§6. Гомологии и когомологии алгебр

6.1. Бар-конструкция. В этом разделе мы напишем несколько конкретных комплексов для вычисления функторов Tor^A и Ext_A для ассоциативной алгебры A с единицей над кольцом $\Bbbk$. По умолчанию мы считаем кольцо «констант» $\Bbbk$ коммутативным, а алгебру A и все модули над нею — свободными $\Bbbk$-модулями, называя их для простоты «векторными пространствами». В зависимости от приложений эти требования можно ослаблять. От коммутативности $\Bbbk$ можно вообще отказаться, если внимательно следить за тем, с какой стороны действуют константы и каждый раз оговаривать это в условиях. Свободу $\Bbbk$-модулей при вычислении Tor'ов можно заменить на плоскость, а при вычислении Ext'ов — на проективность. Мы не будем этого делать, чтобы не загромождать формулировок. Читатель ничего не потеряет, считая $\Bbbk$ полем, а все модули — векторными пространствами над $\Bbbk$.

Основными действующими лицами при построении резольвент будут модули

$$\mathbb{B}_n^A \stackrel{\text{def}}{=} A^{\otimes(n+2)} = \underbrace{A \otimes A \otimes \ldots \otimes A}_{n+2} ,$$

где тензорные произведения без указания, над чем они вычисляются, по умолчанию означают тензорные произведения над $\Bbbk$. В наших предположениях $\mathbb{B}_0^A = A \otimes A$ является свободным A-A бимодулем ранга 1 с базисом $1 \otimes 1$ над A-A. Для бо́льших n пространство $\mathbb{B}_n^A$ также представляет собою свободный[1] A-A бимодуль, базис в котором составляют элементы вида $1 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1$, где каждый из a_i независимо пробегает некоторый базис[2] A над $\Bbbk$. Обозначим через

$$\partial = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i : \ \mathbb{B}_n^A \to \mathbb{B}_{n-1}^A$$

гомоморфизм A-A-бимодулей, i-е слагаемое которого

$$\partial_i : \ A^{\otimes(n+2)} \to A^{\otimes(n+1)}$$

$$\partial_i \left(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}\right) = a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes a_i a_{i+1} \otimes a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}$$

заменяет $(i+1)$-е слева тензорное умножение $\otimes$ на произведение в алгебре A, так что

$$\partial \left(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1} . \tag{6-1}$$

Предложение 6.1

Бесконечная влево последовательность гомоморфизмов

$$\cdots \to \mathbb{B}_3^A \xrightarrow{\partial} \mathbb{B}_2^A \xrightarrow{\partial} \mathbb{B}_1^A \xrightarrow{\partial} \mathbb{B}_0^A \xrightarrow{\partial_0} A \to 0 , \tag{6-2}$$

[1] Читатель может по своему усмотрению заменять слово «свободный» на «плоский» или «проективный», а слово «базис» — на «система порождающих».

[2] Один и тот же для всех i.

в которой $\partial_0 :\ a_0 \otimes a_1 \mapsto a_0 a_1$, является свободной резольвентой бимодуля[1] A в категории A-A бимодулей.

Доказательство. Тензор $\partial^2(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1})$ является суммой разложимых тензоров вида $\cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \cdots$, где $j > i$ и может быть равен $i+1$, в каковом случае a_{i+1} совпадает с a_j. Каждое такое слагаемое возникает в сумме ровно дважды: как $\partial_i \partial_j (a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1})$ со знаком $(-1)^{i+j}$ и как $\partial_{j-1}\partial_i(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1})$ с противоположным знаком $(-1)^{i+j-1}$. Поэтому $\partial^2 = 0$ в (6-2). Отображение $\gamma :\ A^{\otimes(n+1)} \to A^{\otimes(n+2)}$, действующее на разложимые тензоры по правилу

$$\gamma(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = 1 \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n\,, \tag{6-3}$$

задаёт гомотопию между тождественным эндоморфизмом и нулевым, поскольку

$$\partial \circ \gamma \left(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}\right) = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i 1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots\,,$$

$$\gamma \circ \partial \left(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}\right) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i 1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots\,,$$

откуда $\partial\gamma + \gamma\partial = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}^A}$. □

