

Поскольку ∂_0' и ∂_0'' сюрьективны, построенный нами морфизм ∂_0 тоже сюрьективен, и мы имеем изображённую слева коммутативную диаграмму с точными строками, где мы положили $K_0' = \ker \partial_0'$, $K_0 = \ker \partial_0$, $K_0'' = \ker \partial_0''$:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
K_0' \arrow[r, hook, "\alpha_0"] \arrow[d, hook] & K_0 \arrow[r, dashed, two heads, "\beta_0"] \arrow[d, hook, dashed] & K_0'' \arrow[d, hook] \\
P_0' \arrow[r, hook, "\iota_0'"] \arrow[d, "\partial_0'"'] & P_0' \oplus P_0'' \arrow[r, two heads, "\pi_0''"] \arrow[d, dashed, "\partial_0"] & P_0'' \arrow[d, "\partial_0''"] \\
M' \arrow[r, hook, "\alpha"] \arrow[d] & M \arrow[r, two heads, "\beta"] \arrow[d, dashed] & M'' \arrow[d] \\
0 & 0 & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
K_1' \arrow[r, hook, "\alpha_1"] \arrow[d, hook] & K_1 \arrow[r, two heads, "\beta_1"] \arrow[d, hook, dashed] & K_1'' \arrow[d, hook] \\
P_1' \arrow[r, hook, "\iota_1'"] \arrow[d] \arrow[dr, "\tau_1"] & P_1' \oplus P_1'' \arrow[r, two heads, "\pi_1''"] \arrow[d, dashed] & P_1'' \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "\eta_1"'] \\
K_0' \arrow[r, hook, "\alpha_0"] \arrow[d] & K_0 \arrow[r, two heads, "\beta_0"] \arrow[d] & K_0'' \arrow[d] \\
0 & 0 & 0
\end{tikzcd}
$$

К её верхней строке применимо дословно то же рассуждение, что и к исходной точной тройке, в результате чего мы получаем изображённый справа второй этаж искомой резольвенты, где $\tau_1 : P_1' \to K_0$ является композицией вертикальной стрелки $P_1' \twoheadrightarrow K_0'$ с вложением $\alpha_0 : K_0' \hookrightarrow K_0$, стрелка $\eta_1 : P_1'' \to K_0$ является подъёмом стрелки $P_1'' \twoheadrightarrow K_0''$ вдоль эпиморфизма $\beta_0 : K_0 \twoheadrightarrow K_0''$, а стрелка $P_1' \oplus P_1'' \to K$, однозначно задаётся стрелками τ_1 и η_1. Продолжая в том же духе, мы получим согласованный набор диаграмм, которые склеиваются по вертикали в требуемые резольвенты

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "\partial_3'"] & \vdots \arrow[d, dashed, "\partial_3"] & \vdots \arrow[d, "\partial_3''"] \\
P_2' \arrow[r, hook, "\iota_2'"] \arrow[d, "\partial_2'"] & P_2' \oplus P_2'' \arrow[r, two heads, "\pi_2''"] \arrow[d, dashed, "\partial_2"] & P_2'' \arrow[d, "\partial_2''"] \\
P_1' \arrow[r, hook, "\iota_1'"] \arrow[d, "\partial_1'"] & P_1' \oplus P_1'' \arrow[r, two heads, "\pi_1''"] \arrow[d, dashed, "\partial_1"] & P_1'' \arrow[d, "\partial_1''"] \\
P_0' \arrow[r, hook, "\iota_0'"] \arrow[d, "\partial_0'"] & P_0' \oplus P_0'' \arrow[r, two heads, "\pi_0''"] \arrow[d, dashed, "\partial_0"] & P_0'' \arrow[d, "\partial_0''"] \\
M' \arrow[r, hook, "\alpha"] \arrow[d] & M \arrow[r, two heads, "\beta"] \arrow[d, dashed] & M'' \arrow[d] \\
0 & 0 & 0\,.
\end{tikzcd}
\tag{5-7}
$$

□

Упражнение 5.2. Сформулируйте и докажите симметричную версию лем. 5.2 для инъективных резольвент.

Лемма 5.3 (резольвента комплекса)
Над элементами любого комплекса $\cdots \to M_{\nu+1} \to M_\nu \to M_{\nu-1} \to \cdots$ в категории $\mathcal{A}$ можно надстроить проективные резольвенты $P_\nu \twoheadrightarrow M_\nu$ (внимание: каждый P_ν является комплексом!) таким образом, что поднимающая дифференциалы комплекса M последовательность морфизмов комплексов $\cdots \to P_{\nu+1} \to P_\nu \to P_{\nu-1} \to \cdots$ будет комплексом в категории $\mathcal{C}om(\mathcal{A})$, причём в категории градуированных объектов каждый член этого комплекса будет расщепляться в прямую сумму

$$P_\nu = \operatorname{im}\partial_{\nu+1} \oplus H_\nu \oplus \operatorname{im}\partial_\nu\,,$$

в которой $H_\nu = H_\nu(P)$ является комплексом ν-тых гомологий комплекса (комплексов) P, а $\operatorname{im}\partial_{\nu+1}$ и $\operatorname{im}\partial_\nu$ изоморфны комплексам-образам приходящего в комплекс P_ν и сходящего из комплекса P_ν дифференциалов $P_{\nu+1} \to P_\nu \to P_{\nu-1}$. Более того, каждый комплекс когомологий $H_\nu(P)$ является проективной резольвентой объекта $H_\nu(M)$.

Иными словами, над комплексом M надстраивается коммутативная диаграмма проективных модулей $P_{p,q}$ с точными столбцами

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_{\nu+1,2} \arrow[r] \arrow[d] & P_{\nu,2} \arrow[r] \arrow[d] & P_{\nu-1,2} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & P_{\nu+1,1} \arrow[r] \arrow[d] & P_{\nu,1} \arrow[r] \arrow[d] & P_{\nu-1,1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & P_{\nu+1,0} \arrow[r] \arrow[d] & P_{\nu,0} \arrow[r] \arrow[d] & P_{\nu-1,0} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M_{\nu+1} \arrow[r] \arrow[d] & M_\nu \arrow[r] \arrow[d] & M_{\nu-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{5-8}$$

которые являются проективными резольвентами объектов M_ν. Каждая строка этой диаграммы является комплексом, каждый член которого распадается в прямую сумму $P_{p,q} \simeq B_{p+1,q} \oplus Q_{p,q} \oplus B_{p,q}$, где $Q_{p,q} = H_p(P_{\bullet,q})$ является p-ой гомологией q-той строки, а $B_{p+1,q}$ и $B_{p,q}$ изоморфны образам приходящего в $P_{p,q}$ и исходящего из $P_{p,q}$ горизонтальных дифференциалов. Действие вертикального дифференциала на гомологии горизонтальных дифференциалов превращает объекты $Q_{p,\bullet}$ в проективные резольвенты когомологий $H_p(M)$ комплекса M.

Доказательство. Развалим исходный комплекс M на точные тройки вида

$$\operatorname{im}\partial_{\nu+1} \hookrightarrow \ker\partial_\nu \twoheadrightarrow H_\nu(M) \quad \text{и} \quad \ker\partial_\nu \hookrightarrow M_\nu \twoheadrightarrow \operatorname{im}\partial_\nu$$

Выберем для каждого ν проективные резольвенты $B_\nu \twoheadrightarrow \operatorname{im}\partial_\nu$, $Q_\nu \twoheadrightarrow H_\nu(M)$ и достроим их по лем. 5.2 до проективных резольвент

$$B_{\nu+1} \oplus Q_\nu \twoheadrightarrow \ker(\partial_\nu) \quad \text{и} \quad B_{\nu+1} \oplus Q_\nu \oplus B_\nu \twoheadrightarrow M_\nu$$

так, чтобы предыдущие точные тройки в категории $\mathcal{A}$ поднимались до расщепляющихся в категории градуированных объектов точных троек

$$B_{\nu+1} \hookrightarrow B_{\nu+1} \oplus Q_\nu \twoheadrightarrow Q_\nu \quad \text{и} \quad B_{\nu+1} \oplus Q_\nu \hookrightarrow B_{\nu+1} \oplus Q_\nu \oplus B_\nu \twoheadrightarrow B_\nu$$

в категории $\mathcal{C}om(\mathcal{A})$, которые мы обратно сложим в комплекс (комплексов)

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\partial_{\nu+1}"] & B_{\nu+1} \oplus Q_\nu \oplus B_\nu \arrow[r, "\partial_\nu"] \arrow[d, equal] & B_\nu \oplus Q_{\nu-1} \oplus B_{\nu-1} \arrow[r, "\partial_{\nu-1}"] \arrow[d, equal] & \cdots \\ & P_\nu & P_{\nu-1} & \end{tikzcd}$$

с дифференциалом, тождественно отображающим третье слагаемое $B_\nu \subset P_\nu$ на первое слагаемое $B_\nu \subset P_{\nu-1}$ и аннулирующим два других слагаемых. По построению, ν-тый комплекс гомологий этого комплекса комплексов $H_\nu(P) = Q_\nu$ является проективной резольвентой для $H_\nu(M)$, а каждый комплекс P_ν является проективной резольвентой для M_ν. □

Определение 5.2 (резольвента Картана – Эйленберга)
Бикомплекс $C_{p,q}$, который состоит из проективных модулей $P_{p,q}$ из лем. 5.3 и получается из коммутативной диаграммы (5-8) изменением знаков вертикальных дифференциалов во всех столбцах с нечётными номерами, называется *проективной резольвентой Картана – Эленберга* комплекса M. Бикомплекс $C_{p,q}$ тоже имеет точные столбцы, являющиеся проективными резольвентами объектов M_ν, а расположенные в ν-м столбце гомологии его комплексов-строк доставляют проективную резольвенту гомологии $H_\nu(M)$ и отщепляются в категории градуированных объектов от $C_{p,q}$ прямыми слагаемыми.

Упражнение 5.3. Постройте для каждого комплекса $\cdots \to M^{\nu-1} \to M^\nu \to M^{\nu+1} \to \cdots$ *инъективную резольвенту Картана – Эйленберга*, т. е. такой бикомплекс $I^{p,q}$ инъективных объектов с дифференциалами степени $+1$ по горизонтали и вертикали, столбцы которого являются инъективными резольвентами объектов M^p, а гомологии комплексов-строк с морфизмами, индуцированными вертикальными дифференциалами, являются инъективными резольвентами гомологий $H_p(M)$ и в категории градуированных объектов отщепляются от $I^{p,q}$ прямыми слагаемыми.

5.2. Функторы Tor. Рассмотрим произвольное ассоциативное кольцо R с единицей, правый R-модуль M и левый R-модуль N, выберем для последних проективные резольвенты $P^M \twoheadrightarrow M$ и $P^N \twoheadrightarrow N$, дифференциалы в которых обозначим через ∂^M и ∂^N, и образуем комплексы абелевых групп $P^M \otimes_R N$ и $M \otimes_R P^N$ с дифференциалами $\partial^M \otimes_R \mathrm{Id}_N$ и $\mathrm{Id}_M \otimes_R \partial^N$. Первый из них получается применением функтора $Y \mapsto M \otimes_R Y$ к комплексу P^N, а второй — применением функтора $X \mapsto X \otimes_R N$ к комплексу P^M. Также рассмотрим бикомплекс абелевых групп $B_{\mu,\nu} = P^M_\mu \otimes_R P^N_\nu$ с горизонтальным дифференциалом $\partial_1 = \partial^M \otimes_R \mathrm{Id}_N$ и вертикальным дифференциалом $\partial_2 = \mathrm{Id}_M \otimes_R \partial^N$ и образуем его тотальный комплекс $\mathrm{Tot}(B) = P^M \otimes_R P^N$ с дифференциалом[1] $\partial^M \otimes_R \mathrm{Id}_N + \mathrm{Id}_M \otimes_R \partial^N$.

[1]Действующим на элементы с учётом того же кошулева правила знаков.

Лемма 5.4
Для левого (соотв. правого) проективного модуля P функтор $X \mapsto P \otimes_R X$ (соотв. функтор $Y \mapsto M \otimes_R Y$) точен.

Доказательство. Поскольку $X \otimes_R R \simeq X$ и $X \otimes_R (\bigoplus R) \simeq \bigoplus X$, функтор тензорного умножения на свободный модуль изоморфен функтору взятия прямой суммы модуля с самим собою и, стало быть, точен. Для проективного модуля P найдётся такой модуль Q, что модуль $P \oplus Q$ свободен. Тогда для любой точной тройки модулей $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ возникает коммутативная диаграмма с точной верхней строкой

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \otimes_R (P \oplus Q) \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \otimes_R (P \oplus Q) \arrow[r] \arrow[d, equal] & C \otimes_R (P \oplus Q) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & (A \otimes_R P) \oplus (A \otimes_R Q) \arrow[r] & (B \otimes_R P) \oplus (B \otimes_R Q) \arrow[r] & (C \otimes_R P) \oplus (C \otimes_R Q) \arrow[r] & 0\,,
\end{tikzcd}$$

где вертикальные стрелки означают канонические изоморфизмы дистрибутивности, а все морфизмы в нижней строке задаются диагональными матрицами. Поэтому обе компоненты нижней строки тоже точны. □

Лемма 5.5
Группы гомологий $H_k(P^M \otimes_R N)$, $H_k(M \otimes_R P^N)$ и $H_k(P^M \otimes_R P^N)$ канонически изоморфны друг другу при всех k, не зависят от выбора проективных резольвент и функториальны по M и N.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения вычислим гомологии бикомплекса B при помощи двух спектральных последовательностей[1] из предл. 4.4 на стр. 81 с ${}^{I}E^2_{p,q} = H^{\partial_1}_p\left(H^{\partial_2}_q(B)\right)$ и ${}^{II}E^2_{p,q} = H^{\partial_2}_q\left(H^{\partial_1}_p(B)\right)$, сходящихся к градуированным факторам некоторых фильтраций на $H^{\partial_1+\partial_2}_{p+q}(P^M \otimes_R P^N)$. Поскольку p-й столбец бикомплекса B получен тензорным умножением проективной резольвенты P^N модуля N на проективный модуль P^M_p, он точен всюду кроме нулевого члена, имеющего $H_0(P^M_p \otimes_R P^N) \simeq P^M_p \otimes_R H_0(P^N) = P^M_p \otimes_R N$. Таким образом, все ненулевые модули ${}^{I}E^2_{p,q}$ сосредоточены в строке $q = 0$. Поэтому следующий лист уже является стабильным: $E^2 = E^\infty$. Он состоит из модулей $E^2_{p,0} = E^\infty_{p,0} \simeq H_p(P^M \otimes_R N)$ и имеет ровно один ненулевой элемент на каждой диагонали $p + q = n$. Это означает, что фильтрация на $H_{p+q}(P^M \otimes_R P^N)$ имеет ровно один ненулевой фактор, т. е. $H_p(P^M \otimes_R N) \simeq H_p(P^M \otimes_R P^N)$. Вторая спектралка ведёт себя симметрично: q-я строка бикомплекса B является результатом тензорного умножения проективной резольвенты P^M модуля M на проективный модуль P^N_q и точна всюду кроме нулевого члена, где имеет $H_0(P^M \otimes_R P^N_q) \simeq$ $\simeq M \otimes_R P^N_q$. Тем самым, все ненулевые модули ${}^{II}E^2_{p,q}$ сосредоточены в столбце $p = 0$, и $E^2_{0,q} = E^\infty_{0,q} \simeq H_q(M \otimes_R P^N)$, что даёт второй изоморфизм $H_q(M \otimes_R P^N) \simeq H_q(P^M \otimes_R P^N)$ и завершает доказательство первого утверждения. Второе и третье утверждения вытекают из того, что тензорное умножение комплексов на любой фиксированный модуль

[1] Преобразованных в текущие гомологические нижнеиндексные обозначения.

сохраняет гомотопическую эквивалентность, а значит корректно задаёт функтор из категории $\mathcal{H}o$ в себя.

Упражнение 5.4. Убедитесь, что если морфизм комплексов $\alpha : P \to Q$ стягивается гомотопией γ, то для любого модуля M морфизм $\alpha \otimes_R \mathrm{Id}_M : P \otimes_R M \to Q \otimes_R M$ стягивается гомотопией $\gamma \otimes_R \mathrm{Id}_M$.

Тем самым, при фиксированных M и k сопоставление $N \mapsto H_k(M \otimes_R P^N)$ является композицией функтора $R\text{-}\mathcal{M}od \to \mathcal{H}o$, $N \mapsto P^N$, функтора $\mathcal{H}o \to \mathcal{H}o$, $C \mapsto M \otimes_R C$, и функтора $\mathcal{H}o \to \mathcal{A}b$, $C \mapsto H_k(C)$. □

Определение 5.3 (функторы Tor)
Канонически изоморфные друг другу абелевы группы из лем. 5.5 обозначаются

$$\mathrm{Tor}_i^R(M, N) \stackrel{\text{def}}{=} H_i(P^M \otimes_R N) \simeq H_i(P^M \otimes_R P^N) \simeq H_i(M \otimes_R P^N)$$

и называются *левыми производными функторами* от тензорного произведения[1]. Если понятно (или не важно) над каким кольцом R рассматриваются модули, мы пишем просто $\mathrm{Tor}_i(M, N)$. Поскольку функтор $X \mapsto X \otimes_R N$ точен справа, он переводит точную последовательность $P_1^M \to P_0 \to M \to 0$ в точную последовательность

$$P_1^M \otimes_R N \to P_0 \otimes_R N \to M \otimes_R N \to 0\,,$$

откуда $\mathrm{Tor}_0^R(M, N) = H_0(P^M \otimes_R N) = M \otimes_R N$, чем отчасти и объясняется название «производный функтор». Ещё одним аргументом является предл. 5.7 ниже.

Упражнение 5.5. Покажите, что если P проективен, то $\mathrm{Tor}_i(P, M) = 0$ для всех M и всех $i > 0$.

Предложение 5.1
Для любой точной тройки модулей $0 \to A \to B \to C \to 0$ и любого модуля N имеется длинная точная последовательность Tor'ов

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_{i+1}(C, N) \to \mathrm{Tor}_i(A, N) \to \mathrm{Tor}_i(B, N) \to \mathrm{Tor}_i(C, N) \to \mathrm{Tor}_{i-1}(A, N) \to \cdots$$
$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1(A, N) \to \mathrm{Tor}_1(B, N) \to \mathrm{Tor}_1(C, N) \to A \otimes N \to B \otimes N \to C \otimes N \to 0$$

Доказательство. Рассмотрим согласованные проективные резольвенты элементов тройки, доставляемые лем. 5.2 на стр. 95. Они образуют точную тройку комплексов

$$0 \to P^A \to P^B \to P^C \to 0\,,$$

в которой $P^B = P^A \oplus P^C$ как градуированный модуль. Поскольку

$$P^B \otimes N \simeq (P^A \otimes N) \oplus (P^B \otimes N)$$

как градуированная абелева группа, тройка комплексов

$$0 \to P^A \otimes N \to P^B \otimes N \to P^C \otimes N \to 0$$

тоже точна. Её длинная точная последовательность когомологий как раз и имеет требуемый вид. □

[1] А также *i-тым M-кручением* в N или же *i-тым N-кручением* в M.

Упражнение 5.6. Убедитесь, что функторы Tor_i дистрибутивны по отношению к прямым суммам и что над коммутативным кольцом R имеется канонический изоморфизм $\mathrm{Tor}_i^R(M,N) \simeq \mathrm{Tor}_i^R(N,M)$.