6.1.1. Бар-резольвента левого A-модуля. Тензорно умножая (6-2) справа над A на произвольный левый A-модуль M, мы получаем свободную резольвенту

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{B}_3^A(M) \xrightarrow{\partial^M} \mathbb{B}_2^A(M) \xrightarrow{\partial^M} \mathbb{B}_1^A(M) \xrightarrow{\partial^M} \mathbb{B}_0^A(M) \xrightarrow{\partial_0^M} M \longrightarrow 0 \tag{6-4}$$

модуля M в категории A-$\mathcal{M}od$, состоящую из модулей

$$\mathbb{B}_n^A(M) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{B}_n^A \otimes_A M = A^{\otimes(n+1)} \otimes A \otimes_A M \simeq A^{\otimes(n+1)} \otimes M\,.$$

Базис $\mathbb{B}_n^A(M)$ над A состоит из тензоров вида $1 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m$, где каждый a_i и m независимо пробегают некоторые базисы над $\Bbbk$ в A и M соответственно. Дифференциал $\partial^M = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i^M$, где $0 \leqslant i \leqslant n$ и каждый оператор ∂_i^M заменяет $(i+1)$-й слева знак $\otimes$ в мономе $a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m \in \mathbb{B}_n^A(M)$ на умножение. В частности, $\partial_0^M :\ A \otimes_{\Bbbk} M \to M,\ a \otimes m \mapsto am$.

6.1.2. Бар-комплекс для вычисления Tor^A. Тензорно умножая комплекс[2] $\mathbb{B}^A(M)$ слева на правый A-модуль N над A и пользуясь каноническим отождествлением

$$N \otimes_A \mathbb{B}_n^A(M) = N \otimes_A A^{\otimes(n+1)} \otimes M \simeq N \otimes A^{\otimes n} \otimes M\,,$$

мы получаем для вычисления функторов $\mathrm{Tor}^A(N, M)$ бар-комплекс $\mathbb{B}^A(M, N)$

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \mathbb{B}_3^A(N, M) \xrightarrow{\partial} \mathbb{B}_2^A(N, M) \xrightarrow{\partial} \mathbb{B}_1^A(N, M) \xrightarrow{\partial} \mathbb{B}_0^A(N, M) \to 0 \tag{6-5}$$

[1] Обратите внимание, что A *не* является свободным A-A бимодулем. Например, каждое произведение $a_1 a_2$ задаёт соотношение: «a_2, умноженное слева на a_1, равно a_1, умноженному справа на a_2».

[2] Получающийся из (6-4) отбрасыванием самого правого члена M.

в котором $\mathbb{B}_n^A(N,M) \overset{\text{def}}{=} N \otimes A^{\otimes k} \otimes M$ и дифференциал $\partial = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \partial_i$, где каждый граничный оператор $\partial_i : N \otimes A^{\otimes n} \otimes M \to N \otimes A^{\otimes(n-1)} \otimes M$ при $0 \leqslant i \leqslant n$ заменяет $(i+1)$-й слева знак $\otimes$ в мономе $n \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m \in \mathbb{B}_n^M$ на умножение:

$$\partial(n \otimes a \otimes m) = na \otimes m - n \otimes am$$
$$\partial(n \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes m) = na_1 \otimes a_2 \otimes m - n \otimes a_1 a_2 \otimes m + n \otimes a_1 \otimes a_2 m \text{ и т. д.}$$

Первая формула лишний раз показывает, что $\mathrm{Tor}_0^A(N,M) = H_0\left(\mathbb{B}^A(N,M)\right) = N \otimes_A M$ является фактором тензорного произведения $\mathbb{B}_0^A(N,M) = N \otimes_{\Bbbk} M$ по соотношениям $na \otimes m = n \otimes am$.

6.1.3. Бар-комплекс для вычисления Ext_A. Действуя на комплекс $\mathbb{B}^A(M)$ из формулы (6-4) функтором $\mathrm{Hom}_A(*, N)$, где N это *левый* A-модуль, и пользуясь каноническими отождествлениями

$$\mathrm{Hom}_A\left(\mathbb{B}_n^A(M), N\right) = \mathrm{Hom}_A\left(A^{\otimes(n+1)} \otimes M, N\right) \simeq$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}\left(A^{\otimes n} \otimes M, N\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}\left(A^{\otimes n}, \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M,N)\right),$$

мы получаем для вычисления функторов $\mathrm{Ext}_A(N,M)$ бар-комплекс $\mathbb{B}_A(M,N)$

$$0 \to \mathbb{B}_A^0(M,N) \xrightarrow{d} \mathbb{B}_A^1(M,N) \xrightarrow{d} \mathbb{B}_A^2(M,N) \xrightarrow{d} \mathbb{B}_A^3(M,N) \xrightarrow{d} \cdots, \tag{6-6}$$

где $\mathbb{B}_A^n(M,N) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}\left(A^{\otimes n}, \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M,N)\right)$ удобно представлять себе как пространство полилинейных над $\Bbbk$ отображений $\varphi : A^n \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M,N)$, сопоставляющих каждому набору из n элементов $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n$ линейный оператор $\varphi_{a_1,a_2,\dots,a_n} : M \to N$, линейно зависящий от каждого из $a_i \in A$. Это пространство имеет естественную структуру A-A бимодуля: $\Bbbk$-линейные отображения $a\varphi : M \to N$ и $\varphi a : M \to N$ действуют по стандартным правилам $a\varphi : m \mapsto a\varphi(m)$ и $\varphi a : m \mapsto \varphi(am)$. Дифференциал $d : \mathbb{B}_A^n(M,N) \to \mathbb{B}_A^{n+1}(M,N)$ переводит $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M,N)$-значную n-линейную форму φ на A^n в $(n+1)$-линейную форму $d\varphi$ с компонентами

$$\begin{aligned}(d\varphi)_{a_0,a_1,\dots,a_n} : m \mapsto a_0\varphi_{a_1,a_2,\dots,a_n}(m) &+ \\ + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}\varphi_{a_0,\dots,a_{i-1},(a_i a_{i+1}),a_{i+2}\dots,a_n}(m) &+ \\ + (-1)^{n+1}\varphi_{a_0,\dots,a_{n-1}}(a_n m)&.\end{aligned} \tag{6-7}$$

При $n = 0,\ 1,\ 2$ действие дифференциала описывается равенствами

$$(d\varphi)_a(m) = a\varphi(m) - \varphi(am)$$
$$(d\varphi)_{a_1,a_2}(m) = a_1\varphi_{a_2}(m) - \varphi_{a_1 a_2}(m) + \varphi_{a_1}(a_2 m)$$
$$(d\varphi)_{a_1,a_2,a_3}(m) = a_1\varphi_{a_2,a_3}(m) - \varphi_{(a_1 a_2),a_3}(m) + \varphi_{a_1,(a_2 a_3)}(m) - \varphi_{a_1,a_2}(a_3 m).$$

Первое из них утверждает, что $\mathrm{Ext}_A^0(M,N) = H_0\big(\mathbb{B}_A(M,N)\big) \simeq \mathrm{Hom}_A(M,N)$ это пространство A-линейных отображений $M \to N$.

Лемма 6.1 ($\frown$-произведение перестановочно с бар-дифференциалом)
Для произвольных левых A-модулей L, M и любого коцикла $\psi \in \mathbb{B}_A^k(L, M)$ отображения

$$\begin{gathered} * \frown \psi : \ \mathbb{B}_n^A(L) \to \mathbb{B}_{n-k}^A(M), \quad \tau \mapsto \tau \frown \psi, \quad \text{где} \\ (a_0 \otimes \dots \otimes a_k \otimes \ell) \frown \psi \overset{\text{def}}{=} a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-k} \otimes \psi_{a_{n-k+1},\dots,a_n}(\ell), \end{gathered} \tag{6-8}$$

включаются в коммутативную диаграмму, строки которой суть бар-комплексы (6-4):

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\partial^L"] & \mathbb{B}_{n+1}^A(L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\frown\psi"] & \mathbb{B}_n^A(L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\frown\psi"] & \mathbb{B}_{n-1}^A(L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\frown\psi"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}_{n-k+1}^A(M) \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}_{n-k}^A(M) \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}_{n-k-1}^A(M) \arrow[r, "\partial^M"] & \cdots . \end{tikzcd} \tag{6-9}$$