Пример 5.2 (Tor_1 и кручение)
Пусть элемент $r \in R$ не является левым делителем нуля. Тогда правый R-модуль R/rR обладает двучленной свободной резольвентой $R \to R$ с дифференциалом $x \mapsto rx$. Для любого левого R-модуля N, группы $\mathrm{Tor}_0^R(R/rR,N)$ и $\mathrm{Tor}_1^R(R/rR,N)$ суть ядро и коядро эндоморфизма $N \to N$, $\nu \mapsto r\nu$, задаваемого левым умножением на r, т. е.

$$\mathrm{Tor}_0^R(R/rR,N) = N/rN \tag{5-9}$$

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/rR,N) = \mathrm{Tors}_r(M) = \{m \in M \mid rm = 0\}. \tag{5-10}$$

Тем самым, $\mathrm{Tor}_1^R(R\,/\,rR,N)$ является r-кручением в N. Более общим образом, пусть правый R-модуль M обладает двучленной свободной резольвентой $R^n \to R^m$, дифференциал которой задаётся $m \times n$ матрицей $r = (r_{ij})$. Это означает, что модуль M порождается m элементами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$, связанными n линейными соотношениями $\sum_i \mu_i r_{ij} = 0$, коэффициенты которых располагаются *по столбцам* матрицы r. Тогда $\mathrm{Tor}_1^R(M,N)$ и $\mathrm{Tor}_0^R(M,N) = M \otimes_R N$ суть ядро и коядром морфизма $N^n \to N^m$, задаваемого левым умножением на матрицу r:

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix} \mapsto r \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j r_{1j}\nu_j \\ \vdots \\ \sum_j r_{nj}\nu_j \end{pmatrix}.$$

Тем самым, $\mathrm{Tor}_1^R(M,N) \subset N^n$ состоит из всех наборов $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$, удовлетворяющих m линейным соотношениям $\sum_j r_{ij}\nu_j = 0$, коэффициенты которых стоят *по строкам* матрицы r. Обратите внимание, что точная последовательность

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^R(M,N) \to N^n \xrightarrow{r} N^m \to \mathrm{Tor}_0^R(M,N) \to 0$$

это в точности правый кусок длинной точной последовательности из предл. 5.7, написанной для точной тройки $0 \to F^n \to F^m \to M \to 0$. В нашей ситуации эта длинная последовательность Tor'ов сводится к четырём членам:

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^R(M,N) \to F^n \otimes_R N \to F^m \otimes_R N \to M \otimes_R N \to 0.$$

Пример 5.3 (абелевы группы)
Поскольку все подмодули конечно порождённого свободного $\mathbb{Z}$-модуля тоже свободны, каждый конечно порождённый $\mathbb{Z}$-модуль обладает свободной резольвентой длины 2. Поэтому $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(A,B) = 0$ при всех $i \geqslant 2$ для любых конечно порождённых абелевых групп A, B. Так как произвольная абелева группа является фильтрованным копределом (объединением) своих конечно порождённых подгрупп, а тензорное умножение и когомологии коммутируют с фильтрованными копределами, для всех абелевых групп A, B имеем $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(A,B) = 0$ при $i \neq 0, 1$.

Каждая абелева группа F без кручения является фильтрованным копределом подгрупп, изоморфных $\mathbb{Z}^n$. Так как $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n, A) = 0$ при всех $i \neq 0$ по упр. 5.5, для всех абелевых групп A и любой абелевой группы F без кручения имеем $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(F, A) = 0$ при всех $i \neq 0$.

Циклическая группа $\mathbb{Z}/(n)$ имеет свободную резольвенту $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ с дифференциалом $z \mapsto nz$. Тензорно умножая её на A получаем двучленный комплекс $A \to A$ с дифференциалом $a \mapsto na$. Поэтому $\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(n), A) = A/(nA)$, а

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(n), A) = \{a \in A \mid na = 0\}$$

состоит из элементов n-кручения в A. Из сказанного вытекает, абелева группа F свободна от кручения , если и только если $\mathrm{Tor}_1(F, A) = 0$ для всех A.

Упражнение 5.7. Убедитесь, что $\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(n)\big)$ и $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(n)\big)$ оба изоморфны $\mathbb{Z}/(m, n)$.

Поскольку группа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ является фильтрованным копределом групп $\mathbb{Z}/(n)$ относительно морфизмов включения $\mathbb{Z}/(n) \hookrightarrow \mathbb{Z}/(m)$, $[1] \mapsto [m/n]$, для всех $n \mid m$, группа $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A)$ является копределом (объединением) всех подгрупп кручения в A, т. е.

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A) = \mathrm{Tors}(A) = \{a \in A \mid \exists\, z \in \mathbb{Z} : za = 0\}$$

это в точности полная подгруппа кручения в A.

Упражнение 5.8. Установите для любого кольца R, правого идеала $I \subset R$ и левого идеала $J \subset R$ изоморфизм $\mathrm{Tor}_1(R/I, R/J) \simeq (I \cap J)/IJ$.

5.3. Плоские модули. Левый R-модуль L называется *плоским*, если функтор тензорного умножения $\mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{A}b$, $X \mapsto X \otimes_R L$ точен. Плоские правые R-модули определяются симметрично. При тензорном умножении на плоский модуль проективная резольвента любого модуля остаётся точным комплексом. Поэтому $\mathrm{Tor}_i^R(M, L) = 0$ при $i \neq 0$ для любого правого R-модуля M и плоского левого R-модуля L. Наоборот, если $\mathrm{Tor}_1^R(M, L) = 0$ для всех M, то из длинной точной последовательности Tor'ов[1] вытекает, что тензорное умножение на L точно слева, и значит, L — плоский. В частности, все проективные модули являются плоскими.

Пример 5.4 (плоскость локализации)
Пусть мультипликативная система $S \subset R$ удовлетворяет условиям Оре из прим. 2.17 на стр. 34. Тогда построенный там модуль левых дробей $S^{-1}R$ является плоским правым R-модулем, поскольку является копределом фильтрующейся диаграммы свободных правых R-модулей $s^{-1}R$ ранга 1 с базисными элементами s^{-1}, по одному модулю для каждого $s \in S$, относительно системы морфизмов $s^{-1}R \to (rs)^{-1}R$, $s^{-1} \mapsto (rs)^{-1}r$, по одному для каждой такой пары $(s, r) \in S \times R$, что $rs \in S$. Поскольку когомологии и тензорное произведение перестановочны с фильтрованными копределами, равенство $\mathrm{Tor}_1^R(R, N) = 0$ для всех N влечёт равенство $\mathrm{Tor}_1^R(S^{-1}R, N) = 0$ для всех N.

Упражнение 5.9. Убедитесь, что $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ являются плоскими $\mathbb{Z}$-модулями.

Предложение 5.2
Следующие условия на левый R-модуль L эквивалентны друг другу:

[1] См. предл. 5.7 на стр. 113.

(1) L является плоским

(2) для всех конечно представимых левых R-модулей N канонический морфизм[1]

$$\varkappa_N : \operatorname{Hom}_R(N,R)\otimes_R L \to \operatorname{Hom}_R(N,L), \quad \xi\otimes\ell \mapsto \big(n\mapsto \xi(n)\cdot\ell\big), \tag{5-11}$$

является изоморфизмом

(3) любой гомоморфизм $\varphi : N \to L$ из конечно представимого левого модуля пропускается через свободный модуль конечного ранга, т. е. существует такие гомоморфизмы $\varphi_L : R^n \to L$, $\psi_N : N \to R^n$, что $\varphi = \varphi_L\psi_N$

(4) категория $\mathcal{F}_L$, объектами которой являются гомоморфизмы $\varphi : R^n \to L$ из свободных модулей конечного ранга в L, а стрелки из этого гомоморфизма в гомоморфизм $\psi : R^m \to L$ суть такие гомоморфизмы $\eta : R^n \to R^m$, что $\varphi = \psi\eta$, является фильтрующейся и L является копределом тавтологической диаграммы $\mathcal{F}_L \to R\text{-}\mathcal{M}od$ забывающей про стрелки $\varphi : R^n \to L$ и оставляющей только стрелки $\eta : R^n \to R^m$.

Доказательство. Докажем, что (1) ⇒ (2). Применим к представлению модуля N

$$R^m \to R^n \to N \to 0$$

точные слева функторы[2] $\operatorname{Hom}_R(*,R)\otimes_R L$ и $\operatorname{Hom}_R(*,L)$. Тогда связывающие значения этих функторов естественные преобразования (5-11) впишутся в коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_R(N,R)\otimes_R L \arrow[r] \arrow[d, "\varkappa_N"'] & \operatorname{Hom}_R(R^n,R)\otimes_R L \arrow[r] \arrow[d, "\varkappa_{R^n}"'] & \operatorname{Hom}_R(R^m,R)\otimes_R L \arrow[d, "\varkappa_{R^m}"'] \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_R(N,L) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_R(R^n,L) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_R(R^m,L) ,
\end{tikzcd}$$

где две правые вертикальные стрелки являются изоморфизмами, поскольку над модулем $N = R^k$ естественное преобразование (5-11) является прямой суммой k естественных преобразований $\varkappa_R : \operatorname{Hom}_R(R,R)\otimes_R L \to \operatorname{Hom}_R(R,L)$, переводимых в тождественное отображение Id_L каноническими изоморфизмами

$$\operatorname{Hom}_R(R,R) \xrightarrow{\sim} R\,, \quad R\otimes_R L \xrightarrow{\sim} L \quad \text{и} \quad \operatorname{Hom}_R(R,L) \xrightarrow{\sim} L\,.$$

Следовательно, левая вертикальная стрелка тоже изоморфизм.

Свойство (3) является иной формулировкой свойства (2): представимость гомоморфизма $\varphi : N \to L$ в виде $\varphi = \sum \xi_i \otimes \ell_i$ для некоторых $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n : N \to R$ и $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n \in L$ как раз и означает, что φ является композицией гомоморфизмов

$$N \to R^n\,,\; n \mapsto \sum_i \xi_i(n)\cdot e_i \quad \text{и} \quad R^n \to L\,,\; e_i \mapsto \ell_i\,,$$

[1] Как обычно, $\operatorname{Hom}_R(N,R)$ рассматривается как правый R-модуль, на котором действие R задаётся левым действием на аргументе: $(\xi r)n \stackrel{\text{def}}{=} \xi(rn)$. Изоморфизм (5-11) является аналогом канонического изоморфизма $V^*\otimes W \simeq \operatorname{Hom}(V,W)$ для векторных пространств над полем.

[2] Первый из них является композицией точного слева функтора $\operatorname{Hom}_R(*,R)$ и точного функтора $*\otimes_R L$.

где $e_1, e_2, \dots, e_n$ это стандартный базис в R^n.

Докажем, что (3) ⇒ (4). Сначала убедимся, что категория $\mathcal{F}_L$ фильтруется. Из любых двух объектов $\varphi: R^n \to L, \psi: R^m \to L$ ведут стрелки в объект $\varphi+\psi: R^n \oplus R^m \to L$. Для любых двух стрелок $\eta_1, \eta_2: R^n \to R^m$ между объектами $\varphi: R^n \to L$, $\psi: R^m \to L$ их коуравнитель $\operatorname{coker}(\eta_1 - \eta_2)$ конечно представим. В силу (3) каноническая стрелка $\operatorname{coker}(\eta_1 - \eta_2) \to L$ пропускается через некоторый объект $R^k \to L$ категории $\mathcal{F}_L$. Поэтому этот объект тоже уравнивает стрелки η_1, η_2. Копредел тавтологической диаграммы $\mathcal{F}_L \to R\text{-}\mathcal{M}od$ совпадает с объединением образов всех морфизмов $R^n \to L$ категории $\mathcal{F}_L$, которое очевидно равно L.

Упражнение 5.10. Убедитесь в этом.

Импликация (4) ⇒ (1) устанавливается также, как в прим. 5.4: поскольку копредел фильтрованной диаграммы абелевых групп является точным функтором и перестановочен с тензорным произведением, равенства $\operatorname{Tor}_1^R(N, R^n) = 0$ влекут равенство $\operatorname{Tor}_1^R(N, L) = 0$ для всех N. □

Следствие 5.3
Всякий конечно представимый плоский модуль P проективен.

Доказательство. Воспользуемся характеризацией (3) из предл. 5.2, взяв $N = L = P$. Поскольку $\mathrm{Id}_P: P \to P$ является композицией морфизмов $P \to R^n$ и $R^n \to P$, модуль P является прямым слагаемым в R^n. □

Предложение 5.3
Плоскость левого R-модуля L равносильна инъективности правого R-модуля

$$L^\vee \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Доказательство. Плоскость L означает, что для всякого вложения правых R-модулей $\varphi: M_1 \hookrightarrow M_2$ гомоморфизм абелевых групп $\varphi \otimes \mathrm{Id}_L: M_1 \otimes L \to M_2 \otimes L$ инъективен. Поскольку функтор $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(*, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ точен[1], это равносильно сюрьективности двойственного гомоморфизма $(\varphi \otimes \mathrm{Id}_L)^\vee: \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_2 \otimes_R L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_1 \otimes_R L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, который отождествляются каноническими изоморфизмами сопряжённости[2]

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_2 \otimes_R L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) &\simeq \operatorname{Hom}_R\left(M_2, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\right) \\ \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_1 \otimes_R L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) &\simeq \operatorname{Hom}_R\left(M_1, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\right) \end{aligned} \tag{5-12}$$

с гомоморфизмом $h_{L^\vee}(\varphi): \operatorname{Hom}_R(M_2, L^\vee) \to \operatorname{Hom}_R(M_1, L^\vee)$. Сюрьективность последнего для всех вложений $\varphi: M_1 \hookrightarrow M_2$ означает инъективность модуля $L^\vee$. □

Упражнение 5.11. Покажите, что для любой абелевой группы A имеется каноническое вложение $A \hookrightarrow A^{\vee\vee}$, сюрьективное для конечно порождённых групп.

Следствие 5.4
Левый R-модуль L является плоским тогда и только тогда, когда для каждого правого идеала $J \subset R$ выполняется любое из двух эквивалентных друг другу условий:

[1] В силу того, что $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ инъективен.
[2] См. предл. 2.3 на стр. 24.

(1) умножение[1] $J \otimes_R L \to JL$, $x \otimes v \mapsto xv$, является изоморфизмом

(2) $\mathrm{Tor}_1^R(R/J, L) = 0$.

Доказательство. Равносильность условий (1) и (2) вытекает из длинной точной последовательности $\mathrm{Tor}^R(*, L)$ для точной тройки $0 \to J \to R \to R/J \to 0$

$$\mathrm{Tor}_1^R(R, L) = 0 \to \mathrm{Tor}_1^R(R/J, L) \to J \otimes_R L \to L \to (R/J) \otimes_R L \to 0\,.$$

Сюрьективный гомоморфизм умножения $J \otimes_R L \twoheadrightarrow JL$ инъективен , если и только если стрелка $J \otimes_R L \hookrightarrow R \otimes_R L$ в этой последовательности инъективна, что означает равенство $\mathrm{Tor}_1^R(R/J, L) = 0$. С другой стороны, в силу точности функтора $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(*, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, инъективность стрелки $J \otimes_R L \hookrightarrow R \otimes_R L$, равносильна сюрьективности двойственной стрелки $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R \otimes_R L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(J \otimes_R L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, которая по сопряжённости (5-12) совпадает со стрелкой $\mathrm{Hom}_R(R, L^\vee) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_R(J, L^\vee)$, где $L^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ как в предл. 5.3. Таким образом, модуль L удовлетворяет условию (1) тогда и только тогда, когда модуль $L^\vee$ удовлетворяет условию лем. 3.2 на стр. 54: для любого идеала $J \subset R$ каждый гомоморфизм $J \to L^\vee$ продолжается до гомоморфизма $R \to L^\vee$, что означает инъективность модуля $L^\vee$. Последняя равносильна плоскости модуля L. □

5.3.1. Неканонические резольвенты. Ограниченный справа комплекс модулей A называется *N-ациклической резольвентой* модуля M, *пригодной для вычисления* Tor, если единственным ненулевым модулем гомологий комплекса A является $H_0(A) \simeq M$ и $\mathrm{Tor}_i(A_k, N) = 0$ при всех $i > 0$ для каждого члена A_k комплекса A. Например, любая *плоская* резольвента L модуля M, получающаяся удалением M из точной последовательности модулей $\cdots \to L_2 \to L_1 \to L_0 \to M \to 0$, в которой все L_k — плоские, является N-ациклической резольвентой пригодной для вычисления $\mathrm{Tor}(M, N)$ с любым модулем N.

Предложение 5.4
Для любой N-ацикличной резольвенты A модуля M, пригодной для вычисления Tor, при каждом k имеется канонический изоморфизм $\mathrm{Tor}_k(M, N) = H_k(A \otimes N)$.

Доказательство. Обозначим через C проективную резольвенту Картана – Эйленберга комплекса[2] A и вычислим гомологии тотального комплекса $\mathrm{Tot}(C \otimes N)$ бикомплекса $C \otimes N$, полученного из C применением функтора $X \mapsto X \otimes N$. Согласно предл. 4.4 на стр. 81, к ним сходятся две спектральных последовательности с

$${}^{I}E^2_{p,q} = H_p^{\partial_1}\left(H_q^{\partial_2}(C \otimes N)\right) \quad \text{и} \quad {}^{II}E^2_{p,q} = H_q^{\partial_2}\left(H_p^{\partial_1}(C \otimes N)\right),$$

где H^{∂_1} и H^{∂_2} означают когомологии действующих, соответственно, по строкам и по столбцам дифференциалов, индуцированных дифференциалами $\partial_1 = \partial_1^C \otimes \mathrm{Id}_N$ и $\partial_2 = \partial_2^C \otimes \mathrm{Id}_N$. Так как по столбцам бикомплекса C стоят проективные резольвенты модулей A_p, когомологии $H_q^{\partial_2}(C_{p,*} \otimes N) \simeq \mathrm{Tor}_q(A_p, N)$ нулевые при $q > 0$ и равны $A_p \otimes N$

[1] Напомню, что $JL \overset{\text{def}}{=} \{x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_mv_m \mid x_i \in J,\ v \in L\}$.
[2] См. опр. 5.2 на стр. 98.

при $q = 0$. Поэтому ${}^{I}E^{2}p, q = {}^{I}E^{\infty}_{p,q} = H_p(A \otimes N)$ при $q = 0$ и нулевые при $q \neq 0$. Следовательно, $H_k(\operatorname{Tot} C) \simeq H_k(A \otimes N)$. С другой стороны, гомологии комплексов строк бикомплекса C являются проективными резольвентами гомологий комплекса A и как градуированные модули отщепляются от строк прямыми слагаемыми. Следовательно, $H_p^{\partial_1}(C_{*,q} \otimes N) = H_p^{\partial_1}(C_{*,q}) \otimes N$ есть результат тензорного умножения q-того члена проективной резольвенты модуля $H_p(A)$ на N. Тем самым, ${}^{II}E^{2}_{p,q} \simeq \operatorname{Tor}_q\left(H_p(A), N\right)$ отличны от нуля только при $p = 0$ и в этом случае равны $\operatorname{Tor}_q(M, N)$. Поэтому ${}^{II}E^{2} = {}^{II}E^{\infty}$ и $H_k(\operatorname{Tot} C) \simeq \operatorname{Tor}_k(M, N)$. □

Предложение 5.5
Для любой плоской резольвенты $L \twoheadrightarrow M$ правого R-модуля M и любого ограниченного справа комплекса левых модулей K, единственным ненулевым модулем гомологий которого является $H_0(K) \simeq N$, группы $\operatorname{Tor}_k^R(M, N) \simeq H_k\left(\operatorname{Tot}(L \otimes_R K)\right)$ при всех k.

Доказательство. К гомологиям $H_{p+q}\left(\operatorname{Tot}(L \otimes_R K)\right)$ сходится спектральная последовательность с $E^2_{p,q} = H_p^{\partial_L \otimes 1}\left(H_q^{1 \otimes \partial_K}(L \otimes_R K)\right)$. Поскольку p-тый столбец бикомплекса $L \otimes_R K$ получается применением к комплексу K точного функтора $X \mapsto L_p \otimes_R X$ и сменой знака у нечётных дифференциалов, он точен всюду кроме нулевого члена, где $H_0^{1 \otimes \partial_K}(L \otimes_R K) \simeq L \otimes_R H_0(K) \simeq L \otimes_R N$. Поэтому $E^2_{p,q} = E^{\infty}_{p,q}$ сосредоточены в строке $q = 0$ и равны $E^2_{p,0} = H_p^{\partial_L \otimes 1}(L \otimes_R N) = \operatorname{Tor}_p^R(M, N)$. □

Теорема 5.1 (спектральная последовательность Кюннета)
Если ограниченные справа комплексы правых R-модулей K_k и левых R-модулей L_ℓ

$$\cdots \to K_{k+1} \to K_k \to K_{k-1} \to \cdots \quad \text{и} \quad \cdots \to L_{\ell+1} \to L_\ell \to L_{\ell-1} \to \cdots$$

имеют $\operatorname{Tor}_i^R(K_k, L_\ell) = 0$ при $i \neq 0$ для всех[1] k, ℓ, то имеется спектральная последовательность гомологического типа с

$$E^2_{p,q} = \bigoplus_{k+\ell=q} \operatorname{Tor}_p^R\left(H_k(K), H_\ell(L)\right),$$

сходящаяся к градуированным факторам некоторой возрастающей с ростом p фильтрации на $H_{p+q}(K \otimes_R L)$.

Доказательство. Обозначим через $C(K)$ и $C(L)$ проективные резольвенты Картана – Эйленберга[2] комплексов K и L. Каждая из них представляет собою бикомплекс, p-й столбец которого, как градуированная абелева группа, имеет вид

$$C_p = P^{B_p} \oplus P^{H_p} \oplus P^{B_{p-1}}, \tag{5-13}$$

где P^{B_p} и P^{H_p} суть проективные резольвенты для модулей p-х границ B_p и гомологий[3] H_p комплексов K и L, а горизонтальный дифференциал $\partial_1 : C_p \to C_{p-1}$ действует на сумму (5-13) тождественно отображая первое слагаемое на третье и аннулируя

[1] Например, это условие выполняется, когда один из комплексов состоит из плоских модулей.
[2] См. опр. 5.2 на стр. 98.
[3] См. доказательство лем. 5.3 на стр. 96.

два других слагаемых. По отношению к действию вертикальных дифференциалов ∂_2^K и ∂_2^L p-е столбцы бикомплексов $C(K)$ и $C(L)$ являются проективными резольвентами модулей K_p и L_p. Тензорное произведение тотальных комплексов

$$T = \mathrm{Tot}(C(K)) \otimes \mathrm{Tot}(C(L))$$

можно рассматривать как свёртку бикомплекса с компонентами

$$T_{p,q} = \bigoplus_{\substack{k+\ell=p\\ i+j=q}} C_{k,i}(K) \otimes C_{\ell,j}(L)$$

и дифференциалами $D_1 = \partial_1^K \otimes 1 + 1 \otimes \partial_1^L$ и $D_2 = \partial_2^K \otimes 1 + 1 \otimes \partial_2^L$, где ∂_1^K и ∂_1^L суть горизонтальные, а ∂_2^K и ∂_2^L — вертикальные дифференциалы бикомплексов $C(K)$ и $C(L)$ соответственно.

Упражнение 5.12. Убедитесь, что $T = \bigoplus_{p,q} T_{p,q}$, что дифференциал комплекса T действительно равен $D_1 + D_2$, и что $D_1 D_2 + D_2 D_1 = 0$.

К гомологиям $H_{p+q}(T)$ сходится две спектральных последовательности. Таблица ${}^{I}E^1$ первой из них образованна гомологиями горизонтального дифференциала D_1 и имеет в q-том столбце прямую сумму $\bigoplus_{k+\ell=q} P^{H_k(K)} \otimes P^{H_\ell(L)}$ тензорных произведений проективных резольвент для модулей гомологий комплексов K и L. Поэтому p-я группа гомологий q-го столбца относительно вертикального дифференциала D_2 имеет заявленный в теореме вид ${}^{I}E^2_{p,q} = \bigoplus_{k+\ell=q} \mathrm{Tor}_p^R\big(H_k(K), H_\ell(L)\big)$.

Таблица ${}^{II}E^1$ второй спектральной последовательности образована гомологиями вертикального дифференциала D_2 в комплексах $T_{p,*}$, которые являются прямыми суммами комплексов $C_{k,*}(K) \otimes C_{\ell,*}(L)$ с $k + \ell = p$, вычисляющих $\mathrm{Tor}^R(K_k, L_\ell)$. Так как по условию один из комплексов K, L состоит из плоских модулей, эти гомологии отличны от нуля только при $q = 0$ и равны ${}^{II}E^1_{p,0} = \bigoplus_{k+\ell=p} K_k \otimes L_\ell$. Поэтому следующая таблица ${}^{II}E^2_{p,q} = {}^{II}E^\infty_{p,q}$ является предельной и имеет на каждой диагонали $p + q = n$ ровно одну ненулевую клетку, в которой стоит $H_{p+q}(K \otimes L)$. □

Следствие 5.5 (формула Кюннета)
Пусть в условиях теор. 5.1 ограниченный справа комплекс L состоит из плоских левых R-модулей и вдобавок все образы $B_i = \mathrm{im}(\partial^L : L_{i+1} \to L_i)$ его дифференциала тоже плоские. Тогда для любого ограниченного справа комплекса K правых R-модулей имеется точная последовательность

$$0 \to \bigoplus_{\alpha+\beta=n} H_\alpha(K) \otimes_R H_\beta(L) \to H_n(K \otimes_R L) \to \bigoplus_{\gamma+\delta=n-1} \mathrm{Tor}_1^R\big(H_\gamma(K), H_\delta(L) \to 0\,. \quad (5\text{-}14)$$

Доказательство. Ядро $Z_i = \ker(\partial : L_i \to L_{i-1})$ каждого дифференциала комплекса L включается в точную тройку $0 \to Z_i \to L_i \to B_{i-1} \to 0$. Ассоциированная с нею длинная точная последовательность $\mathrm{Tor}^R(N, *)$, где N — произвольный правый R-модуль, показывает, что плоскость всех модулей L_i и B_i влечёт плоскость все модулей Z_i. Тем самым, модули гомологий комплекса L имеют плоские резольвенты длины два:

$$0 \to B_{q+1} \to Z_q \to H_q(L) \to 0\,,$$

и, стало быть, $\mathrm{Tor}_p^R(H_k(K), H_\ell(L)) = 0$ при $p \neq 0, 1$ для всех k, ℓ. Тем самым, спектральная последовательность из теор. 5.1 стабилизируется на второй таблице $E^2_{p,q} = E^\infty_{p,q}$, которая сосредоточена в двух столбцах $p = 0, 1$ и имеет вид

$$\begin{array}{cccc}
0 & \bigoplus\limits_{\alpha+\beta=q+1} H_\alpha(K)\otimes_R H_\beta(L) & \bigoplus\limits_{\gamma+\delta=q+1} \mathrm{Tor}_1^R\big(H_\gamma(K)\otimes_R H_\delta(L)\big) & 0\\
0 & \bigoplus\limits_{\alpha+\beta=q} H_\alpha(K)\otimes_R H_\beta(L) & \bigoplus\limits_{\gamma+\delta=q} \mathrm{Tor}_1^R\big(H_\gamma(K)\otimes_R H_\delta(L)\big) & 0\\
0 & \bigoplus\limits_{\alpha+\beta=q-1} H_\alpha(K)\otimes_R H_\beta(L) & \bigoplus\limits_{\gamma+\delta=q-1} \mathrm{Tor}_1^R\big(H_\gamma(K)\otimes_R H_\delta(L)\big) & 0\,,
\end{array}$$

а это и означает, что группа $H_n(M \otimes_R L)$ является расширением вида (5-14). □

Замечание 5.1. В точной тройке $0 \to Z_i \to L_i \to B_{i-1} \to 0$ из плоскости модулей Z_i и B_i вытекает плоскость модуля L_i. Поэтому вместо плоскости модулей L_i в условии сл. 5.5 можно было бы требовать плоскость модулей Z_i. Кроме того, можно было не накладывать никаких условий на комплекс L, но наложить симметричные условия на комплекс K: потребовать плоскость всех его границ $B_i(K)$ и либо плоскость всех циклов $Z_i(K)$, либо плоскость самих модулей K_i.

5.4. Сизигии градуированных модулей. Обозначим через

$$S = SV^* = \bigoplus_{d\geqslant 0} S^d V^*$$

градуированную алгебру полиномов на $(n+1)$-мерном векторном пространстве V над полем $\Bbbk$. Выбор координат в V, т. е. базиса $x_0, x_1, \dots, x_n$ в V^*, задаёт изоморфизм $S \simeq \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ и отождествляет однородную компоненту $S^d V^*$ с подпространством однородных многочленов степени d, которое мы дальше будем обозначать просто через S^d. Напомню, что S-модуль M называется *градуированным*, если $M = \bigoplus\limits_{\mu\in\mathbb{Z}} M^\mu$ как векторное пространство над $\Bbbk$ и $S^d \cdot M^\mu \subset M^{\mu+d}$ для всех μ и d. Например, любой идеал $I = (f_1, f_2, \dots, f_m) \subset S$, порождённый однородными многочленами f_i, является градуированным модулем $I = \bigoplus I^\mu$ с однородными компонентами $I^\mu = I \cap S^\mu$.

Упражнение 5.13. Убедитесь в этом.

Градуированные S-модули вместе с однородными гомоморфизмами степени нуль в качестве стрелок образуют $\Bbbk$-линейную абелеву категорию — ядра, коядра, аддитивная структура и изоморфизм образа с кообразом в ней те же, что и в категории (градуированных) векторных пространств над $\Bbbk$. Описанную в прим. 5.1 на стр. 92 свободную резольвенту для градуированного S-модуля M тоже можно сделать состоящей из градуированных модулей и морфизмов степени нуль. Для этого обозначим через $S[-d]$ свободный S-модуль ранга 1 с базисным элементом e степени d. Это означает, что компонента μ-той степени у $S[-d]$ изоморфна $S^{\mu-d}$, и согласуется с нашими предыдущими договорённостями[1]. Если градуированный S-модуль M порождается

[1]См. n° 4.1 на стр. 64.

однородными элементами[1] $f_i \in M^{d_i}$, то в качестве стартового члена свободной резольвенты для M можно взять сюрьекцию

$$\partial_0 : \bigoplus_i S[-d_i] \twoheadrightarrow M\,, \tag{5-15}$$

переводящую базисный элемент e_i из i-того модуля $S[-d_i]$ в образующую $f_i \in M$. Таким образом, гомоморфизм (5-15) однороден степени нуль.

Система однородных образующих f_i называется *минимальной*, если ни одна из образующих не является S-линейной комбинацией остальных.

Упражнение 5.14. Убедитесь, что минимальность образующих f_i равносильна тому, что в любой линейной зависимости $\sum h_i f_i = 0$ с однородными полиномиальными коэффициентами $h_i \in S$ все $\deg h_i > 0$. Убедитесь также, что модуль линейных зависимостей между любыми однородными элементами $m_1, m_2, \dots, m_n$ порождается линейными зависимостями с однородными коэффициентами одинаковых степеней.

Очевидно, что каждая система однородных образующих любого градуированного модуля содержит минимальную подсистему. Рассмотрим сюрьекцию (5-15) для минимальной системы однородных образующих модуля M и далее, следуя описанной в прим. 5.1 на стр. 92 процедуре, построим свободную градуированную резольвенту модуля M, точно также выбирая на каждом шагу в очередном градуированном модуле сизигий $R_i = \ker \partial_i$ минимальную систему однородных образующих. Полученная в результате свободная резольвента

$$\cdots \to \bigoplus_{i_3} S[-q_{i_3}] \to \bigoplus_{i_2} S[-q_{i_2}] \to \bigoplus_{i_1} S[-q_{i_1}] \to \bigoplus_{i_0} S[-q_{i_0}] \to M \to 0 \tag{5-16}$$

называется *минимальной*. Не смотря на имеющийся на каждом шагу произвол в выборе минимальных однородных образующих очередного ядра, ранги свободных модулей, из которых состоит минимальная градуированная свободная резольвента, не зависят от выбора резольвенты[2], ибо допускают следующее инвариантное описание.

Предложение 5.6
Для любой минимальной резольвенты (5-16) ранг p-того свободного градуированного модуля $F_p = \bigoplus_{i_p} S[-q_{i_p}]$ в ней равен размерности над полем $\Bbbk$ векторного пространства $\mathrm{Tor}_p^S(M, \Bbbk)$, где $\Bbbk = S/(x_1, x_2, \dots, x_n)$ это тривиальный S-модуль, на котором все x_i действуют нулём.

Доказательство. В минимальной резольвенте (5-16) каждый дифференциал

$$\partial_p : \bigoplus_{i_p} S[-d_{i_p}] \to \bigoplus_{i_{p-1}} S[-d_{i_{p-1}}]$$

[1] Поскольку каждый градуированный модуль порождается своими однородными компонентами, в нём всегда можно выбрать однородные образующие.

[2] На самом деле не трудно показать, что любые две минимальные резольвенты (5-16) изоморфны друг другу (не канонически), но нам это не понадобится.

задаётся матрицей из однородных многочленов, столбцы которой являются коэффициентами однородных линейных зависимостей между минимальными однородными образующими градуированного модуля $R_{p-1} = \ker \partial_{p-1}$. В силу минимальности резольвенты все эти коэффициенты имеют положительные степени. Поэтому тензорное умножение над S на тривиальный модуль $\Bbbk$, где все переменные x_i действует нулём, превращает минимальную резольвенту (5-16) в комплекс градуированных векторных пространств[1]

$$\dots \to \bigoplus_{i_3} \Bbbk[-q_{i_3}] \to \bigoplus_{i_2} \Bbbk[-q_{i_2}] \to \bigoplus_{i_1} \Bbbk[-q_{i_1}] \to \bigoplus_{i_0} \Bbbk[-q_{i_0}] \to M \to 0$$

с нулевыми дифференциалами. Поэтому размерность векторного пространства

$$\mathrm{Tor}_p^S(M, \Bbbk) \simeq \bigoplus_{i_p} \Bbbk[-d_{i_p}]$$

над полем $\Bbbk$ равна рангу модуля $F_p = \bigoplus_{i_p} S[-q_{i_p}]$ над S. □

Теорема 5.2 (теорема Гильберта о сизигиях)
Длина минимальной свободной резольвенты любого градуированного модуля M над симметрической алгеброй $S = SV^* \simeq \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ не превышает $\dim V + 1$ (т. е. ненулевые члены резольвенты могут быть лишь в степенях $n + 1 \geqslant p \geqslant 0$).

Доказательство. Согласно предл. 5.6, для любой минимальной резольvenты

$$\dots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

выполнено равенство $\mathrm{rk}_S F_p = \dim_{\Bbbk} \mathrm{Tor}_p^S(M, \Bbbk)$. Вычисляя $\mathrm{Tor}_p^S(M, \Bbbk)$ при помощи тензорного умножения на M свободной резольвенты модуля $\Bbbk = S/(x_0, \dots, x_n)$, доставляемой комплексом Кошуля $K_{x_0,\dots,x_n}$ регулярной последовательности[2] $x_0, \dots, x_n$

$$0 \to \Lambda^{n+1}V^* \otimes S \to \dots \to \Lambda^2 V^* \otimes S \to V^* \otimes S \to S \to \Bbbk \to 0\,,$$

мы заключаем, что $\mathrm{Tor}_p^S(M, \Bbbk) = 0$ при всех $p \geqslant n + 2$. □

5.5. Функторы Ext. Зафиксируем проективную резольвенту P^M и инъективную резольвенту I_N для левых[3] модулей M и N над произвольным кольцом R с единицей и рассмотрим комплексы левых R-модулей $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^M, N)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(M, I_N)$, где модули M и N рассматриваются как комплексы с ровно одни ненулевым объектом, расположенном в степени нуль. Таким образом, комплекс $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(M, I_N)$ имеет дифференциал $\varphi \mapsto d_{I_N} \circ \varphi$ совпадает с результатом применения функтора $\mathrm{Hom}(M, *)$ к комплексу I_N, а комплекс $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^M, N)$ имеет дифференциал $\varphi \mapsto (-1)^{|\varphi|}\varphi \circ \partial^{P^M}$ и отличается от результата применения функтора $\mathrm{Hom}(*, N)$ к комплексу P^M сменой знака

[1] Где $\Bbbk[-m] = S[-m] \otimes_S \Bbbk$ означает одномерное векторное пространство, находящееся в степени m.

[2] См. прим. 4.6 на стр. 74.

[3] Мы рассматриваем левые модули лишь для определённости, всё сказанное в этом разделе в равной степени относится и к правым R-модулям. Но — в отличие от того, с чем мы имели дело ранее — кольцо должно действовать на оба модуля с одной и той же стороны.

всех нечётных дифференциалов. Рассмотрим также бикомплекс $B^{p,q} = \mathrm{Hom}\left(P^M_p, I^q_N\right)$ с горизонтальным дифференциалом $d_1 : \varphi \mapsto (-1)^{|\varphi|}\varphi \circ \partial^{P^M}$ и вертикальным дифференциалом $d_2 : \varphi \mapsto d_{I_N} \circ \varphi$. Его тотальный комплекс $\mathrm{Tot}(B) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^M, I_N)$ имеет дифференциал $\varphi \mapsto d_{I_N} \circ \varphi + (-1)^{|\varphi|}\varphi \circ \partial^{P^M}$.

Лемма 5.6
R-модули $H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^M, N)\right)$, $H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(M, I_N)\right)$ и $H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^M, I_N)\right)$ канонически изоморфны друг другу при всех k, не зависят от выбора проективных резольвент и функториальны по M и N.

Доказательство. Вычислим когомологии бикомплекса $B^{\mu,\nu} = \mathrm{Hom}\left(P^M_\mu, I^\nu_N\right)$ при помощи двух сходящихся к $H^{p+q}\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^M, I_N)\right)$ спектралок[1] с

$$ {}^{I}E^{p,q}_2 = H^p_1\left(H^q_2(B)\right) \quad \text{и} \quad {}^{II}E^{p,q}_2 = H^q_2\left(H^p_1(B)\right) . $$

Так как p-й столбец бикомплекса B получается применением к инъективной резольвенте I_N модуля N точного функтора $\mathrm{Hom}\left(P^M_p, *\right)$, он точен во всех положительных степенях, а в нижней строке имеет когомологию

$$ H^0\left(\mathrm{Hom}(P^M_p, I_N)\right) \simeq \mathrm{Hom}\left(P^M_p, H^0(I_N)\right) = \mathrm{Hom}\left(P^M_p, N\right) . $$

Поэтому ненулевые клетки таблицы ${}^{I}E^{p,q}_2$ сосредоточены в строке $q = 0$ и равны

$$ E^{p,0}_2 = E^{p,0}_\infty \simeq H^p\left(\mathrm{Hom}(P^M_p, N)\right) , $$

откуда $H^p\left(\mathrm{Hom}(P^M_p, N)\right) \simeq H^p\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^M, I_N)\right)$. Аналогично, q-я строка бикомплекса B получается применением $\mathrm{Hom}\left(*, I^q_N\right)$ к проективной резольвенте P^M и сменой знака у нечётных дифференциалов. Она точна всюду вне нулевого столбца, где

$$ H^0\left(\mathrm{Hom}(P^M, I^q_N)\right) \simeq \mathrm{Hom}\left(H_0(P^M), I^q_N\right) = \mathrm{Hom}\left(M, I^q_N\right) . $$

Поэтому ненулевые клетки таблицы ${}^{I}E^{p,q}_2$ сосредоточены в строке $q = 0$ и равны

$$ E^{p,0}_2 = E^{p,0}_\infty \simeq H^p\left(\mathrm{Hom}(M, I_N)\right) . $$

Следовательно, $H^q\left(\mathrm{Hom}(M, I_N)\right) \simeq H^q\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^M, I_N)\right)$, что доказывает первое утверждение. Остальные утверждения вытекают из того, что функторы $\mathcal{C}om \to \mathcal{C}om$, переводящие комплекс C в комплексы $\mathrm{Hom}(M, C)$ и $\mathrm{Hom}(C, N)$, где M и N — фиксированные R-модули, сохраняет гомотопическую эквивалентность, а значит корректно задаёт функторы $\mathcal{H}o \to \mathcal{H}o$.

Упражнение 5.15. Пусть морфизм комплексов $\alpha : P \to Q$ стягивается гомотопией γ. Убедитесь, что для любых модулей M и N морфизмы $\alpha_* : \mathrm{Hom}(M, P) \to \mathrm{Hom}(M, Q)$ и $\alpha^* : \mathrm{Hom}(Q, N) \to \mathrm{Hom}(P, N)$ стягиваются гомотопиями γ_* и γ^* соответственно.

Тем самым, при фиксированных M и k сопоставление $N \mapsto H^k\left(\mathrm{Hom}(M, I_N)\right)$ является композицией функтора $R\text{-}\mathcal{M}od \to \mathcal{H}o$, $N \mapsto I_N$, функтора $\mathcal{H}o \to \mathcal{H}o$, $C \mapsto \mathrm{Hom}(M, C)$, и функтора $\mathcal{H}o \to \mathcal{A}b$, $C \mapsto H^k(C)$. □

[1] См. предл. 4.4 на стр. 81.

Определение 5.4

Изоморфные модули из предыдущей лем. 5.6 обозначаются

$$\operatorname{Ext}^i(M,N) \overset{\text{def}}{=} H^i\left(\operatorname{Hom}(P^M,N)\right) \simeq H^i\left(\operatorname{Hom}(M,I_N)\right) \simeq H^i\left(\operatorname{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^M,I_N)\right) \tag{5-17}$$

и называются *правыми производными функторами* от функтора Hom или *модулями расширений* M посредством N. Если важно указать кольцо, над которым рассматриваются модули, мы будем писать $\operatorname{Ext}^i_R(M,N)$. Поскольку проективные и инъективные модули является одночленными резольвентами самих себя, для проективного P, инъективного I и любого M получаем $\operatorname{Ext}^i_R(M,I) = \operatorname{Ext}^i_R(P,M) = 0$ при при всех $i \neq 0$.

Пример 5.5 (Ext^1 и расширения)

Точная тройка вида $0 \to N \to X \to M \to 0$ называется *расширением* M посредством N. Под изоморфизмом расширений понимается (автоматически биективный) гомоморфизм между средними членами троек, индуцирующий тождественное отображение на подмодуле N и фактор модуле M. Покажем, что классы точных троек с точностью до изоморфизма находятся в биекции с элементами группы $\operatorname{Ext}^1(M,N)$.