Доказательство. Для разложимого тензора $\tau = a_0 \otimes \dots \otimes a_n \otimes \ell \in \mathbb{B}_n^A(L) = A^{\otimes(n+1)} \otimes L$

$$\begin{aligned} \partial^L(\tau) \frown \psi = \Big(\sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu a_0 \otimes \dots \otimes a_\nu a_{\nu+1} \otimes \dots \otimes a_n \otimes \ell \Big) \frown \psi &+ \\ + (-1)^n \left(a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-1} \otimes a_n \ell \right) \frown \psi &= \\ = \sum_{\nu=0}^{n-k-1} (-1)^\nu a_0 \otimes \dots \otimes a_\nu a_{\nu+1} \otimes \dots \otimes a_{n-k} \otimes \psi_{a_{n-k+1},\dots,a_n}(\ell) &+ \\ + \sum_{\nu=n-k}^{n-1} (-1)^\nu a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-k-1} \otimes \psi_{a_{n-k},\dots,(a_\nu a_{\nu+1}),\dots,a_n}(\ell) &+ \\ + (-1)^n a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-k-1} \otimes \psi_{a_{n-k},\dots,a_{n-1}}(a_n \ell) &. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \partial^M(\tau \frown \psi) = \partial^M \left(a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-k} \otimes \psi_{a_{n-k+1},\dots,a_n}(\ell) \right) &= \\ = \sum_{\nu=0}^{n-k-1} (-1)^\nu a_0 \otimes \dots \otimes a_\nu a_{\nu+1} \otimes \dots \otimes a_{n-k} \otimes \psi_{a_{n-k+1},\dots,a_n}(\ell) &+ \\ + (-1)^{n-k} a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-k-1} \otimes a_{n-k} \psi_{a_{n-k+1},\dots,a_n}(\ell) &= \\ = \partial^L(\tau) \frown \psi + (-1)^{n-k} a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-k-1} \otimes (d\psi)_{a_{n-k},\dots,a_n}(\ell) &, \end{aligned} \tag{6-10}$$

ибо по формуле (6-7) форма $d\psi \in \mathbb{B}_A^{k+1}(L, M)$ имеет компоненты

$$\begin{aligned} (d\psi)_{a_{n-k},\dots,a_n}(\ell) = a_{n-k} \psi_{a_{n-k+1},\dots,a_n}(\ell) &+ \\ + \sum_{\nu=n-k}^{n-1} (-1)^{\nu-(n-k)+1} \psi_{a_{n-k},\dots,(a_{n-k+\nu} a_{n-k+\nu+1}),\dots,a_n}(\ell) &+ \\ + (-1)^{k+1} \psi_{a_{n-k},\dots,a_{n-1}}(a_n \ell) &. \end{aligned}$$

Поскольку форма $\psi \in \mathbb{B}_A^k(L, M)$ является коциклом, второе слагаемое в последней строке из (6-10) зануляется. □

Упражнение 6.1. Покажите, что при замене коцикла ψ на когомологичный набор вертикальных стрелок на диаграмме (6-9) заменится на гомотопный.

Следствие 6.1
В условиях лем. 6.1 набор стрелок $\psi^\nu : \mathbb{B}^A_{k+\nu}(L) \to \mathbb{B}_\nu(M)$, $\tau \mapsto (-1)^{k\nu}\tau \frown \psi$ является коциклом степени k в комплексе $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}_A}\left(\mathbb{B}^A(L), \mathbb{B}^A(M)\right)$ и представляет тот же когомологический класс в $\mathrm{Ext}^k(L, M) \simeq H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}_A}\left(\mathbb{B}^A(L), \mathbb{B}^A(M)\right)\right)$, что и бар коцикл $\psi \in \mathbb{B}^k_A(L, M)$.