Для этого зафиксируем для модуля M свободную резольвенту

$$\cdots \to F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} M \to 0$$

и обозначим базисные векторы в F_0, F_1 и F_2 через g_j, r_j и s_k соответственно. Дифференциалы ∂_1 и ∂_2 действуют на строки из базисных векторов умножением справа на матрицы $\varrho = \left(\varrho_{ij}\right)$ и $\sigma = \left(\sigma_{ki}\right)$, по столбцам которых стоят[1], соответственно, коэффициенты образующих линейных зависимостей $\partial_0(\Gamma_j) = \sum_i m_i \varrho_{ij} = 0$ между порождающими модуль M векторами $m_i = \partial_0(g_i)$ и коэффициенты образующих линейных зависимостей $\partial_1(P_k) = \sum_j \Gamma_j \sigma_{jk} = \sum_j \varrho_{ij}\sigma_{jk} = 0$ между предыдущими образующими линейными зависимостями $\Gamma_j = \partial_1(r_j) = \sum_i g_i \sigma_{ij} \in F_0$. Модуль X содержит элементы x_i, которые проектируются в образующие m_i модуля M при эпиморфизме $X \twoheadrightarrow M$. Для каждого линейного соотношения Γ_j между образующими m_i, линейная комбинация $\sum_i x_i \varrho_{ji} \in X$ проектируется в $\sum_i \varrho_{ji} m_i = 0$, и стало быть, лежит в N. Тем самым, выбор прообразов x_i для образующих модуля M относительно проекции $X \twoheadrightarrow M$ задаёт набор элементов $n_j = \sum_i x_i \varrho_{ji} \in N$, а значит, гомоморфизм $\xi_x : F_1 \to N$, $f_j \mapsto n_j$. Так как для каждого линейного соотношения P_k между базисными линейными зависимостями $\Gamma_j \in F_0$ в модуле M выполняется равенство

$$\sum_j n_j \sigma_{jk} = \sum_{ji} x_i \varrho_{ij} \sigma_{jk} = \sum_i x_i \sum_j \varrho_{ij}\sigma_{jk} = 0\,,$$

композиция $\xi \circ \partial_2 : s_k \mapsto \sum_j n_j \sigma_{jk}$ нулевая, т. е. в комплексе $\operatorname{Hom}(F,N)$ выполняется равенство $\partial_2^*(\xi_x) = 0$, означающее, что морфизм $\xi_x \in \operatorname{Hom}_{\mathrm{DG}}(F,N)$ является 1-коциклом. Любые другие элементы $y_i \in X$, проектирующиеся в образующие m_i, имеют вид $y_i = x_i + n_i'$ для некоторых $n_i' \in N$, задающих гомоморфизм $\beta : F_0 \to N$, $e_i \mapsto n_i'$. Они определяют свой 1-коцикл $\xi_y \in \operatorname{Hom}^1_{\mathrm{DG}}(F,N)$, действующий на F_1 по правилу

$$\xi_y : f_j \mapsto \sum_i y_i \varrho_{ij} = \sum_i x_i \varrho_{ij} + \sum_i n_i' \varrho_{ij} = \xi_x(f_j) + \beta\partial_1(f_j)\,.$$

[1]См. прим. 5.1 на стр. 92.

Таким образом, ξ_y отличается от ξ_x на кограницу, и расширение X корректно задаёт класс когомологий $\xi_X \in \operatorname{Ext}^1(M,N)$. Наоборот, любой коцикл $\xi : F_1 \to N$ задаёт модуль $X \supset N$, порождённый над N элементами x_i, находящимися в биекции с образующими m_i модуля M и удовлетворяющими соотношениям $\sum_i x_i \varrho_{ji} = \xi(f_j)$ для каждого образующего соотношения Γ_j в M. Проекция $X \twoheadrightarrow M$ корректно задаётся правилами $x_i \mapsto m_i$ и $n \mapsto 0$ для всех $n \in N$.

Упражнение 5.16. Убедитесь в этом и проверьте, что изоморфным расширениям отвечают когомологичные коциклы.

Предложение 5.7
Имеется канонический изоморфизм бифункторов $\operatorname{Ext}^0(M,N) \simeq \operatorname{Hom}(M,N)$, и для любой точной тройки модулей $0 \to A \to B \to C \to 0$ и любых модулей M, N имеются длинные точные последовательности модулей

$$\begin{gathered}0 \to \operatorname{Hom}(M,A) \to \operatorname{Hom}(M,B) \to \operatorname{Hom}(M,C) \to \operatorname{Ext}^1(M,A) \to \operatorname{Ext}^1(M,B) \to \cdots \\ \cdots \to \operatorname{Ext}^{k-1}(M,C) \to \operatorname{Ext}^k(M,A) \to \operatorname{Ext}^k(M,B) \to \operatorname{Ext}^k(M,C) \to \operatorname{Ext}^{k+1}(M,A) \to \cdots\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}0 \to \operatorname{Hom}(C,N) \to \operatorname{Hom}(B,N) \to \operatorname{Hom}(A,N) \to \operatorname{Ext}^1(C,N) \to \operatorname{Ext}^1(B,N) \to \cdots \\ \cdots \to \operatorname{Ext}^{k-1}(A,N) \to \operatorname{Ext}^k(C,N) \to \operatorname{Ext}^k(B,N) \to \operatorname{Ext}^k(A,N) \to \operatorname{Ext}^{k+1}(C,N) \to \cdots\end{gathered}$$

Доказательство. Первое следует из того, что функтор $X \mapsto \operatorname{Hom}(M,X)$ сохраняет ядра и переводит точную последовательность $0 \to N \to I^0 \to I^1$ в точную последовательность $0 \to \operatorname{Hom}(M,N) \to \operatorname{Hom}(M,I^0) \to \operatorname{Hom}(M,I^1)$. Второе следует из лем. 5.2, позволяющей выбрать у модулей A, B, C такие проективные резольвенты P^A, P^B, P^C и инъективные резольвенты I_A, I_B, I_C, которые образуют в категории $\mathcal{C}om$ точные тройки

$$0 \to P^A \to P^B \to P^C \to 0 \quad \text{и} \quad 0 \to I_A \to I_B \to I_C \to 0,$$

расщепляющиеся в категории градуированных R-модулей. Последнее обстоятельство влечёт за собою точность в категории $\mathcal{C}om$ троек комплексов

$$\begin{gathered}0 \to \operatorname{Hom}_{\mathrm{DG}}(M,I_A) \to \operatorname{Hom}_{\mathrm{DG}}(M,I_B) \to \operatorname{Hom}_{\mathrm{DG}}(M,I_C) \to 0 \\ 0 \to \operatorname{Hom}_{\mathrm{DG}}(P_C,N) \to \operatorname{Hom}_{\mathrm{DG}}(P_B,N) \to \operatorname{Hom}_{\mathrm{DG}}(P_A,N) \to 0\,,\end{gathered}$$

длинные точные последовательности когомологий которых и дают требуемое. □

Упражнение 5.17. Убедитесь, что функторы Ext^i дистрибутивны по отношению к конечным прямым суммам.

Пример 5.6 (абелевы группы)
Для свободной абелевой группы F и произвольной группы A имеем $\operatorname{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(F,A) = 0$ при всех $i \neq 0$. Циклический модуль кручения $\mathbb{Z}/(n)$ имеет двучленную свободную резольвенту $\mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z}$ с дифференциалом $z \mapsto nz$. Поэтому $\operatorname{Ext}^1(\mathbb{Z}/(n),M) = 0$ при $i \neq 0, 1$. Остающиеся две группы

$$\begin{gathered}\operatorname{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(n),M) = \operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(\mathbb{Z}/(n),M) = \operatorname{Tors}_n(M) = \{m \in M \mid nm = 0\}\,, \\ \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(n),M) = \operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}}_0(\mathbb{Z}/(n),M) = M/nM\,.\end{gathered}$$

В частности, $\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(n), \mathbb{Z}/(m)) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(n), \mathbb{Z}/(m)) \simeq \mathbb{Z}/(m,n)$. На этом сходство с функтором $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}$ кончается. Функтор $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}$ не симметричен, и для вычисления $\mathrm{Ext}(N, \mathbb{Z})$ надо использовать инъективную резольвенту $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$. Тем самым, $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z}) = 0$ при $i \neq 0, 1$ для всех M. Если N является группой кручения, то $\mathrm{Hom}(N, \mathbb{Q}) = 0$, и значит, $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = N^\vee$ (ср. с предл. 5.3 на стр. 104).

Упражнение 5.18. Покажите, что $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[p^{-1}], \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел.

5.6. Неканонические резольвенты. Ограниченный справа комплекс A называется *левой ацикличной резольвентой* объекта M, *пригодной для вычисления* $\mathrm{Ext}(*, N)$, если единственной ненулевой гомологией комплекса A является $H_0(A) \simeq M$ и вдобавок $\mathrm{Ext}^i(A_k, N) = 0$ при всех $i > 0$ и всех k. Таковы, например, все проективные резольвенты. Симметричным образом, ограниченный слева комплекс B называется *правой ацикличной резольвентой* объекта N, *пригодной для вычисления* $\mathrm{Ext}(M, *)$, если единственной ненулевой гомологией комплекса B является $H^0(B) \simeq N$ и при этом $\mathrm{Ext}^i(M, B^k) = 0$ при всех $i > 0$ и всех k. Таковы, к примеру, все инъективные резольвенты. Теми же рассуждениями, что и в n° 5.3.1 доказываются

Предложение 5.8
Для любых пригодных для вычисления Ext левой ацикличной резольвенты A объекта M и правой ацикличной резольвенты B объекта N при всех k имеют место канонические изоморфизмы $\mathrm{Ext}^k(M, N) \simeq H_k\big(\mathrm{Hom}(A, N)\big) \simeq H^k\big(\mathrm{Hom}(M, B)\big)$. □

Предложение 5.9
Пусть единственными ненулевыми (ко)гомологиями ограниченного слева комплекса K и ограниченного справа комплекса L являются $H^0(K) \simeq M$ и $H_0(L) \simeq N$. Тогда при каждом k имеется канонический изоморфизм

$$\mathrm{Ext}^k(M, N) \simeq H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^M, L)\right) \simeq H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(K, I_N)\right),$$

где P^M и I_N суть проективная и инъективная резольвенты объектов M и N. □

Упражнение 5.19. Докажите эти два предложения при помощи подходящих спектральных последовательностей.

Пример 5.7 (явное соответствие между коциклами в предл. 5.9)
Пусть класс $[\xi] \in \mathrm{Ext}^k(M, N)$ представлен коциклом $\xi : M \to I^k_N$ в комплексе модулей $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(M, I_N)$, где I_N — инъективная резольвента модуля N, как в опр. 5.4, и пусть модуль M включается в точную последовательность $0 \to M \to K^0 \to K^1 \to K^2 \to \cdots$, так что единственной ненулевой когомологией комплекса K, получающегося выбрасыванием из этой последовательности модуля M, является $H^0(K) \simeq M$. Тогда коциклу ξ можно *канонически* сопоставить коцикл $\xi_K \in \mathrm{Hom}^k_{\mathrm{DG}}(K, I_N)$, представляющий тот же класс $[\xi_K] = [\xi] \in \mathrm{Ext}^k(M, N)$ в модуле когомологий $H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(K, I_N)\right)$, отождествлённом с $\mathrm{Ext}^k(M, N)$ согласно предл. 5.9. Для этого этого по лем. 5.1 продолжим стрелку ξ

до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\xi"] & K^0 \arrow[r, "d_K^0"] \arrow[d, dashed, "\xi^0"] & K^1 \arrow[r, "d_K^1"] \arrow[d, dashed, "\xi^1"] & K^2 \arrow[r, "d_K^2"] \arrow[d, dashed, "\xi^2"] & \cdots \arrow[r, "d_K^{\nu-1}"] & K^\nu \arrow[r, "d_K^\nu"] \arrow[d, dashed, "\xi^\nu"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \operatorname{im}\xi \arrow[r, hook] & I_M^k \arrow[r, "d_I^k"] & I_M^{k+1} \arrow[r, "d_I^{k+1}"] & I_M^{k+2} \arrow[r, "d_I^{k+2}"] & \cdots \arrow[r, "d_I^{k+\nu-1}"] & I_M^{k+\nu} \arrow[r, "d_I^{k+\nu}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

При чётном k полученное отображение $K \to I_N[k]$ является коциклом в $\mathrm{Hom}^k_{\mathrm{DG}}(K, I_N)$, и мы положим $\xi_K^\nu = \xi^\nu$. При нечётном k коцикличность означает антикоммутирование с дифференциалами, и мы положим ξ_K^ν равным коциклу, получающемуся из (ξ^ν) сменой знака у всех стрелок с нечётными номерами, что делает все квадраты кроме самого левого антикоммутативными. На языке формул оба случая охватываются одним предписанием

$$\xi_K^\nu \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{k\nu}\xi^\nu . \tag{5-18}$$

Формальная выкладка, доказывающая, что это коцикл, такова:

$$[d, \xi_K]^\nu = d_I^{k+\nu}\xi_K^\nu - (-1)^k \xi_K^{\nu+1} d_K^\nu = (-1)^{k\nu}\left((-1)^\nu d_I^{k+\nu}\xi^\nu - \xi^{\nu+1}d_K^\nu\right) = 0 .$$

Упражнение 5.20. Убедитесь, что если коцикл $\xi = d_I\gamma \in \mathrm{Hom}^k_{\mathrm{DG}}(M, I_N)$ был кограницей отображения $\gamma : M \to I_N^{k-1}$, то по лем. 5.1 это отображение поднимается до такой гомотопии $\gamma_K \in \mathrm{Hom}^{k-1}_{\mathrm{DG}}(K, I_N)$, что $\xi_K = [d, \gamma] = d_I\gamma - (-1)^{k-1}\gamma d_K$.

Таким образом, мы получаем корректно определённое отображение

$$H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(M, I_N)\right) \to H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(K, I_N)\right) . \tag{5-19}$$

Обратное к нему отображение сопоставляет коциклу $\xi_K \in \mathrm{Hom}^k_{\mathrm{DG}}(K, I_N)$ композицию

$$\xi_K^0 \circ \iota : M \to I_N^k .$$

Упражнение 5.21. Убедитесь, что гомотопные нулю коциклы при этом переходят в границы комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(M, I_N)$, и постройте явный изоморфизм

$$H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P_M, N)\right) \xrightarrow{\sim} H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P_M, L)\right)$$

аналогичный только что предъявленному изоморфизму(5-19).

Обратите внимание, что мы дали явное конструктивное доказательство предл. 5.9.

Теорема 5.3 (спектральная последовательность Кюннета для Hom'ов)
Если у ограниченного справа комплекса $\cdots \to K_{k+1} \to K_k \to K_{k-1} \to \cdots$ и ограниченного слева комплекса $\cdots \to L^{\ell-1} \to L^\ell \to L^{\ell+1} \to \cdots$ все $\mathrm{Ext}^i(K_j, L^k) = 0$ при $i \neq 0$ для всех[1] j и k, то имеется спектральная последовательность когомологического типа с

$$E_2^{p,q} = \bigoplus_{k+\ell=q} \mathrm{Ext}^p\left(H_k(K), H^\ell(L)\right) ,$$

сходящаяся к градуированным факторам некоторой убывающей с ростом p фильтрации на $H^{p+q}\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(K, L)\right)$.

[1]Например, это условие выполнено, когда K состоит из проективных объектов или L состоит из инъективных объектов.

Доказательство. Обозначим через P и I проективные резольвенты Картана – Эйленберга[1] комплексов K и L. Это бикомплексы, p-е столбцы которых, как градуированные объекты, имеют вид

$$P_p = P^{B_p} \oplus P^{H_p} \oplus P^{B_{p-1}} \quad \text{и} \quad I^p = I_{B^p} \oplus I_{H^p} \oplus I_{B^{p+1}}\,, \tag{5-20}$$

где P^{B_p}, P^{H_p} и I_{B^p}, I_{H^p} суть проективные и инъективные резольвенты для модулей p-х (ко)границ $B_p = B_p(K)$, $B^p = B^p(L)$ и (ко)гомологий $H_p = H_p(K)$, $H^p = H^p(L)$ комплексов K, L, а горизонтальные дифференциалы $\partial_1 : P_p \to P_{p-1}$ и $\delta_1 : I^p \to I^{p+1}$ действуют на суммы (5-20) тождественно отображая первое слагаемое на третье и аннулируя два других слагаемых. По отношению к действию вертикальных дифференциалов ∂_2 и d_2 p-е столбцы бикомплексов P и I являются, соответственно, проективной и инъективной резольвентами объектов K_p и L^p. Комплекс $T = \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(\mathrm{Tot}\,P, \mathrm{Tot}\,I)$ можно рассматривать как свёртку бикомплекса с компонентами

$$T^{p,q} = \bigoplus_{\substack{k+\ell=p\\ i+j=q}} \mathrm{Hom}(P_{k,i}, I^{\ell,j})$$

и дифференциалами $D_1 : \varphi \mapsto d_1 \circ \varphi - (-1)^{|\varphi|}\varphi \circ \partial_1$ и $D_2 =: \varphi \mapsto d_2 \circ \varphi - (-1)^{|\varphi|}\varphi \circ \partial_2$, где ∂_1 и d_1 суть горизонтальные, а ∂_2 и d_2 — вертикальные дифференциалы бикомплексов P и I соответственно.

Упражнение 5.22. Убедитесь, что $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(\mathrm{Tot}\,P, \mathrm{Tot}\,I) = \bigoplus_{p,q} T^{p,q}$, дифференциал комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(\mathrm{Tot}\,P, \mathrm{Tot}\,I)$ действительно равен $D_1 + D_2$, и $D_1D_2 = -D_2D_1$.

К гомологиям $H^{p+q}\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(\mathrm{Tot}\,P, \mathrm{Tot}\,I)\right)$ сходится две спектральных последовательности. Таблица ${}^{I}\!E^1$ первой из них образованна гомологиями горизонтального дифференциала D_1 и имеет в q-том столбце прямую сумму $\bigoplus_{k+\ell=q} \mathrm{Hom}\left(P^{H_k}, I_{H_\ell}\right)$, т. е. представляет собою комплекс, вычисляющий $\bigoplus_{k+\ell=q} \mathrm{Ext}(H_k, H^\ell)$: p-я группа когомологий q-го столбца относительно вертикального дифференциала D_2 имеет заявленный в теореме вид ${}^{I}\!E^2_{p,q} = \bigoplus_{k+\ell=q} \mathrm{Ext}^p\left(H_k(K), H^\ell(L)\right)$. Таблица ${}^{II}\!E^1$ второй спектральной последовательности образована гомологиями вертикального дифференциала D_2 в комплексах $T^{p,*}$, которые являются прямыми суммами комплексов $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}\left(P_{k,*}, I^{\ell,*}\right)$ с $k + \ell = p$, вычисляющих $\mathrm{Ext}^q(K_k, L^\ell)$. По условию, они отличны от нуля только при $q = 0$ и равны ${}^{II}\!E^1_{p,0} = \bigoplus_{k+\ell=p} \mathrm{Hom}(K_k, L^\ell)$. Поэтому следующая таблица ${}^{II}\!E^2_{p,q} = {}^{II}\!E^\infty_{p,q}$ является предельной и имеет на каждой диагонали $p + q = n$ ровно одну ненулевую клетку, и там стоит $H_{p+q}\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(K, L)\right)$. □

Следствие 5.6 (формула универсальных коэффициентов)
Пусть в условиях теор. 5.3 ограниченный справа комплекс K состоит из проективных объектов и вдобавок все образы $B_i = \mathrm{im}(\partial : K_{i+1} \to K_i)$ его дифференциала тоже проективны. Тогда для любого ограниченного слева комплекса L имеется точная последовательность

$$0 \to \bigoplus_{\gamma+\delta=n+1} \mathrm{Ext}^1\left(H_\gamma(K), H^\delta(L)\right) \to H_n\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(K, L)\right) \to \mathrm{Hom}^n_{\mathrm{DG}}\left(H(K), H(L)\right) \to 0\,. \tag{5-21}$$

[1] См. опр. 5.2 на стр. 98.

Доказательство. Применение к точной тройке $0 \to Z_i \to K_i \to B_{i-1} \to 0$ функтора $\mathrm{Hom}(\,*\,, N)$ в произвольный объект N показывает, что $\mathrm{Ext}^k(Z_i, N) = 0$ при $k \neq 0$ для всех i, т. е. все Z_i тоже проективны. Поскольку, гомологии комплекса K имеют проективные резольвенты длины два

$$0 \to B_{q+1} \to Z_q \to H_q(L) \to 0\,,$$

при $p \neq 0, 1$ все $\mathrm{Ext}^p(H_k(K), H_\ell(L)) = 0$ для всех k, ℓ, и спектральная последовательность из теор. 5.1 стабилизируется на второй таблице $E^2_{p,q} = E^\infty_{p,q}$, сосредоточенной в двух столбцах $p = 0, 1$:

$$\begin{array}{cccc}
0 & \bigoplus\limits_{\alpha+\beta=q+1} \mathrm{Hom}\left(H_\alpha(K), H_\beta(L)\right) & \bigoplus\limits_{\gamma+\delta=q+1} \mathrm{Ext}^1\left(H_\gamma(K), H_\delta(L)\right) & 0 \\
0 & \bigoplus\limits_{\alpha+\beta=q} \mathrm{Hom}\left(H_\alpha(K), H_\beta(L)\right) & \bigoplus\limits_{\gamma+\delta=q} \mathrm{Ext}^1\left(H_\gamma(K), H_\delta(L)\right) & 0 \\
0 & \bigoplus\limits_{\alpha+\beta=q-1} \mathrm{Hom}\left(H_\alpha(K), H_\beta(L)\right) & \bigoplus\limits_{\gamma+\delta=q-1} \mathrm{Ext}^1\left(H_\gamma(K), H_\delta(L)\right) & 0\,.
\end{array}$$

Это и означает, что $H_n(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(K, L))$ является расширением вида (5-14). □

Замечание 5.2. Вместо проективности объектов K_i в условии сл. 5.6 можно было бы требовать проективность всех Z_i. Кроме того, можно было не накладывать никаких условий на комплекс K, но наложить симметричные условия на комплекс L: потребовать инъективность всех его границ $B_i(L)$, а также инъективность либо всех L_i, либо всех циклов $Z_i(L)$.

5.7. Умножение Ионеды. Для любой тройки объектов A, B, C композиция морфизмов

$$\mathrm{Hom}(B, C) \otimes \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, C)\,, \quad (\beta, \alpha) \mapsto \beta \circ \alpha\,,$$

канонически продолжается до *умножения Ионеды* или $\smile$-произведения

$$\mathrm{Ext}^j(B, C) \otimes \mathrm{Ext}^i(A, B) \to \mathrm{Ext}^{i+j}(A, C)\,, \tag{5-22}$$

которое вычисляется любым из следующих эквивалентных способов. Зафиксируем проективные и инъективные резольвенты P^A, P^B, P^C и I_A, I_B, I_C модулей A, B, C. Рассмотрим в DG-категории комплексов композиции

$$\begin{gathered}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^B, P^C) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, P^B) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, P^C) \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^B, C) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, P^B) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, C) \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^B, I_C) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, P^B) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, I_C) \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(B, I_C) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, I_C) \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(I_B, I_C) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, I_B) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, I_C) \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(I_B, I_C) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(A, I_B) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(A, I_C) \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(I_B, I_C) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(I_A, I_B) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(I_A, I_C)\,.
\end{gathered} \tag{5-23}$$

Из правила Лейбница вытекает, что композиция коциклов β и α является коциклом:

$$d(\beta\circ\alpha) = (d\beta)\circ\alpha + (-1)^i\beta\circ(d\alpha) = 0\circ\alpha + (-1)^i\beta\circ 0 = 0\,.$$

Добавление к α или β кограницы не меняет класса когомологий их композиции:

$$\begin{gathered}(\alpha+d\gamma)\circ\beta = \alpha\circ\beta + (d\gamma)\circ\beta = \alpha\circ\beta + d(\gamma\circ\beta)\\ \alpha\circ(\beta+d\gamma) = \alpha\circ\beta + \alpha\circ(d\gamma) = \alpha\circ\beta + d(\alpha\circ\gamma)\,.\end{gathered}$$

Следовательно, каждая композиция в (5-23) корректно задаёт на когомологиях умножение (5-22), причём в силу естественности всех изоморфизмов $H^k(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}})\simeq \mathrm{Ext}^k$ из лем. 5.6 все семь строчек в (5-23) приводят к одному и тому же умножению (5-22).

Пример 5.8 (продолжение прим. 5.7)
Вычислим композицию класса $[\xi]\in\mathrm{Ext}^i(A,B)$ и класса $[\eta]\in\mathrm{Ext}^j(B,C)$, представленных коциклами $\xi: A\to I_B^i$ из комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(A,I_B)$ и $\eta: B\to I_C^j$ из комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(B,I_C)$. Для этого по рецепту из лем. 5.1 поднимем стрелку η до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\eta"] & I_B^0 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, "\eta^0"] & I_B^1 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed, "\eta^1"] & I_B^2 \arrow[r, "d_3"] \arrow[d, dashed, "\eta^2"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \operatorname{im}\eta \arrow[r, hook, "d_j"'] & I_C^j \arrow[r, "d_{j+1}"'] & I_C^{j+1} \arrow[r, "d_{j+2}"'] & I_C^{j+2} \arrow[r, "d_{j+3}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

и положим $\eta^\nu_{I_B} = (-1)^{j\nu}\eta^\nu$. Получим коцикл $\eta_{I_B}\in\mathrm{Hom}^j_{\mathrm{DG}}(I_B,I_C)$ который можно перемножить с коциклом ξ согласно предпоследней строчке в (5-23). Получающаяся композиция $\eta\circ\xi_{I_B}\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(A,I_C)$ представляет собою стрелку

$$\eta\circ\xi^i_{I_B} = (-1)^{ij}\eta^i\circ\xi: \ A\to I_C^{i+j}\,,$$

которая является коциклом комплекса $\mathrm{Hom}(A,I_C)$ и представляет класс произведения Ионеды $[\eta]\cup[\xi]\in\mathrm{Ext}^{i+j}(A,C)$. Если бы класс $[\xi]$ был представлен коциклом $\xi': P_i^A\to B$, то тот же самый класс $[\eta]\cup[\xi]\in\mathrm{Ext}^{i+j}(A,C)$ можно было бы гораздо проще представить в когомологиях комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A,I_C)$ однородным морфизмом $P^A\to I_C$ степени $i+j$, единственной ненулевой компонентой которого является композиция $\xi'\eta: P_i^A\to I_C^j$ (убедитесь, что это коцикл).

5.7.1. Класс точной последовательности. Каждой точной последовательности

$$0\longrightarrow N\xrightarrow{\varphi_0} E_1\xrightarrow{\varphi_1} E_2\xrightarrow{\varphi_2}\cdots\xrightarrow{\varphi_{n-2}} E_{n-1}\xrightarrow{\varphi_{n-1}} E_n\xrightarrow{\varphi_n} M\longrightarrow 0 \tag{5-24}$$

можно канонически сопоставить класс когомологий $\vartheta=\vartheta(\varphi_0,\dots,\varphi_n)\in\mathrm{Ext}^n(M,N)$ со следующими свойствами:

(EC0) для изоморфизма $0\longrightarrow N\xrightarrow[\sim]{\varphi_0} M\longrightarrow 0$ класс $\vartheta(\varphi_0)=\varphi_0^{-1}\in\mathrm{Hom}(M,N)$

(EC1) класс $\vartheta(\varphi_0, \varphi_1)$ точной тройки $0 \longrightarrow N \xrightarrow{\varphi_0} E \xrightarrow{\varphi_1} M \longrightarrow 0$ равен образу тождественных эндоморфизмов $\mathrm{Id}_M \in \mathrm{Hom}(M, M)$ и $\mathrm{Id}_N \in \mathrm{Hom}(N, N)$ соответственно под действием связывающих гомоморфизмов

$$\delta^M : \mathrm{Hom}(M, M) \to \mathrm{Ext}^1(M, N) \quad \text{и} \quad \delta_N : \mathrm{Hom}(N, N) \to \mathrm{Ext}^1(M, N)$$

из длинных точных последовательностей Ext'ов, возникающих при применении к тройке функторов $h^M = \mathrm{Hom}(M, *)$ и $h_M\ \mathrm{Hom}(*, N)$

(EC2) класс $\vartheta = \vartheta(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathrm{Ext}^n(M, N)$ последовательности (5-24), которая возникает при слиянии двух более коротких точных последовательностей

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\varphi_0} E_1 \xrightarrow{\varphi_1} E_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_{r-2}} E_{r-1} \xrightarrow{\varphi_{r-1}} E_r \xrightarrow{\zeta} L \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\eta} E_{r+1} \xrightarrow{\varphi_{r+1}} E_{r+2} \xrightarrow{\varphi_{r+2}} \cdots \xrightarrow{\varphi_{n-2}} E_{k-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} E_n \xrightarrow{\varphi_n} M \longrightarrow 0$$

и имеет $\varphi_r = \eta\zeta$, равен произведению Ионеды классов

$$\vartheta(\varphi_0, \dots, \varphi_{r-1}, \zeta) \in \mathrm{Ext}^r(L, N) \quad \text{и} \quad \vartheta(\eta, \varphi_{r+1}, \dots, \varphi_n) \in \mathrm{Ext}^{n-r}(M, L)$$

(EC3) $a_0 a_1 \dots a_k \vartheta(a_0\varphi_0, a_1\varphi_1, \dots, a_k\varphi_k) = \vartheta(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k)$ для любых $a_i \in R$

(EC4) для каждой коммутативной диаграммы с точными строками

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\varphi'_0"] \arrow[d, "\eta"'] & E'_1 \arrow[r, "\varphi'_1"] \arrow[d] & E'_2 \arrow[r, "\varphi'_2"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\varphi'_{k-2}"] & E'_{k-1} \arrow[r, "\varphi'_{k-1}"] \arrow[d] & E'_k \arrow[r, "\varphi'_k"] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d, "\zeta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N'' \arrow[r, "\varphi''_0"] & E''_1 \arrow[r, "\varphi''_1"] & E''_2 \arrow[r, "\varphi''_2"] & \cdots \arrow[r, "\varphi''_{k-2}"] & E''_{k-1} \arrow[r, "\varphi''_{k-1}"] & E''_k \arrow[r, "\varphi''_k"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

в $\mathrm{Ext}^k(M'', N')$ имеет место равенство произведений Ионеды

$$\vartheta(\varphi''_0, \varphi''_1, \dots, \varphi''_k) \smile \eta = \zeta \circ \vartheta(\varphi'_0, \varphi'_1, \dots, \varphi'_k),$$

в частности, когда $N' = N'' = N$, $\eta = \mathrm{Id}_N$, $M' = M'' = M$, $\zeta = \mathrm{Id}_N$, классы верхней и нижней строки одинаковы: $\vartheta(\varphi'_0, \varphi'_1, \dots, \varphi'_k) = \vartheta(\varphi''_0, \varphi''_1, \dots, \varphi''_k)$.

Строятся все эти классы так. Выберем проективную резольвенту $P \twoheadrightarrow M$, инъективную резольвенту $N \hookrightarrow I$ и по лем. 5.1 достроим тождественные эндоморфизмы Id_N, Id_M до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
P_{k+1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{k+1}"] & P_k \arrow[r] \arrow[d, "\pi_k"'] \arrow[ddr, dashed, "\eta"'] & P_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{k-1}"'] & P_{k-2} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{k-2}"'] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_0"'] \arrow[ddr, dashed, "\zeta"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}"'] & E_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\iota^0"] & E_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\iota^1"] & \cdots \arrow[r, "\varphi_{k-2}"] & E_{k-1} \arrow[r, "\varphi_{k-1}"] \arrow[d, "\iota^{k-2}"] & E_k \arrow[r, "\varphi_k"] \arrow[d, "\iota^{k-1}"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\iota^k"] & 0 \arrow[d, "\iota^{k+1}"'] \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & I^{k-2} \arrow[r] & I^{k-1} \arrow[r] & I^k \arrow[r] & I^{k+1}
\end{tikzcd} \tag{5-25}$$

Из левого верхнего квадрата видно, что стрелка $\pi_k \in \mathrm{Hom}^k_{\mathrm{DG}}(P,N)$ является коциклом в $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P,N)$. Её класс $[\pi_k] \in \mathrm{Ext}^k(M,N)$ также представляется изображённым пунктиром коциклом $\eta = \iota^0\varphi_0\pi_k = \iota^0\pi_{k-1}\partial_P : P_k \to I^0$ комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P,I)$. Аналогично, правый нижний квадрат показывает, что стрелка $\iota^k \in \mathrm{Hom}^k_{\mathrm{DG}}(M,I)$ тоже является коциклом, и её класс $[\iota^k] \in \mathrm{Ext}^k(M,N)$ также представляется изображённым пунктиром коциклом $\zeta = \iota^k\varphi_k\pi_0 = d_I\iota^{k-1}\pi_0 : P_0 \to I^k$ комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P,I)$.

Упражнение 5.23. Пусть верхняя и нижняя строки коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
A^i \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, dashed, "f"] & A^{i+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, dashed, "g"] & A^{i+2} \arrow[d, "\gamma"] \\
B^{i+k-1} \arrow[r, "\partial"'] & A^{i+k} \arrow[r, "\partial"'] & A^{i+k-1}
\end{tikzcd}$$

являются фрагментами комплексов A и B. Рассмотрим стрелки

$$f \overset{\mathrm{def}}{=} \partial \circ \alpha = \beta \circ \partial \quad \text{и} \quad g \overset{\mathrm{def}}{=} \partial \circ \beta = \gamma \circ \partial$$

как различные однородные элементы степени k в комплексе $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(A,B)$, единственными ненулевыми компонентами которых являются сами эти стрелки. Убедитесь, что разность $g - (-1)^{k-1}f = \partial\beta - (-1)^{k-1}\beta\partial = [\partial, \beta]$ является кограницей в комплексе $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(A,B)$.

Из упр. 5.23 вытекает, что в (5-25) коцикл η когомологичен $(-1)^{k(k-1)}\zeta = \zeta$. Таким образом возникает класс $[\pi_k] = [\eta] = [\zeta] = [\iota^k] \in \mathrm{Ext}^k(M,N)$. Он обозначается

$$(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\vartheta(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k) \overset{\mathrm{def}}{=} [\pi_k] = [\eta] = [\zeta] = [\iota^k] \in \mathrm{Ext}^k(M,N) \tag{5-26}$$

и называется *классом точной последовательности*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\varphi_0} E_1 \xrightarrow{\varphi_1} E_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_{k-2}} E_{k-1} \xrightarrow{\varphi_{k-1}} E_k \xrightarrow{\varphi_k} M \longrightarrow 0\,.$$

Обратите внимание, что прямо по построению этот класс обладает свойством (EC4). Свойство (EC3) получается из (EC4) и коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "a_0\varphi_0"] \arrow[d, "a_0\cdots a_k"'] & E_1 \arrow[r, "a_1\varphi_1"] \arrow[d, "a_1\cdots a_k"'] & E_2 \arrow[r, "a_2\varphi_2"] \arrow[d, "a_2\cdots a_k"'] & \cdots \arrow[r, "a_{k-2}\varphi_{k-2}"] & E_{k-1} \arrow[r, "a_{k-1}\varphi_{k-1}"] \arrow[d, "a_{k-1}a_k"'] & E_k \arrow[r, "a_k\varphi_k"] \arrow[d, "a_k"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_M"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\varphi_0"] & E_1 \arrow[r, "\varphi_1"] & E_2 \arrow[r, "\varphi_2"] & \cdots \arrow[r, "\varphi_{k-2}"] & E_{k-1} \arrow[r, "\varphi_{k-1}"] & E_k \arrow[r, "\varphi_k"] & M \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

Упражнение 5.24. Убедитесь, что при $k = 0$ класс (5-26) удовлетворяет (EC0).

Чтобы установить согласованность слияния двух точных последовательностей с произведением Ионеды их классов, о которой идёт речь в (EC2), нам понадобится известное школьное правило сложения треугольных чисел[1]:

Упражнение 5.25. Убедитесь, что $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} - nm$.

[1] Собственно ради свойства (EC2) в формулу (5-26) и был внедрён столь витиеватый знак.

Рассмотрим коммутативную диаграмму, верхние вертикальные стрелки которой справа налево продолжают тождественный морфизм Id_M коммутативными квадратами вплоть до стрелки π_{n-r}, затем наклонная пунктирная стрелка π'_{n-r} поднимает стрелку π_{n-r} вдоль эпиморфизма ζ, а последующие наклонные стрелки продолжают стрелку π'_{n-r} коммутативными параллелограммами дальше влево:

$$
\begin{tikzcd}
 & P_n \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\pi'_n"'] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\pi'_{n-1}"'] & \cdots \arrow[r] & P_{n-r} \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\pi'_{n-r}"'] \arrow[d, "\pi_{n-r}"] & P_{n-r-1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{n-r-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_0"] & M \arrow[d, equal] \\
N \arrow[r, "\varphi_0"'] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r, "\varphi_1"'] \arrow[d, "\iota_0"'] & \cdots \arrow[r, "\varphi_{r-1}"'] & E_r \arrow[r, two heads, "\zeta"'] \arrow[d, "\iota_{r-1}"'] & L \arrow[r, hook, "\eta"] \arrow[d, "\iota_r"'] & E_{r+1} \arrow[r, "\varphi_{r+1}"] \arrow[dl, dashed, "\iota'_r"] & \cdots \arrow[r, "\varphi_{n-1}"] & E_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[dl, dashed, "\iota'_{n-1}"] & M \arrow[dl, dashed, "\iota'_n"] \\
N \arrow[r, "\varphi_0"] & I_0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & I_{r-1} \arrow[r] & I_r \arrow[rr] & & \cdots \arrow[r] & I^{n-1} \arrow[r] & I^n\,.
\end{tikzcd}
$$

Симметричным образом, нижние вертикальные стрелки продолжают тождественный морфизм Id_N слева направо коммутативными квадратами вплоть до стрелки ι_r, которая затем расширяется вдоль мономорфизма η до наклонной пунктирная стрелки ι'_r, и та продолжается коммутативными параллелограммами дальше направо. Произведение $\vartheta\left(\varphi_0,\dots,\varphi_{r-1}\zeta\right)\smile\vartheta\left(\eta,\varphi_{r+1},\dots,\zeta\right)\in\mathrm{Ext}^n(M,N)$ представляется взятым со знаком $\frac{r(r+1)}{2}+\frac{(n-r)(n-r+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}+r(n-r)$ когомологическим классом коцикла $\beta=\iota_r\pi_{n-r}\colon P_{n-r}\to I_r$ из комплекса[1] $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P,I)$. Из упр. 5.23 и предыдущей коммутативной диаграммы, перерисованной в виде

$$
\begin{tikzcd}
P_n \arrow[r] \arrow[d, "\pi'_n"'] \arrow[ddr, dashed, "\alpha"'] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi'_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_{n-r} \arrow[r] \arrow[d, "\pi'_{n-r}"'] \arrow[ddr, dashed, "\beta"'] & P_{n-r-1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{n-r-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\pi_0"'] \arrow[ddr, dashed, "\gamma"'] & M \arrow[d, equal] \\
N \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r] \arrow[d, "\iota_0"] & \cdots \arrow[r, "\varphi_{r-1}"] & E_r \arrow[r, "\eta\zeta"] \arrow[d, "\iota_{r-1}"'] & E_{r+1} \arrow[r, "\varphi_{r+1}"] \arrow[d, "\iota'_r"] & \cdots \arrow[r] & E_n \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\iota'_{n-1}"'] & M \arrow[d, "\iota'_n"] \\
N \arrow[r, hook] & I_0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & I_{r-1} \arrow[r] & I_r \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & I^{n-1} \arrow[r] & I^n\,,
\end{tikzcd}
$$

мы заключаем, что β когомологичен коциклу $(-1)^{r(n-1)}\alpha$. Так как класс $\vartheta(\varphi_0,\dots,\varphi_n)$ представляется коциклом $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}[\alpha]$ и $r(n-r)+r(n-1)\equiv 0 \pmod 2$, мы убеждаемся в справедливости (EC2). Свойство (EC1) вытекает из следующего более общего факта, весьма полезного в конкретных вычислениях.

Предложение 5.10

Обозначим через $\vartheta\in\mathrm{Ext}^1(M,N)$ класс, ассоциированной с точной тройкой

$$0\to N\xrightarrow{\nu}E\xrightarrow{\mu}M\to 0\,.$$

Тогда для любого модуля A в длинных точных последовательностях когомологий, возникающих при применении к этой тройке функторов $h^A=\mathrm{Hom}(A,*)$ и $h_A=\mathrm{Hom}(*,A)$ связывающий гомоморфизм $\delta^A\colon\ \mathrm{Ext}^k(A,M)\to\mathrm{Ext}^{k+1}(A,N)$ задаётся левым $\smile$-умножением на класс $\vartheta\colon\xi\mapsto\vartheta\smile\xi$, а связывающий гомоморфизм $\delta_A\colon\ \mathrm{Ext}^k(N,A)\to\mathrm{Ext}^{k+1}(M,A)$ задаётся правым $\smile$-умножением на класс $(-1)^{k+1}\vartheta\colon\xi\mapsto(-1)^{k+1}\xi\smile\vartheta$.

[1] Написанная стрелка является единственной ненулевой компонентой этого коцикла.