Доказательство. Это выводится из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial^L"] & \mathbb{B}^A_{k+\nu}(L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\frown\psi"] & \cdots \arrow[r, "\partial^L"] & \mathbb{B}^A_{k+1}(L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\frown\psi"] & \mathbb{B}^A_k(L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\frown\psi"] & \mathbb{B}^A_k(L)/\operatorname{im}\partial^L \arrow[r] \arrow[d, "\frown\psi"] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}^A_\nu(M) \arrow[r, "\partial^M"] & \cdots \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}^A_1(M) \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}^A_0(M) \arrow[r, "\partial^M"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

тем же рассуждением, что и формула (5-18) из прим. 5.7 на стр. 114. □

6.1.4. Умножение Ионеды ($\smile$-произведение). Из сл. 6.1 вытекает, что произведение Ионеды когомологических классов коциклов $\varphi \in \mathbb{B}^i_A(M, N)$ и $\psi \in \mathbb{B}^j_A(L, M)$ представляется в комплексе $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}_A}\left(\mathbb{B}^A(L), N\right)$ композицией $\varphi \circ \psi^j$ отображения

$$\varphi : \mathbb{B}^A_i(M) \to N, \quad a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes m \mapsto a_0\varphi_{a_1,\dots,a_i}(m),$$

задаваемого бар-коциклом φ, и отображения $\psi^j : \mathbb{B}^A_{i+j}(L) \to \mathbb{B}^A_i(M)$, $\tau \mapsto (-1)^{ij}\tau\frown\psi$ из сл. 6.1, которое действует на разложимые тензоры по правилу

$$a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i+j} \otimes \ell \mapsto (-1)^{ij} a_0 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes \psi_{a_{i+1},\dots,a_{i+j}}(\ell).$$

Таким образом, в бар-комплексе $\mathbb{B}_A(L, N)$ композиция $\varphi \circ \psi^j : \mathbb{B}^A_{i+j}(L) \to N$ представляется полилинейной формой $\varphi \smile \psi : A^{i+j} \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(L, N)$ с компонентами

$$(\varphi \smile \psi)_{a_1,\dots,a_i,b_1,\dots,b_j} = (-1)^{|\varphi|\cdot|\psi|}\varphi_{a_1,\dots,a_i} \circ \psi_{b_1,\dots,b_j}. \tag{6-11}$$

Форма (6-11) называется *$\smile$-произведением* полилинейных форм

$$\varphi : A^i \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(L, M) \quad \text{и} \quad \psi : A^j \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M, N).$$

6.1.5. $\frown$-произведение $\mathrm{Tor}^A_n(N, L) \otimes \mathrm{Ext}^k_A(L, M) \to \mathrm{Tor}^A_{n-k}(N, M)$. Тензорно умножая над A слева на правый A-модуль N диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial^L"] & \mathbb{B}^A_{n+1}(L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\psi^{n-k+1}"] & \mathbb{B}^A_n(L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\psi^{n-k+1}"] & \mathbb{B}^A_{n-1}(L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\psi^{n-k+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}^A_{n-k+1}(M) \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}^A_{n-k}(M) \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}^A_{n-k-1}(M) \arrow[r, "\partial^M"] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

вертикальные стрелки которой s-коммутируют с бар-дифференциалами по сл. 6.1, мы получаем диаграмму бар-комплексов из n° 6.1.2 на стр. 124

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial^L"] & \mathbb{B}^A_{n+1}(N,L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_N\otimes\psi^{n-k+1}"] & \mathbb{B}^A_{n}(N,L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_N\otimes\psi^{n-k+1}"] & \mathbb{B}^A_{n-1}(N,L) \arrow[r, "\partial^L"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_N\otimes\psi^{n-k+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}^A_{n-k+1}(N,M) \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}^A_{n-k}(N,M) \arrow[r, "\partial^M"] & \mathbb{B}^A_{n-k-1}(N,M) \arrow[r, "\partial^M"] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

вертикальные стрелки которой по-прежнему s-коммутируют с бар-дифференциалами и, стало быть, корректно задают $\Bbbk$-линейные отображения между гомологиями

$$*\frown\psi:\ \mathrm{Tor}^A_n(N,L)\to\mathrm{Tor}^A_{n-k}(N,M),\quad \tau\mapsto\tau\frown\psi,$$