Доказательство. Выберем проективную резольвенту $P^A \twoheadrightarrow A$, инъективную резольвенту $N \hookrightarrow I_N$ и рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
& P^A_{k+1} \arrow[r, "\partial^A_{k+1}"] \arrow[d, "\eta"'] \arrow[ddr, dashed, "\alpha"'] & P^A_k \arrow[d, "\xi'"'] \arrow[dr, "\xi"] \arrow[ddr, dashed, "\beta"'] & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}_N"'] & E \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\iota^0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\iota^1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota"'] & I^0_M \arrow[r, "d^0_M"'] & I^1_M \,. &
\end{tikzcd} \tag{5-27}$$

Нижние два квадрата задают класс $\vartheta(\nu,\mu) = -[\iota^1] \in \mathrm{Ext}^1(M,N)$, где $\iota^1 : M \to I^1_M$ рассматривается как коцикл комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(M, I_N)$. Верхняя трапеция описывает действие связывающего гомоморфизма δ^A на класс $[\xi] \in \mathrm{Ext}^k(A, M)$, представленный коциклом $\xi : P^A_k \to M$ комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, M)$: сначала стрелка ξ поднимается вдоль эпиморфизма μ до стрелки $\xi' : P^A_k \to E$, потом переводится дифференциалом комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P, E)$ в стрелку[1] $(-1)^{k+1}\xi' \circ \partial^A_{k+1} : P^A_{k+1} \to E$, которая пропускается через N, так как ξ — коцикл, и даёт такую стрелку $\eta : P^A_{k+1} \to N$, что диаграмма (5-27) становится коммутативной, а класс $\delta^A[\xi] \in \mathrm{Ext}^{k+1}(M,N)$ представляется в когомологиях комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, N)$ коциклом $(-1)^{k+1}\eta$. Этот же класс представляется в когомологиях комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, I_N)$ коциклом $(-1)^{k+1}\alpha = (-1)^{k+1}\iota\circ\eta$, который по упр. 5.23 когомологичен в $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, I_N)$ коциклу $-\beta = -\iota^1 \circ \xi$, задающему произведение Ионеды $\vartheta[\xi]$.

Второе утверждение доказывается рассмотрением симметричной диаграммы, связывающей проективную резольвенту $P^M \twoheadrightarrow M$ с инъективной резольвентой $A \hookrightarrow I_A$:

$$\begin{tikzcd}
P^M_1 \arrow[r, "\partial^M_1"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[ddr, dashed, "\alpha"] & P^M_0 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi_0"'] \arrow[ddr, dashed, "\beta"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}_M"] & 0 \\
N \arrow[r, "\nu"'] \arrow[dr, "\xi"'] & E \arrow[r, "\mu"'] \arrow[d, "\xi'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & 0 \\
& I^k_A \arrow[r, "d^k_A"'] & I^{k+1}_A \,. &
\end{tikzcd}$$

Связывающий гомоморфизм $\delta_A : \mathrm{Ext}^k(N, A) \to \mathrm{Ext}^{k+1}(M, A)$ переводит коцикл ξ комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(N, I_A)$ в коцикл η того же комплекса (без знаков!), а коцикл β, представляющий тот же класс из $\mathrm{Ext}^k(M, A)$, но в когомологиях комплекса $\mathrm{Hom}(P^M, I_A)$, когомологичен по упр. 5.23 коциклу $(-1)^k\alpha$. Произведение $[\xi] \circ \vartheta(\nu,\mu)$ представляется к тех же когомологиях коциклом $-\alpha = -\xi \circ \pi_1$. □

[1] См. прим. 4.3 на стр. 68.

§6. Гомологии и когомологии алгебр

6.1. Бар-конструкция. В этом разделе мы напишем несколько конкретных комплексов для вычисления функторов Tor^A и Ext_A для ассоциативной алгебры A с единицей над кольцом $\Bbbk$. По умолчанию мы считаем кольцо «констант» $\Bbbk$ коммутативным, а алгебру A и все модули над нею — свободными $\Bbbk$-модулями, называя их для простоты «векторными пространствами». В зависимости от приложений эти требования можно ослаблять. От коммутативности $\Bbbk$ можно вообще отказаться, если внимательно следить за тем, с какой стороны действуют константы и каждый раз оговаривать это в условиях. Свободу $\Bbbk$-модулей при вычислении Tor'ов можно заменить на плоскость, а при вычислении Ext'ов — на проективность. Мы не будем этого делать, чтобы не загромождать формулировок. Читатель ничего не потеряет, считая $\Bbbk$ полем, а все модули — векторными пространствами над $\Bbbk$.

Основными действующими лицами при построении резольвент будут модули

$$\mathbb{B}_n^A \overset{\text{def}}{=} A^{\otimes(n+2)} = \underbrace{A \otimes A \otimes \ldots \otimes A}_{n+2},$$

где тензорные произведения без указания, над чем они вычисляются, по умолчанию означают тензорные произведения над $\Bbbk$. В наших предположениях $\mathbb{B}_0^A = A \otimes A$ является свободным A-A бимодулем ранга 1 с базисом $1 \otimes 1$ над A-A. Для бо́льших n пространство $\mathbb{B}_n^A$ также представляет собою свободный[1] A-A бимодуль, базис в котором составляют элементы вида $1 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1$, где каждый из a_i независимо пробегает некоторый базис[2] A над $\Bbbk$. Обозначим через

$$\partial = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i : \mathbb{B}_n^A \to \mathbb{B}_{n-1}^A$$

гомоморфизм A-A-бимодулей, i-е слагаемое которого

$$\partial_i : A^{\otimes(n+2)} \to A^{\otimes(n+1)}$$
$$\partial_i \left(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}\right) = a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes a_i a_{i+1} \otimes a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}$$

заменяет $(i+1)$-е слева тензорное умножение $\otimes$ на произведение в алгебре A, так что

$$\partial \left(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}\,. \tag{6-1}$$

Предложение 6.1

Бесконечная влево последовательность гомоморфизмов

$$\cdots \to \mathbb{B}_3^A \xrightarrow{\partial} \mathbb{B}_2^A \xrightarrow{\partial} \mathbb{B}_1^A \xrightarrow{\partial} \mathbb{B}_0^A \xrightarrow{\partial_0} A \to 0\,, \tag{6-2}$$

[1] Читатель может по своему усмотрению заменять слово «свободный» на «плоский» или «проективный», а слово «базис» — на «система порождающих».

[2] Один и тот же для всех i.

в которой $\partial_0 :\ a_0 \otimes a_1 \mapsto a_0 a_1$, является свободной резольвентой бимодуля[1] A в категории A-A бимодулей.

Доказательство. Тензор $\partial^2(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1})$ является суммой разложимых тензоров вида $\cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \cdots$, где $j > i$ и может быть равен $i+1$, в каковом случае a_{i+1} совпадает с a_j. Каждое такое слагаемое возникает в сумме ровно дважды: как $\partial_i \partial_j (a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1})$ со знаком $(-1)^{i+j}$ и как $\partial_{j-1}\partial_i(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1})$ с противоположным знаком $(-1)^{i+j-1}$. Поэтому $\partial^2 = 0$ в (6-2). Отображение $\gamma :\ A^{\otimes(n+1)} \to A^{\otimes(n+2)}$, действующее на разложимые тензоры по правилу

$$\gamma(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = 1 \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n\,, \tag{6-3}$$

задаёт гомотопию между тождественным эндоморфизмом и нулевым, поскольку

$$\partial \circ \gamma \left(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}\right) = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i 1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots\,,$$

$$\gamma \circ \partial \left(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}\right) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i 1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots\,,$$

откуда $\partial\gamma + \gamma\partial = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}^A}$. □

6.1.1. Бар-резольвента левого A-модуля. Тензорно умножая (6-2) справа над A на произвольный левый A-модуль M, мы получаем свободную резольвенту

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{B}_3^A(M) \xrightarrow{\partial^M} \mathbb{B}_2^A(M) \xrightarrow{\partial^M} \mathbb{B}_1^A(M) \xrightarrow{\partial^M} \mathbb{B}_0^A(M) \xrightarrow{\partial_0^M} M \longrightarrow 0 \tag{6-4}$$

модуля M в категории A-$\mathcal{M}od$, состоящую из модулей

$$\mathbb{B}_n^A(M) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{B}_n^A \otimes_A M = A^{\otimes(n+1)} \otimes A \otimes_A M \simeq A^{\otimes(n+1)} \otimes M\,.$$

Базис $\mathbb{B}_n^A(M)$ над A состоит из тензоров вида $1 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m$, где каждый a_i и m независимо пробегают некоторые базисы над $\Bbbk$ в A и M соответственно. Дифференциал $\partial^M = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i^M$, где $0 \leqslant i \leqslant n$ и каждый оператор ∂_i^M заменяет $(i+1)$-й слева знак $\otimes$ в мономе $a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m \in \mathbb{B}_n^A(M)$ на умножение. В частности, $\partial_0^M :\ A \otimes_{\Bbbk} M \to M,\ a \otimes m \mapsto am$.

6.1.2. Бар-комплекс для вычисления Tor^A. Тензорно умножая комплекс[2] $\mathbb{B}^A(M)$ слева на правый A-модуль N над A и пользуясь каноническим отождествлением

$$N \otimes_A \mathbb{B}_n^A(M) = N \otimes_A A^{\otimes(n+1)} \otimes M \simeq N \otimes A^{\otimes n} \otimes M\,,$$

мы получаем для вычисления функторов $\mathrm{Tor}^A(N, M)$ бар-комплекс $\mathbb{B}^A(M, N)$

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \mathbb{B}_3^A(N, M) \xrightarrow{\partial} \mathbb{B}_2^A(N, M) \xrightarrow{\partial} \mathbb{B}_1^A(N, M) \xrightarrow{\partial} \mathbb{B}_0^A(N, M) \to 0 \tag{6-5}$$

[1]Обратите внимание, что A *не* является свободным A-A бимодулем. Например, каждое произведение $a_1 a_2$ задаёт соотношение: «a_2, умноженное слева на a_1, равно a_1, умноженному справа на a_2».

[2]Получающийся из (6-4) отбрасыванием самого правого члена M.

в котором $\mathbb{B}_n^A(N, M) \stackrel{\text{def}}{=} N \otimes A^{\otimes k} \otimes M$ и дифференциал $\partial = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \partial_i$, где каждый граничный оператор $\partial_i : N \otimes A^{\otimes n} \otimes M \to N \otimes A^{\otimes(n-1)} \otimes M$ при $0 \leqslant i \leqslant n$ заменяет $(i+1)$-й слева знак $\otimes$ в мономе $n \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m \in \mathbb{B}_n^M$ на умножение:

$$\partial(n \otimes a \otimes m) = na \otimes m - n \otimes am$$
$$\partial(n \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes m) = na_1 \otimes a_2 \otimes m - n \otimes a_1 a_2 \otimes m + n \otimes a_1 \otimes a_2 m \text{ и т. д.}$$

Первая формула лишний раз показывает, что $\operatorname{Tor}_0^A(N, M) = H_0\left(\mathbb{B}^A(N, M)\right) = N \otimes_A M$ является фактором тензорного произведения $\mathbb{B}_0^A(N, M) = N \otimes_{\Bbbk} M$ по соотношениям $na \otimes m = n \otimes am$.

6.1.3. Бар-комплекс для вычисления Ext_A. Действуя на комплекс $\mathbb{B}^A(M)$ из формулы (6-4) функтором $\operatorname{Hom}_A(*, N)$, где N это *левый* A-модуль, и пользуясь каноническими отождествлениями

$$\operatorname{Hom}_A\left(\mathbb{B}_n^A(M), N\right) = \operatorname{Hom}_A\left(A^{\otimes(n+1)} \otimes M, N\right) \simeq$$
$$\simeq \operatorname{Hom}_{\Bbbk}\left(A^{\otimes n} \otimes M, N\right) \simeq \operatorname{Hom}_{\Bbbk}\left(A^{\otimes n}, \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(M, N)\right),$$

мы получаем для вычисления функторов $\operatorname{Ext}_A(N, M)$ бар-комплекс $\mathbb{B}_A(M, N)$

$$0 \to \mathbb{B}_A^0(M, N) \xrightarrow{d} \mathbb{B}_A^1(M, N) \xrightarrow{d} \mathbb{B}_A^2(M, N) \xrightarrow{d} \mathbb{B}_A^3(M, N) \xrightarrow{d} \cdots, \tag{6-6}$$

где $\mathbb{B}_A^n(M, N) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\Bbbk}\left(A^{\otimes n}, \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(M, N)\right)$ удобно представлять себе как пространство полилинейных над $\Bbbk$ отображений $\varphi : A^n \to \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(M, N)$, сопоставляющих каждому набору из n элементов $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A^n$ линейный оператор $\varphi_{a_1, a_2, \ldots, a_n} : M \to N$, линейно зависящий от каждого из $a_i \in A$. Это пространство имеет естественную структуру A-A бимодуля: $\Bbbk$-линейные отображения $a\varphi : M \to N$ и $\varphi a : M \to N$ действуют по стандартным правилам $a\varphi : m \mapsto a\varphi(m)$ и $\varphi a : m \mapsto \varphi(am)$. Дифференциал $d : \mathbb{B}_A^n(M, N) \to \mathbb{B}_A^{n+1}(M, N)$ переводит $\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(M, N)$-значную n-линейную форму φ на A^n в $(n+1)$-линейную форму $d\varphi$ с компонентами

$$\begin{aligned}(d\varphi)_{a_0, a_1, \ldots, a_n} : m \mapsto a_0 \varphi_{a_1, a_2, \ldots, a_n}(m) +& \\ + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} \varphi_{a_0, \ldots, a_{i-1}, (a_i a_{i+1}), a_{i+2} \ldots, a_n}(m) +& \\ + (-1)^{n+1} \varphi_{a_0, \ldots, a_{n-1}}(a_n m).&\end{aligned} \tag{6-7}$$

При $n = 0,\ 1,\ 2$ действие дифференциала описывается равенствами

$$(d\varphi)_a(m) = a\varphi(m) - \varphi(am)$$
$$(d\varphi)_{a_1, a_2}(m) = a_1 \varphi_{a_2}(m) - \varphi_{a_1 a_2}(m) + \varphi_{a_1}(a_2 m)$$
$$(d\varphi)_{a_1, a_2, a_3}(m) = a_1 \varphi_{a_2, a_3}(m) - \varphi_{(a_1 a_2), a_3}(m) + \varphi_{a_1, (a_2 a_3)}(m) - \varphi_{a_1, a_2}(a_3 m).$$

Первое из них утверждает, что $\operatorname{Ext}_A^0(M, N) = H_0\big(\mathbb{B}_A(M, N)\big) \simeq \operatorname{Hom}_A(M, N)$ это пространство A-линейных отображений $M \to N$.

Лемма 6.1 ($\frown$-произведение перестановочно с бар-дифференциалом)
Для произвольных левых A-модулей L, M и любого коцикла $\psi \in \mathbb{B}^k_A(L,M)$ отображения

$$\begin{gathered} * \frown \psi : \ \mathbb{B}^A_n(L) \to \mathbb{B}^A_{n-k}(M)\,, \quad \tau \mapsto \tau \frown \psi\,, \quad \text{где} \\ (a_0 \otimes \dots \otimes a_k \otimes \ell) \frown \psi \stackrel{\text{def}}{=} a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-k} \otimes \psi_{a_{n-k+1},\dots,a_n}(\ell)\,, \end{gathered} \tag{6-8}$$

включаются в коммутативную диаграмму, строки которой суть бар-комплексы (6-4):

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\partial^L"] & \mathbb{B}^A_{n+1}(L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\frown\psi"] & \mathbb{B}^A_n(L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\frown\psi"] & \mathbb{B}^A_{n-1}(L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\frown\psi"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}^A_{n-k+1}(M) \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}^A_{n-k}(M) \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}^A_{n-k-1}(M) \arrow[r, "\partial^M"] & \cdots\,. \end{tikzcd} \tag{6-9}$$

Доказательство. Для разложимого тензора $\tau = a_0 \otimes \dots \otimes a_n \otimes \ell \in \mathbb{B}^A_n(L) = A^{\otimes(n+1)} \otimes L$

$$\begin{aligned} \partial^L(\tau) \frown \psi &= \Big(\sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu a_0 \otimes \dots \otimes a_\nu a_{\nu+1} \otimes \dots \otimes a_n \otimes \ell \Big) \frown \psi + \\ &\quad + (-1)^n \left(a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-1} \otimes a_n \ell \right) \frown \psi = \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-k-1} (-1)^\nu a_0 \otimes \dots \otimes a_\nu a_{\nu+1} \otimes \dots \otimes a_{n-k} \otimes \psi_{a_{n-k+1},\dots,a_n}(\ell) + \\ &\quad + \sum_{\nu=n-k}^{n-1} (-1)^\nu a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-k-1} \otimes \psi_{a_{n-k},\dots,(a_\nu a_{\nu+1}),\dots,a_n}(\ell) + \\ &\quad + (-1)^n a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-k-1} \otimes \psi_{a_{n-k},\dots,a_{n-1}}(a_n \ell)\,. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \partial^M(\tau \frown \psi) &= \partial^M \left(a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-k} \otimes \psi_{a_{n-k+1},\dots,a_n}(\ell) \right) = \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-k-1} (-1)^\nu a_0 \otimes \dots \otimes a_\nu a_{\nu+1} \otimes \dots \otimes a_{n-k} \otimes \psi_{a_{n-k+1},\dots,a_n}(\ell) + \\ &\quad + (-1)^{n-k} a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-k-1} \otimes a_{n-k} \psi_{a_{n-k+1},\dots,a_n}(\ell) = \\ &= \partial^L(\tau) \frown \psi + (-1)^{n-k} a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-k-1} \otimes (d\psi)_{a_{n-k},\dots,a_n}(\ell)\,, \end{aligned} \tag{6-10}$$

ибо по формуле (6-7) форма $d\psi \in \mathbb{B}^{k+1}_A(L,M)$ имеет компоненты

$$\begin{aligned} (d\psi)_{a_{n-k},\dots,a_n}(\ell) &= a_{n-k} \psi_{a_{n-k+1},\dots,a_n}(\ell) + \\ &\quad + \sum_{\nu=n-k}^{n-1} (-1)^{\nu-(n-k)+1} \psi_{a_{n-k},\dots,(a_{n-k+\nu} a_{n-k+\nu+1}),\dots,a_n}(\ell) + \\ &\quad + (-1)^{k+1} \psi_{a_{n-k},\dots,a_{n-1}}(a_n \ell)\,. \end{aligned}$$

Поскольку форма $\psi \in \mathbb{B}^k_A(L,M)$ является коциклом, второе слагаемое в последней строке из (6-10) зануляется. $\square$

Упражнение 6.1. Покажите, что при замене коцикла ψ на когомологичный набор вертикальных стрелок на диаграмме (6-9) заменится на гомотопный.

Следствие 6.1
В условиях лем. 6.1 набор стрелок $\psi^\nu : \mathbb{B}^A_{k+\nu}(L) \to \mathbb{B}_\nu(M)$, $\tau \mapsto (-1)^{k\nu}\tau \frown \psi$ является коциклом степени k в комплексе $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}_A}\left(\mathbb{B}^A(L), \mathbb{B}^A(M)\right)$ и представляет тот же когомологический класс в $\mathrm{Ext}^k(L, M) \simeq H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}_A}\left(\mathbb{B}^A(L), \mathbb{B}^A(M)\right)\right)$, что и бар коцикл $\psi \in \mathbb{B}^k_A(L, M)$.

Доказательство. Это выводится из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial^L"] & \mathbb{B}^A_{k+\nu}(L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\frown\psi"] & \cdots \arrow[r, "\partial^L"] & \mathbb{B}^A_{k+1}(L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\frown\psi"] & \mathbb{B}^A_k(L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\frown\psi"] & \mathbb{B}^A_k(L)/\operatorname{im}\partial^L \arrow[r] \arrow[d, "\frown\psi"] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}^A_\nu(M) \arrow[r, "\partial^M"] & \cdots \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}^A_1(M) \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}^A_0(M) \arrow[r, "\partial^M"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

тем же рассуждением, что и формула (5-18) из прим. 5.7 на стр. 114. □

6.1.4. Умножение Ионеды ($\smile$-произведение). Из сл. 6.1 вытекает, что произведение Ионеды когомологических классов коциклов $\varphi \in \mathbb{B}^i_A(M, N)$ и $\psi \in \mathbb{B}^j_A(L, M)$ представляется в комплексе $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}_A}\left(\mathbb{B}^A(L), N\right)$ композицией $\varphi \circ \psi^j$ отображения

$$\varphi : \mathbb{B}^A_i(M) \to N, \quad a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes m \mapsto a_0\varphi_{a_1,\dots,a_i}(m),$$

задаваемого бар-коциклом φ, и отображения $\psi^j : \mathbb{B}^A_{i+j}(L) \to \mathbb{B}^A_i(M)$, $\tau \mapsto (-1)^{ij}\tau \frown \psi$ из сл. 6.1, которое действует на разложимые тензоры по правилу

$$a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i+j} \otimes \ell \mapsto (-1)^{ij} a_0 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes \psi_{a_{i+1},\dots,a_{i+j}}(\ell).$$

Таким образом, в бар-комплексе $\mathbb{B}_A(L, N)$ композиция $\varphi \circ \psi^j : \mathbb{B}^A_{i+j}(L) \to N$ представляется полилинейной формой $\varphi \smile \psi : A^{i+j} \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(L, N)$ с компонентами

$$(\varphi \smile \psi)_{a_1,\dots,a_i,b_1,\dots,b_j} = (-1)^{|\varphi|\cdot|\psi|}\varphi_{a_1,\dots,a_i} \circ \psi_{b_1,\dots,b_j}. \tag{6-11}$$

Форма (6-11) называется $\smile$-*произведением* полилинейных форм

$$\varphi : A^i \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(L, M) \quad \text{и} \quad \psi : A^j \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M, N).$$

6.1.5. $\frown$-произведение $\mathrm{Tor}^A_n(N, L) \otimes \mathrm{Ext}^k_A(L, M) \to \mathrm{Tor}^A_{n-k}(N, M)$. Тензорно умножая над A слева на правый A-модуль N диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial^L"] & \mathbb{B}^A_{n+1}(L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\psi^{n-k+1}"] & \mathbb{B}^A_n(L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\psi^{n-k+1}"] & \mathbb{B}^A_{n-1}(L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\psi^{n-k+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}^A_{n-k+1}(M) \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}^A_{n-k}(M) \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}^A_{n-k-1}(M) \arrow[r, "\partial^M"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

вертикальные стрелки которой s-коммутируют с бар-дифференциалами по сл. 6.1, мы получаем диаграмму бар-комплексов из n° 6.1.2 на стр. 124

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial^L"] & \mathbb{B}^A_{n+1}(N,L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_N\otimes\psi^{n-k+1}"] & \mathbb{B}^A_{n}(N,L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_N\otimes\psi^{n-k+1}"] & \mathbb{B}^A_{n-1}(N,L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_N\otimes\psi^{n-k+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}^A_{n-k+1}(N,M) \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}^A_{n-k}(N,M) \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}^A_{n-k-1}(N,M) \arrow[r, "\partial^M"] & \cdots \,.
\end{tikzcd}$$

вертикальные стрелки которой по-прежнему s-коммутируют с бар-дифференциалами и, стало быть, корректно задают $\Bbbk$-линейные отображения между гомологиями

$$* \frown \psi : \ \mathrm{Tor}^A_n(N,L) \to \mathrm{Tor}^A_{n-k}(N,M), \quad \tau \mapsto \tau \frown \psi \,,$$

которые называются $\frown$-произведениями с когомологическим классом $[\psi] \in \mathrm{Ext}^k(L,M)$ коцикла $\psi \in \mathbb{B}^k_A(L,M)$. На уровне разложимых тензоров, $\frown$-произведение переводит элемент $x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes y \in \mathbb{B}^A_n(N,L) = N \otimes A^{\otimes n} \otimes L$ в элемент

$$\big(x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes y\big) \frown \psi = x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-k} \otimes \psi_{a_{n-k+1},\dots,a_n}(y) \in \mathbb{B}^A_{n-k}(N,M) \,.$$

6.1.6. Нормализованные бар-резольвенты. Обозначим через $\overline{A} = A/\Bbbk$ коядро $\Bbbk$-линейного вложения $\Bbbk \hookrightarrow A$, $\lambda \mapsto \lambda \cdot 1_A$, и положим

$$\overline{\mathbb{B}}^A_n \overset{\text{def}}{=} A \otimes \underbrace{\overline{A} \otimes \ldots \otimes \overline{A}}_{n} \otimes A \,.$$

Упражнение 6.2. Убедитесь, что бар-дифференциал из форм. (6-1) на стр. 123 и стягивающая его гомотопия из форм. (6-3) на стр. 124 корректно факторизуются до отображений $\overline{\partial} : \ \overline{\mathbb{B}}^A_n \to \overline{\mathbb{B}}^A_{n-1}$ и $\overline{s} : \ \overline{\mathbb{B}}^A_n \to \overline{\mathbb{B}}^A_{n+1}$.

Полученный в результате такой факторизации точный комплекс

$$\dots \to \overline{\mathbb{B}}^A_3 \xrightarrow{\overline{\partial}} \overline{\mathbb{B}}^A_2 \xrightarrow{\overline{\partial}} \overline{\mathbb{B}}^A_1 \xrightarrow{\overline{\partial}} \overline{\mathbb{B}}^A_0 \xrightarrow{\overline{\partial}_0} A \to 0 \,, \tag{6-12}$$

с дифференциалом $\overline{\partial}$, который действует на базисные тензоры по правилу

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}(1 \otimes \overline{a}_1 \otimes \overline{a}_2 \otimes \dots \otimes \overline{a}_n \otimes 1) = a_1 \otimes \overline{a}_2 \otimes \dots \otimes \overline{a}_n \otimes 1 + \\
+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i 1 \otimes \overline{a}_1 \otimes \dots \otimes \overline{a}_{i-1} \otimes \overline{a_i a}_{i+1} \otimes \overline{a}_{i+2} \otimes \dots \otimes \overline{a}_n \otimes 1 + \\
+ (-1)^n 1 \otimes \overline{a}_1 \otimes \dots \otimes \overline{a}_{n-1} \otimes a_n \,,
\end{aligned} \tag{6-13}$$

называется *нормализованной бар-резольвентой* алгебры A. Возникающие из него бар-резольвента $\overline{\mathbb{B}}^A(M)$ для левого A-модуля M и бар-комплексы $\overline{\mathbb{B}}^A(N,M)$ и $\overline{\mathbb{B}}_A(M,N)$ для вычисления $\mathrm{Tor}^A(N,M)$ и $\mathrm{Ext}_A(M,N)$ тоже называются *нормализованными*. Дифференциалы последних двух комплексов при малых n имеют вид

$$\begin{gathered}
\overline{\partial}(n \otimes \overline{a} \otimes m) = na \otimes m - n \otimes am \,, \\
\overline{\partial}(n \otimes \overline{a}_1 \otimes \overline{a}_2 \otimes m) = na_1 \otimes \overline{a}_2 \otimes m - n \otimes \overline{a_1 a}_2 \otimes m + n \otimes \overline{a}_1 \otimes a_2 m \,, \\
(d\varphi)_{\overline{a}}(m) = a\varphi(m) - \varphi(am) \,, \\
(d\varphi)_{\overline{a}_1,\overline{a}_2}(m) = a_1 \varphi_{\overline{a}_2}(m) - \varphi_{\overline{a_1 a}_2}(m) + \varphi_{\overline{a}_1}(a_2 m) \,,
\end{gathered}$$

из которого ясно, что они определены корректно. Мнемоническое правило при вычислениях с нормализованными бар-комплексами состоит в том, чтобы полагать равными нулю все тензорные мономы, содержащие сомножитель из $\Bbbk$, и все полилинейные формы, у которых один из нижних индексов лежит в $\Bbbk$.

6.2. Аугументированные ассоциативные алгебры. Ассоциативная алгебра A с единицей над полем $\Bbbk$ называется *аугументированной*[1], если задан сюрьективный гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\varepsilon : A \twoheadrightarrow \Bbbk$, именуемый *аугументацией*. Его ядро $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_\varepsilon(A) \overset{\text{def}}{=} \ker \varepsilon$ называется *идеалом аугументации*. Аугументация наделяет одномерное векторное пространство $\Bbbk$ структурой A-модуля, на котором идеал $\mathfrak{I}$ действует нулём. Этот модуль называется *тривиальным A-модулем*[2].

Для произвольного A-модуля N векторные пространства

$$H_n(A, N) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Tor}_n^A(N, \Bbbk) \quad \text{и} \quad H^n(A, N) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Ext}_A^n(\Bbbk, N)$$

называются *гомологиями* и *когомологиями* алгебры A с коэффициентами в N. При любом N пространства когомологий $H^n(A, N)$ являются A-модулями, а при $N = \Bbbk$ образуют градуированную $\Bbbk$-алгебру относительно умножения Ионеды.

Нормализованная бар-резольвента $\overline{\mathbb{B}}^A(\Bbbk)$ тривиального левого модуля $\Bbbk$ после канонического отождествления $A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes \Bbbk$ с $A \otimes \overline{A}^{\otimes n}$ приобретает вид

$$\cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} A \otimes \overline{A} \otimes \overline{A} \otimes \overline{A} \xrightarrow{\overline{\partial}} A \otimes \overline{A} \otimes \overline{A} \xrightarrow{\overline{\partial}} A \otimes \overline{A} \xrightarrow{\overline{\partial}} A \to 0 \tag{6-14}$$

и как векторное пространство представляет собою тензорное произведение над $\Bbbk$ алгебры A и тензорной алгебры $\mathbb{T}(\overline{A})$ векторного пространства $\overline{A}$. Дифференциал $\overline{\partial}$ переводит базисный вектор $1 \otimes \overline{a}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{a}_n$ свободного A-модуля $\overline{\mathbb{B}}_n^A(\Bbbk) = A \otimes \mathbb{T}^n(\overline{A})$ в альтернированную сумму

$$a_1 \otimes \overline{a}_2 \otimes \cdots \otimes \overline{a}_n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i 1 \otimes \overline{a}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{a_i a}_{i+1} \otimes \cdots \otimes \overline{a}_n \,. \tag{6-15}$$

(*продолжение следует…*)

[1]В отечественной литературе вместо «аугументированный» и «аугументация» иногда используется термины *пополненный* и *пополнение*, но они слишком многозначны, и в алгебро-геометрических контекстах это может вызывать путаницу.

[2]Не следует путать *тривиальный* A-модуль с *нулевым*.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.1. Транзитивность очевидна, рефлексивность — взять $\xi = \mathrm{Id}$, кососимметричность: в силу возможности сокращать слева (соотв. справа), равенства $\varphi = \psi\xi = \varphi\xi'\xi$ (соотв. $\varphi = \xi\psi = \xi\xi'\psi$) влекут $\xi'\xi = \mathrm{Id}$ (соотв. $\xi\xi' = \mathrm{Id}$), а равенства $\psi = \varphi\xi' = \psi\xi\xi'$ (соотв. $\psi = \varphi\xi' = \psi\xi\xi'$) влекут $\xi\xi' = \mathrm{Id}$ (соотв. $\xi\xi' = \mathrm{Id}$)

Упр. 1.6. Типичный ответ: «$\ln|x| + C$, где C — произвольная константа» *неверен*[1]. На самом деле деле C является сечением *постоянного пучка* $\mathbb{R}^{\sim}$ над несвязным открытым множеством $\mathbb{R} \smallsetminus 0$.

Упр. 1.12. Элементу $a \in F(A)$ отвечает естественное преобразование

$$f_X : \operatorname{Hom}(A, X) \to F(X)\,,$$

посылающее стрелку $\varphi : A \to X$ в значение отображения $F(\varphi) : F(A) \to F(X)$ на элементе a. Обратное отображение сопоставляет естественному преобразованию f_* значение отображения $f_A : h^A(A) \to F(A)$ на элементе $\mathrm{Id}_A \in h^A(A)$. Проверяется это с помощью построенной по произвольной стрелке $\varphi : A \to X$ диаграммы

$$\begin{tikzcd} h^A(A) = \operatorname{Hom}(A,A) \arrow[r, "h^A(\varphi)"] \arrow[d, "f_A"'] & \operatorname{Hom}(A,X) = h^A(X) \arrow[d, "f_X"] \\ F(A) \arrow[r, "F(\varphi)"] & F(X)\,, \end{tikzcd} \tag{6-16}$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ, так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)\big(f_A(\mathrm{Id}_A)\big)$.

Упр. 2.7. Отображения $\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(B, Y) \to Y$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$, и $Y \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(B, Y) \to Y$, $y \mapsto (\varphi : b \mapsto yb)$, являются взаимно обратными A-линейными справа изоморфизмами.

Упр. 2.9. Отображения $x \otimes_B b \mapsto xb$ и $x \mapsto x \otimes \otimes_B 1$ являются взаимно обратными A-линейными справа изоморфизмами между $X \otimes_B B$ и X.

Упр. 2.11. См. последний раздел 7.3.3 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/lec-07.pdf.

Упр. 2.12. Непрерывному отображению $f : |X| \to Y$ из $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(|X|, Y)$ биективно соответствует естественное по $[n] \in \operatorname{Ob}\Delta$ преобразование $f_n : X_n \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y)$ из $\operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h}(X, S(Y))$, сопоставляющее точке $x \in X_n$ композицию

$$f \circ \iota|_{x\times\Delta^n} : \Delta^n \to |X| \to Y\,,$$

где $\iota|_{x\times\Delta^n} : \Delta^n \to |X|$ это ограничение отображения факторизации[2]

$$\iota : \bigsqcup_{n\geqslant 0} X_n \times \Delta^n \to |X|$$

на правильный симплекс $\{x\}\times\Delta^n \subset X_n\times\Delta^n$ (убедитесь, что f_n функториально зависит от комбинаторного симплекса $[n]$). Обратная биекция сопоставляет естественному

[1] И в былые годы абитуриентам мехмата случалось получать за такой ответ двойку на устном вступительном экзамене по математике.

[2] Непрерывного в силу определения фактор топологии.

по $[n] \in \operatorname{Ob}\varDelta$ набору отображений $f_n : X_n \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{Top}}(\varDelta^n, Y)$ отображение $|X| \to Y$, переводящее класс точки $(x, s) \in X_n \times \varDelta^n$ по модулю соотношений $(X(\varphi)x, s) = (x, \varphi s)$ в значение непрерывного отображения $f_n(x) \colon \varDelta^n \to Y$ в точке $s \in \varDelta^n$ (убедитесь, что это значение не зависит от выбора представителя (x, s) в его классе эквивалентности). Естественное преобразование $t_Y : |S(Y)| \to Y$ переводит класс пары

$$(g : \varDelta^n \to Y, t \in \varDelta^n) \in S_n(Y) \times \varDelta^n = \operatorname{Hom}_{\mathcal{Top}}(\varDelta^n, Y) \times \varDelta^n ,$$

представляющей точку из фактор пространства $|S(Y)|$, геометрической реализации симплициального множества $S(Y)$, в точку $g(t) \in Y$ (убедитесь, что отображение t_Y корректно определено, непрерывно и функториально по топологическому пространству Y). Действие естественного преобразования $s_X \colon X \to S\big(|X|\big)$ над комбинаторным симплексом $[n] \in \operatorname{Ob}\varDelta$ переводит точку $x \in X_n$ в сингулярный симплекс

$$\iota|_{x\times\varDelta^n} : \varDelta^n \to |X|$$

топологического пространства $|X|$ (убедитесь, что он функториален по $[n] \in \operatorname{Ob}\varDelta$ и предпучку $F \in \operatorname{Ob}\mathcal{Fun}(\varDelta^{\mathrm{opp}}, \mathcal{S}et)$).

Упр. 2.14. Начальное множество и начальное топологическое пространство пусты, конечное множество и конечное топологическое пространство это одна точка. Начальный и конечный объекты категории групп это единичная группа[1]. В категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей начальный и конечный объект это нуль.

Упр. 2.15. В категории групп нулевым объектом является единичная группа. В категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей нулевой объект это нулевая абелева группа.

Упр. 2.19. Гомоморфизмы коммутативных колец $A \leftarrow K \to A$ наделяют A и B структурами K-алгебр, и копроизведение $A \otimes_K B$ это *тензорное произведение* K-алгебр, т. е. фактор свободного K-модуля с базисом $A \times B$ (произведение в категории множеств) по подмодулю, порождённому всевозможными разностями

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \varkappa_1 b_1 + \varkappa_2 b_2) - \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_i \varkappa_j (a_i, b_j)$$

с $\lambda_i, \varkappa_i \in K$, $a_i \in A$, $\beta_j \in B$ (ср. с n° 2.2). Произведение на классах эквивалентности задаётся покомпонентно: $(a_1 \otimes_K b_1) \cdot (a_2 \otimes_K b_2) = (a_1 a_2) \otimes_K (b_1 b_2)$.

Упр. 2.23. Применяя первое условие Оре[2] к произвольным элементам $s = s_1$ и $\varrho = s_2$ из S получаем ведущие из s_1 и s_2 стрелки λ и t с общим концом $\lambda s_1 = t s_2 \in S$. Применяя второе условие Оре[3] к паре стрелок $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}_S(s, s')$, где $s' = \varphi s = \psi s$, получаем такую стрелку $t \in \operatorname{Hom}_S(s', ts')$, что $t\varphi = t\psi$.

Упр. 2.24. Так как по предыдущему упр. 2.23 категория S фильтрующаяся, у дробей $s_1^{-1}\varrho_1$ и $s_2^{-1}\varrho_2$ есть общий знаменатель $t = \lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$ с $\lambda_1, \lambda_2 \in R$. Тогда $s_1^{-1}\varrho_1 + s_2^{-1}\varrho_2 = t^{-1}(\lambda_1\varrho_1 + \lambda_2\varrho_2)$.

[1] Т. е. группа, состоящая только из единичного элемента.

[2] См. формулу (LO_1) на стр. 34.

[3] См. формулу (LO_2) на стр. 34.

Упр. 3.1. Всё вытекает из дистрибутивности: $\varphi\alpha = \varphi\beta \iff \varphi(\alpha - \beta) = 0$.

Упр. 3.3. Морфизмы $\nabla_Y : Y \oplus Y \to Y$, $\varphi \oplus \psi : X \oplus X \to Y \oplus Y$ и $\Delta_X : X \to X \oplus X$ задаются матрицами

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_Y \\ \mathrm{Id}_Y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_X & \mathrm{Id}_X \end{pmatrix},$$

произведение которых равно 1×1-матрице $(\varphi + \psi)$.

Упр. 3.4. Инъективность ι_ν и сюрьективность π_ν вытекает из равенства $\pi_\nu\iota_\nu = \mathrm{Id}_{X_\nu}$. Инъективность σ редуцируется к инъективности морфизма $X \oplus Y \to X \oplus Y$ между суммами *двух* объектов при помощи леммы Цорна: рассмотрите чум таких подмножеств $S \subset N$, что отображение $\coprod_{\nu \in S} X_\nu \to \prod_{\nu \in S} X_\nu$ инъективно.

Упр. 3.8. Ядро задаёт правый сопряжённый функтор к функтору $\mathcal{A} \to \mathcal{A}r$, $X \mapsto \{X \to 0\}$, а коядро — левый сопряжённый функтор к функтору $\mathcal{A} \to \mathcal{A}r$, $X \mapsto \{X \to 0\}$.

Упр. 3.9. Коядро является фактором по *замыканию* образа. Вложение дискретной группы $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$ со стандартной топологией и плотные обмотки торов мономорфны и эпиморфны, но не обратимы.

Упр. 3.10. Если φ обратим, то он не делит нуль ни справа, ни слева, откуда $\ker\varphi = 0$ и $\operatorname{coker}\varphi = 0$. Если $\ker\varphi = 0$ и $\operatorname{coker}\varphi = 0$, то по **??** диаграмма (3-6) приобретает вид

$$\begin{tikzcd} 0 & Y \arrow[l] & Y \arrow[l, "\mathrm{Id}_Y"'] \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\mathrm{Id}_X"] & X \arrow[u, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd},$$

и обратимость $\overline{\varphi}$ влечёт обратимость φ. Если φ мономорфен или эпиморфен, его каноническое разложение (3-6) имеет, соответственно, вид

$$\begin{tikzcd} \operatorname{coker}\varphi & Y \arrow[l, "\varsigma"'] & \ker\varsigma \arrow[l, "\varkappa'"'] \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, equal, "\mathrm{Id}_X"] & X \arrow[u, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd} \quad \text{или} \quad \begin{tikzcd} 0 & Y \arrow[l] \arrow[r, equal, "\mathrm{Id}_Y"] & Y \\ \ker\varphi \arrow[r, "\varkappa"] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\varsigma'"] & \operatorname{coker}\varkappa \arrow[u, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd},$$

и $\overline{\varphi}$ задаёт канонические изоморфизмы $X \xrightarrow{\sim} \ker\varsigma$ и $\operatorname{coker}\varkappa \xrightarrow{\sim} Y$.

Упр. 3.11. β' и φ выражаются друг через друга как $\beta' = \pi_A\varphi$ и $\varphi = \iota_A\beta' + \iota_B\beta$. Симметрично, α' и φ^{-1} связаны формулами $\alpha' = \varphi^{-1}\iota_B$ и $\varphi^{-1} = \alpha\pi_A + \alpha'\pi_B$ (убедитесь, что и φ, и φ^{-1} в обоих случаях обратимы!). Точная тройка абелевых групп

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{z \mapsto 2z} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(2) \longrightarrow 0$$

нерасщепима, т. к. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(2), \mathbb{Z}) = 0$.

Упр. 3.12. Если функтор F сохраняет точность троек, то он переводит каноническое разложение (3-7) любого морфизма φ в каноническое разложение морфизма $F(\varphi)$, в частности — переводит $\operatorname{im}\varphi$ в $\operatorname{im}(F(\varphi))$.