которые называются $\frown$-произведениями с когомологическим классом $[\psi]\in\mathrm{Ext}^k(L,M)$ коцикла $\psi\in\mathbb{B}^k_A(L,M)$. На уровне разложимых тензоров, $\frown$-произведение переводит элемент $x\otimes a_1\otimes\dots\otimes a_n\otimes y\in\mathbb{B}^A_n(N,L)=N\otimes A^{\otimes n}\otimes L$ в элемент

$$\big(x\otimes a_1\otimes\dots\otimes a_n\otimes y\big)\frown\psi=x\otimes a_1\otimes\dots\otimes a_{n-k}\otimes\psi_{a_{n-k+1},\dots,a_n}(y)\in\mathbb{B}^A_{n-k}(N,M).$$

6.1.6. Нормализованные бар-резольвенты. Обозначим через $\overline{A}=A/\Bbbk$ коядро $\Bbbk$-линейного вложения $\Bbbk\hookrightarrow A$, $\lambda\mapsto\lambda\cdot 1_A$, и положим

$$\overline{\mathbb{B}}^A_n\overset{\text{def}}{=}A\otimes\underbrace{\overline{A}\otimes\ldots\otimes\overline{A}}_{n}\otimes A.$$

Упражнение 6.2. Убедитесь, что бар-дифференциал из форм. (6-1) на стр. 123 и стягивающая его гомотопия из форм. (6-3) на стр. 124 корректно факторизуются до отображений $\overline{\partial}:\ \overline{\mathbb{B}}^A_n\to\overline{\mathbb{B}}^A_{n-1}$ и $\overline{s}:\ \overline{\mathbb{B}}^A_n\to\overline{\mathbb{B}}^A_{n+1}$.

Полученный в результате такой факторизации точный комплекс

$$\cdots\to\overline{\mathbb{B}}^A_3\xrightarrow{\overline{\partial}}\overline{\mathbb{B}}^A_2\xrightarrow{\overline{\partial}}\overline{\mathbb{B}}^A_1\xrightarrow{\overline{\partial}}\overline{\mathbb{B}}^A_0\xrightarrow{\overline{\partial}_0}A\to 0,\tag{6-12}$$

с дифференциалом $\overline{\partial}$, который действует на базисные тензоры по правилу

$$\begin{aligned}\overline{\partial}(1\otimes\overline{a}_1\otimes\overline{a}_2\otimes\dots\otimes\overline{a}_n\otimes 1)&=a_1\otimes\overline{a}_2\otimes\dots\otimes\overline{a}_n\otimes 1+\\&+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i 1\otimes\overline{a}_1\otimes\dots\otimes\overline{a}_{i-1}\otimes\overline{a_ia}_{i+1}\otimes\overline{a}_{i+2}\otimes\dots\otimes\overline{a}_n\otimes 1+\\&+(-1)^n 1\otimes\overline{a}_1\otimes\dots\otimes\overline{a}_{n-1}\otimes a_n,\end{aligned}\tag{6-13}$$

называется *нормализованной бар-резольвентой* алгебры A. Возникающие из него бар-резольвента $\overline{\mathbb{B}}^A(M)$ для левого A-модуля M и бар-комплексы $\overline{\mathbb{B}}^A(N,M)$ и $\overline{\mathbb{B}}_A(M,N)$ для вычисления $\mathrm{Tor}^A(N,M)$ и $\mathrm{Ext}_A(M,N)$ тоже называются *нормализованными*. Дифференциалы последних двух комплексов при малых n имеют вид

$$\begin{gathered}\overline{\partial}(n\otimes\overline{a}\otimes m)=na\otimes m-n\otimes am,\\ \overline{\partial}(n\otimes\overline{a}_1\otimes\overline{a}_2\otimes m)=na_1\otimes\overline{a}_2\otimes m-n\otimes\overline{a_1a}_2\otimes m+n\otimes\overline{a}_1\otimes a_2m,\\ (d\varphi)_{\overline{a}}(m)=a\varphi(m)-\varphi(am),\\ (d\varphi)_{\overline{a}_1,\overline{a}_2}(m)=a_1\varphi_{\overline{a}_2}(m)-\varphi_{\overline{a_1a}_2}(m)+\varphi_{\overline{a}_1}(a_2m),\end{gathered}$$

из которого ясно, что они определены корректно. Мнемоническое правило при вычислениях с нормализованными бар-комплексами состоит в том, чтобы полагать равными нулю все тензорные мономы, содержащие сомножитель из $\Bbbk$, и все полилинейные формы, у которых один из нижних индексов лежит в $\Bbbk$.