Упр. 3.18. $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}//\mathbb{Z}$ очевидно удовлетворяют условиям лем. 3.2 на стр. 54. Гомоморфизм $\varphi : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ с $\varphi(a) \neq 0$ сначала строится на порождённом элементом a подмодуле

$\mathbb{Z}\cdot a$ (изоморфном либо $\mathbb{Z}$ либо $\mathbb{Z}/(n)$), а потом по инъективности продолжается на весь модуль A.

Упр. 3.19. Согласно предл. 3.3 на стр. 49 все четыре стрелки в декартовом квадрате

$$\begin{tikzcd} A\times_M B \arrow[r, hook, "\alpha'"] \arrow[d, hook, "\beta'"'] & B \arrow[d, hook, "\beta"'] & K \arrow[l, hook', "\varkappa"'] \\ A \arrow[r, hook, "\alpha"] & M \arrow[r, two heads, "\pi"] & M/A \end{tikzcd}$$

инъективны. Всякий подобъект $\varkappa : K \hookrightarrow B$, для которого $\pi\beta\varkappa = 0$ допускает такое вложение $\varkappa' : K \hookrightarrow B = \ker\pi$, что $\alpha\varkappa' = \beta\varkappa'$. Поэтому он вкладывается и в $A\times_M B$.

Упр. 3.20. Подобъекты любого объекта X инъективно вкладываются в множество подгрупп группы $h^P(X) = \mathrm{Hom}(P, X)$.

Упр. 3.21. Для любого $Y\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ функтор $h_Y : Z\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, Y)$ переведёт точную последовательность $\mathrm{Hom}(G, X)\otimes G \xrightarrow{c} X \to \mathrm{coker}\, c \to 0$ в точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathrm{coker}\, c, Y) to \,\mathrm{Hom}(X, Y) \xrightarrow{c^*} \mathrm{Hom}(G, Y)^{\mathrm{Hom}(G,X)},$$

в которой c^* сопоставляет стрелке $\varphi : X\to Y$ график функции

$$h^G(\varphi) = \varphi^* : \mathrm{Hom}(G, X) \to \mathrm{Hom}(G, Y), \quad \psi \mapsto \varphi\psi .$$

Инъективность c^* равносильна инъективности $h^G : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(h^G(X), h^G(Y))$. Если $\mathrm{coker}\, c = 0$, отображение c^* инъективно и h^G строг. Наоборот, если h^G строг, то $\mathrm{Hom}(\mathrm{coker}\, c, Y) = 0$ для всех Y, и беря $Y = \mathrm{coker}\, c$, заключаем, что $Y = 0$.

Упр. 3.22. Воспользуйтесь функториальным по X изоморфизмом $\mathrm{Hom}_R\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(X\otimes_{\mathbb{Z}} R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\big)$.

Упр. 3.23. Если обе стрелки в $A \hookrightarrow B \hookrightarrow C$ являются существенными расширениями, то для любого подобъекта $S \hookrightarrow C$ сквозное отображение $\beta : B \hookrightarrow C \twoheadrightarrow C/S$ имеет ненулевое ядро K, и сквозное отображение $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow B/K$ имеет ненулевое ядро. Поэтому композиция $A \to B/K = \mathrm{im}\,\beta \to C/S$ тоже имеет ненулевое ядро.

Упр. 3.24. Для любого подобъекта $N \hookrightarrow E_\omega$ в силу гротендиковости имеем $N \simeq N\times_{E_\omega} E_\omega \simeq N\times_{E_\omega} \mathrm{colim}_{\nu<\omega} E_\nu \simeq \mathrm{colim}_{\nu<\omega} N\times_{E_\omega} E_\nu$. Поэтому найдётся такой η, что $N\times_{E_\omega} E_\eta \neq 0$, и стало быть, N имеет непустое пересечение со всеми E_τ с $\tau \geqslant \eta$. Так как расширение $X \hookrightarrow E_\eta$ и все расширения $E_\nu \hookrightarrow E_\eta$ с $\nu < \eta$ существенны, то и X, и все E_ν имеют непустое пересечение с ненулевым подобъектом $N\times_{E_\omega} E_\eta \hookrightarrow E_\eta$, а значит и с N, поскольку каноническая стрелка $N\times_{E_\omega} E_\eta \hookrightarrow N$ тоже инъективна.

Упр. 3.25. Для конечной диаграммы компактных объектов $K_\varkappa$ и любой фильтрованной диаграммы X_ν имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\mathrm{colim}\, K_\varkappa, \mathrm{colim}\, X_\nu) = \lim \mathrm{Hom}(K_k, \mathrm{colim}\, X_\nu) = \lim_{\varkappa} \mathop{\mathrm{colim}}_{\nu} \mathrm{Hom}(X_\varkappa, X_\nu) = \\ = \mathop{\mathrm{colim}}_{\nu} \lim_{\varkappa} \mathrm{Hom}(X_\varkappa, X_\nu) = \mathop{\mathrm{colim}}_{\nu} \mathrm{Hom}(\mathrm{colim}\, X_\varkappa, X_\nu) \end{aligned}$$

(в третьем равенстве мы воспользовались предл. 2.9 на стр. 39).

Упр. 3.26. Поскольку всякий эпиморфизм $\pi : R^m \twoheadrightarrow P$ расщепляется, $\ker\pi$ является прямым слагаемым в R^m. Поэтому имеется сюрьекция $R^m \twoheadrightarrow \ker\pi$.

Упр. 4.1. Пусть стрелка α ведёт в объект C, а β — из C. Поскольку $\beta\alpha = 0$, вложение $\alpha' : \operatorname{im}\alpha \hookrightarrow C$ и сюрьекция $\beta' : C \twoheadrightarrow \operatorname{im}\beta$ пропускаются, соответственно, через $\ker\beta$ и $\operatorname{coker}\alpha$ при помощи единственных стрелок ι и π:

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{coker}\varkappa = \operatorname{im}\beta & \\
\ker\zeta = \operatorname{im}\alpha \arrow[r, hook, "\alpha'"] \arrow[dr, hook, "\iota"'] & C \arrow[u, two heads, "\beta'"'] \arrow[r, two heads, "\zeta"'] & \operatorname{coker}\alpha \arrow[ul, "\pi"'] \\
& \ker\beta \arrow[u, hook, "\varkappa"'] &
\end{tikzcd} \tag{6-17}$$

Покажем, что ι является ядром, а π — коядром композиции $\zeta\varkappa : \ker\beta \to \operatorname{coker}\alpha$. Тогда ι автоматически будет инъективен, π — сюрьективен, а $\operatorname{coker}\iota = \operatorname{coim}(\zeta\varkappa)$ будет канонически изоморфен $\operatorname{im}(\zeta\varkappa) = \ker\pi$ в силу абелевости объемлющей категории. Во-первых, $\zeta\varkappa\iota = \zeta\alpha' = 0$. Во-вторых, если $\zeta\varkappa\eta = 0$ для некоторого $\eta : X \to \ker\beta$, то существует единственный такой $\eta' : X \to \ker\zeta = \operatorname{im}\alpha$, что $\varkappa\eta = \alpha'\eta' = \varkappa\iota\eta'$. В силу инъективности $\varkappa$, это равносильно $\eta = \iota\eta'$. Рассуждение про π полностью симметрично.

Упр. 4.2. Пусть симплекс x имеет вершины $0, 1, \dots, n$, упорядоченные по возрастанию. Цепь $\partial^2 x = \sum\limits_{j=0}^{n-1}\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_i(0, 1, \dots, n)$ является суммой $(n-2)$-мерных симплексов вида

$$0,\ 1,\ \dots,\ \hat{\mu},\ \dots,\ \hat{\nu},\ \dots,\ n\,,$$

где $\mu < \nu$ и крышки означают пропуск μ-той и ν-той вершины. Каждый такой симплекс появляется в сумме ровно два раза: как $\partial_\mu\partial_\nu x$ и как $\partial_{\nu-1}\partial_\mu x$, и эти вхождения имеют противоположные знаки.

Упр. 4.3. В обозначениях с рис. 1◇1 на стр. 8 модуль $C_2 \simeq \mathbb{Z}^2$ имеет базис f_1, f_2, модуль $C_1 \simeq \mathbb{Z}^3$ имеет базис e_1, e_2, e_3, модуль $C_0 \simeq \mathbb{Z}$ имеет базис e, а граничный оператор действует на симплексы триангуляции по формулам[1]

$$\partial(f_1) = e_1 - e_3 + e_2 \qquad \partial(f_2) = e_2 - e_3 + e_1$$
$$\partial(e_1) = \partial(e_2) = \partial(e_3) = v - v = 0$$
$$\partial(v) = 0\,.$$

Таким образом, комплекс имеет вид $0 \to \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z} \to 0$, где стрелка $\mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$ нулевая, а стрелка $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^3$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Поэтому $H_2 \simeq \mathbb{Z}$ с базисом $f_1 - f_2$, $H_1 \simeq \mathbb{Z}^2$ с базисом e_1, e_2, $H_0 \simeq \mathbb{Z}^2$ с базисом v.

Упр. 4.6. $\varphi(\xi)$ является коциклом, поскольку $d_W\varphi\xi = \varphi d_V\xi = 0$. Класс $\varphi(\xi + d_V\zeta) = \varphi(\xi) + d_W(\varphi(\zeta))$ по модулю кограниц совпадает с классом $\varphi(\xi)$.

[1] См. формулу (1-7) на стр. 8.

Упр. 4.10. Пусть $\psi : U \to V$ и $d_V\psi = \psi d_U$. Тогда для $\varphi = \delta_W\gamma + \gamma d_V$ имеем $\varphi\psi = \delta_W\gamma\psi + \gamma d_V\psi = \delta_W\gamma\psi + \gamma\psi d_U$.

Упр. 4.11. Если A стягиваем, то единственные отображения $\iota : 0 \to A$ и $\pi : A \to 0$ являются взаимно обратными изоморфизмами в категории $\mathcal{H}o$, т. к. $\pi\iota = \mathrm{Id}_0$, а $\iota\pi = 0 \sim \mathrm{Id}_A$.

Упр. 4.12. Первое проверяется прямой выкладкой:

$$\begin{pmatrix} -d_V & 0 \\ 1 & d_V \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -d_V & 0 \\ 1 & d_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d_V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & d_V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V)} .$$

Аналогично проверяется, что[1] $\iota_{\mathrm{Id}} = [d, \gamma']$ для $\gamma' : v \mapsto \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$, а $\pi_{\mathrm{Id}} = [d, \gamma'']$ для $\gamma'' : \begin{pmatrix} v_1 \\ v \end{pmatrix} \mapsto v_1$.

Упр. 4.13. Базисный моном $\xi_I \otimes x^M = \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_k} \otimes x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m}$ переводится дифференциалом ∂d в

$$\Big(\sum_{i\in I} m_i\Big) \cdot \xi_I \otimes x^M +$$
$$+ \sum_{j\notin I} \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{\nu-1} m_{i_\nu} \cdot \xi_j \wedge \xi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\xi}_{i_\nu} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_k} \otimes x_1^{m_1} \cdots x_{i_\nu}^{m_{i_\nu}-1} \cdots x_j^{m_j+1} \cdots x_n^{m_n} ,$$

а дифференциалом $d\partial$ — в

$$\left(\sum_{j\notin I} (m_j + 1)\right) \cdot \xi_I \otimes x^M +$$
$$+ \sum_{j\notin I} \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{\nu} m_{i_\nu} \cdot \xi_j \wedge \xi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\xi}_{i_\nu} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_k} \otimes x_1^{m_1} \cdots x_{i_\nu}^{m_{i_\nu}-1} \cdots x_j^{m_j+1} \cdots x_n^{m_n} .$$

где «крышка» означает пропуск стоящего под нею сомножителя.

Упр. 4.16. Выберем в $V \otimes V$ и $V^* \otimes V^*$ двойственные базисы ξ_ν и ξ_ν^* так, чтобы ξ_ν с $\nu \in N$ составляли базис в подпространстве $I \subset V \otimes V$, а ξ_μ^* с $\mu \notin N$ — базис в $I^\perp \subset V^* \otimes V^*$. Поскольку $\varkappa = \sum_i x_i \otimes e_i$, где x_i и e_i суть двойственные базисы в V^* и в V, его квадрат

$$\varkappa^2 = -\sum_{ij} \left(x_i \otimes x_j\right) \otimes \left(e_i \otimes e_j\right) \pmod{I^\perp \otimes (V \otimes V) + (V^* \otimes V^*) \otimes I}$$

является классом (по модулю соотношений в алгебре $B \otimes A$) эндоморфизма

$$-\mathrm{Id}_{V\otimes V} \in (V^* \otimes V^*) \otimes (V \otimes V) \simeq \mathrm{End}(V \otimes V) ,$$

который в двойственных базисах ξ_ν и ξ_ν^* в $V \otimes V$ и $V^* \otimes V^*$ тоже запишется как

$$\varkappa^2 = -\sum_{\alpha} \xi_\alpha^* \otimes \xi_\alpha = -\sum_{\nu\in N} \xi_\nu^* \otimes \xi_\nu - \sum_{\mu\notin N} \xi_\mu^* \otimes \xi_\mu \in I^\perp \otimes (V \otimes V) + (V^* \otimes V^*) \otimes I .$$

[1] Напомню, что $\iota_{\mathrm{Id}} : v \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$, а $\pi_{\mathrm{Id}} : \begin{pmatrix} v_1 \\ v \end{pmatrix} \mapsto v_1$.

Упр. 4.21. Корректность j_1: $j(x)$ коцикл, т. к. $dj(x) = jkj(x) = 0$; если $i(x') = i(x_2)$, то $x_2 = x' + k(y)$, и $j(x_2) = j(x') + dy$ когомологичен $j(x')$. Корректность k_1: $k(d(E)) \subset kj(D) = 0$. Равенство нулю композиций ik_1, $j_1 i$ и $k_1 j_1$ вытекает из равенства нулю композиций ik, ji и kj. Если $i(i(x)) = 0$, то $i(x) = k(y)$, причём $d(y) = jk(y) = j(i(x)) = 0$, т. е. $\ker(i) \subset k_1(H(E))$. Если $j_1(i(x)) \in d(E)$, т. е. $j(x) = jk(y)$, то $x = k(y) + i(x')$ и $i(x) = i^2(x')$, т. е. $\ker j_1 \subset i^2(D)$. Если $k_1(y) = k(y) = 0$, то $y = j(x) = j_1(i(x))$, т. е. $\ker(k_1) \subset j_1(i(D))$.

Упр. 4.23. Обе композиции $\iota_B \beta$ и $\iota_D \delta$ переводят элемент $e \in E$ в элемент

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e \end{pmatrix} \in A[1] \oplus C[1] \oplus E = F\,.$$

Упр. 5.5. Проективный модуль является 1-членной проективной резольвентой самого себя.

Упр. 5.6. Первое следует из того, что все три функтора $N \mapsto P^N$, $C \mapsto M \otimes C$, $C \mapsto H_k(C)$ перестановочны с прямыми суммами, а второе — из того, что над коммутативным кольцом имеется канонический изоморфизм $P^M \otimes P^N \simeq P^N \otimes P^M$.

Упр. 5.11. Поскольку для любого элемента $a \in A$ существует морфизм[1] $\psi: A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ с $\psi(a) \neq 0$, сопоставление элементу $a \in A$ гомоморфизма вычисления

$$\mathrm{ev}_a: \ \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\,, \quad \psi \mapsto \psi(a)$$

задаёт вложение $A \hookrightarrow A^{\vee\vee}$. Покажем, что для $A = \mathbb{Z}$ это изоморфизм. Двойственная группа $\mathbb{Z}^{\vee} \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (изоморфизм сопоставляет гомоморфизму $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ значение $\varphi(1) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$). Вложение $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}^{\vee\vee}$ переводит $n \in \mathbb{Z}$ в $n \cdot \mathrm{Id}: \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $x \mapsto nx$. Каждый ненулевой гомоморфизм $\psi: \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ имеет такой вид. Действительно, пусть $\psi([1/m]) \neq 0$. Так как $m[1/m] = 0$, значение $\psi([1/m]) = [n/m] = n[1/m]$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Тогда для любого $k \neq 0$ тоже имеем $k\psi([1/(km)]) = \psi([1/m]) = n[1/m]$, откуда $\psi([1/(km)]) = n[1/(km)]$ и $\psi(1/k) = m\psi(1/(km)) = n[1/k]$, т. е. $\psi = n \cdot \mathrm{Id}$. Тем самым, $\mathbb{Z}^{\vee\vee} \simeq \mathbb{Z}$. Поскольку функтор $h_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$ перестановочен с конечными прямыми суммами, $F^{\vee\vee} \simeq F$ для любой конечно порождённой свободной группы $F = \mathbb{Z}^n$. Если группа A является фактором такой группы F, то коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, hook] \\ F^{\vee\vee} \arrow[r, two heads] & A^{\vee\vee}\,, \end{tikzcd}$$

левая вертикальная стрелка в которой биективна, а обе горизонтальные стрелки эпиморфны, показывает, что правая инъективная вертикальная стрелка тоже биективна. Тем самым $A^{\vee\vee} \simeq A$ для любой конечно порождённой абелевой группы A.

Упр. 5.13. Однородная компонента степени d любого полинома $f = \sum h_i f_i \in I$ имеет вид $\sum h_i^{(d-d_i)} f_i$, где $h_i^{(\alpha)}$ означает однородную компоненту степени α полинома h_i. Тем

[1] См. упр. 3.18 на стр. 54.

самым, $f^{(d)} \in I \cap S_d$, т. е. вместе с каждым многочленом f идеал I содержит и все однородные компоненты f, откуда $I \subset \bigoplus\limits_{\nu} I \cap S_\nu$.

Упр. 5.14. Если в линейной зависимости $\sum h_i f_i = 0$ с однородными h_i имеется h_k с $\deg h_k = 0$, то $h_k \in \Bbbk$ и образующая f_k выражается через остальные. Наоборот, если $f_k = \sum_{i \neq k} g_i f_i$ для некоторых $g_i \in S$, то беря в этом равенстве однородную компоненту степени $d = \deg f_k$, получим выражение $f_k = \sum_{i \neq k} g^{(d-d_i)} f_i$, где $d_i = \deg f_i$ и $g^{(k)}$ означает однородную компоненту степени k многочлена g. Это приводит к линейной зависимости $f_k - \sum_{i \neq k} h_i f_i = 0$ с однородными $h_k = 1$ и $h_i = g^{(d-d_i)}$.

Что касается второго утверждения, то каждая линейная зависимость $\sum h_i f_i = 0$ является суммой своих однородных компонент степени d, имеющих вид

$$f_k = \sum_{i \neq k} g^{(d-d_i)} f_i \,.$$

В свободном модуле $\bigoplus\limits_i S[-d_i]$ такой однородной зависимости отвечает вектор

$$(g_1^{d-d_1}, \dots, g_m^{d-d_m}),$$

каждая компонента которого $g_i^{d-d_i} \in S[-d_i]$ имеет степень d в модуле $S[-d_i]$.

Упр. 5.16. На языке формул переход к изоморфному расширению означает дословно то же самое, что и выбор других прообразов y_i при проекции $X \twoheadrightarrow M$ для образующих $m_i \in M$.

Упр. 5.17. Все функторы $M \mapsto P^M$, $N \mapsto I_N$, $C \mapsto \operatorname{Hom}(M, C)$, $C \mapsto \operatorname{Hom}(C, N)$, $C \mapsto H^k(C)$ перестановочны с конечными прямыми суммами.

Упр. 5.18. Воспользуйтесь точной тройкой $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[p^{-1}] \to \operatorname{colim} \mathbb{Z}/(p^n) \to 0$ и тем, что функтор $\operatorname{Hom}(\,*\,, A)$ переводит копределы в пределы.

Упр. 6.2. Если моном $\mu = a_0 \otimes \dots \otimes a_{n+1}$ содержит $a_k \in \Bbbk$ с $1 \leqslant k \leqslant n$, то в

$$\partial(\mu) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_0 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_{n+1}$$

два не содержащих $\dots \otimes a_k \otimes \dots$ слагаемых $(-1)^{i-1} \partial_{i-1}(\mu) = -(-1)^i \partial_i(\mu)$ сократятся друг с другом, а во все остальные слагаемые a_k войдёт в виде $\dots \otimes a_k \otimes \dots$. Поэтому линейная оболочка тензорных мономов $\mu = a_0 \otimes \dots \otimes a_{n+1}$, содержащих хотя бы одно $a_k \in \Bbbk$ при $1 \leqslant k \leqslant n$, составляет подкомплекс в $\mathbb{B}^A$. Гомотопия s очевидно переводит его в себя. Поэтому она корректно определена на факторе $\overline{\mathbb{B}}^A$ комплекса $\mathbb{B}^A$ по этому подкомплексу.