6.2. Аугументированные ассоциативные алгебры. Ассоциативная алгебра A с единицей над полем $\Bbbk$ называется *аугументированной*[1], если задан сюрьективный гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\varepsilon : A \twoheadrightarrow \Bbbk$, именуемый *аугументацией*. Его ядро $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_\varepsilon(A) \overset{\text{def}}{=} \ker \varepsilon$ называется *идеалом аугументации*. Аугументация наделяет одномерное векторное пространство $\Bbbk$ структурой A-модуля, на котором идеал $\mathfrak{I}$ действует нулём. Этот модуль называется *тривиальным A-модулем*[2].

Для произвольного A-модуля N векторные пространства

$$H_n(A,N) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Tor}_n^A(N,\Bbbk) \quad \text{и} \quad H^n(A,N) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Ext}_A^n(\Bbbk,N)$$

называются *гомологиями* и *когомологиями* алгебры A с коэффициентами в N. При любом N пространства когомологий $H^n(A,N)$ являются A-модулями, а при $N = \Bbbk$ образуют градуированную $\Bbbk$-алгебру относительно умножения Ионеды.

Нормализованная бар-резольвента $\overline{\mathbb{B}}^A(\Bbbk)$ тривиального левого модуля $\Bbbk$ после канонического отождествления $A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes \Bbbk$ с $A \otimes \overline{A}^{\otimes n}$ приобретает вид

$$\cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} A \otimes \overline{A} \otimes \overline{A} \otimes \overline{A} \xrightarrow{\overline{\partial}} A \otimes \overline{A} \otimes \overline{A} \xrightarrow{\overline{\partial}} A \otimes \overline{A} \xrightarrow{\overline{\partial}} A \to 0 \tag{6-14}$$

и как векторное пространство представляет собою тензорное произведение над $\Bbbk$ алгебры A и тензорной алгебры $\mathbb{T}(\overline{A})$ векторного пространства $\overline{A}$. Дифференциал $\overline{\partial}$ переводит базисный вектор $1 \otimes \overline{a}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{a}_n$ свободного A-модуля $\overline{\mathbb{B}}_n^A(\Bbbk) = A \otimes \mathbb{T}^n(\overline{A})$ в альтернированную сумму

$$a_1 \otimes \overline{a}_2 \otimes \cdots \otimes \overline{a}_n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i 1 \otimes \overline{a}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{a_i a}_{i+1} \otimes \cdots \otimes \overline{a}_n\,. \tag{6-15}$$

(*продолжение следует…*)

[1]В отечественной литературе вместо «аугументированный» и «аугументация» иногда используется термины *пополненный* и *пополнение*, но они слишком многозначны, и в алгебро-геометрических контекстах это может вызывать путаницу.

[2]Не следует путать *тривиальный* A-модуль с *нулевым*.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 6.2. Если моном $\mu = a_0 \otimes \dots \otimes a_{n+1}$ содержит $a_k \in \Bbbk$ с $1 \leqslant k \leqslant n$, то в

$$\partial(\mu) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_0 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_{n+1}$$

два не содержащих $\dots \otimes a_k \otimes \dots$ слагаемых $(-1)^{i-1}\partial_{i-1}(\mu) = -(-1)^i \partial_i(\mu)$ сократятся друг с другом, а во все остальные слагаемые a_k войдёт в виде $\dots \otimes a_k \otimes \dots$. Поэтому линейная оболочка тензорных мономов $\mu = a_0 \otimes \dots \otimes a_{n+1}$, содержащих хотя бы одно $a_k \in \Bbbk$ при $1 \leqslant k \leqslant n$, составляет подкомплекс в $\mathbb{B}^A$. Гомотопия s очевидно переводит его в себя. Поэтому она корректно определена на факторе $\overline{\mathbb{B}}^A$ комплекса $\mathbb{B}^A$ по этому подкомплексу.