Напоминания из проективной геометрии

- АГ1♦1.** На доске указаны две точки. При помощи линейки, которая короче расстояния между ними, проведите через эти точки прямую.
- АГ1♦2.** На листе бумаги нарисованы точка A и две прямые, пересекающиеся в точке B вне листа. При помощи одной линейки нарисуйте на листе прямую AB .
- АГ1♦3.** В стандартной карте $U_0 \subset \mathbb{P}_2$ даны кривые **а)** $y = x^2$ **б)** $y = x^3$ **в)** $y^2 + (x - 1)^2 = 1$ **г)** $y^2 = x^2(x + 1)$. Напишите их уравнения в картах U_1 и U_2 и нарисуйте все 12 кривых.
- АГ1♦4 (нормальные рациональные кривые).** Пусть $\text{char } \mathbb{k} = 0$. Зафиксируем линейно независимые однородные многочлены n -й степени $f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{k}[x_0, x_1]$ и попарно различные точки $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}_1$. Покажите, что образы трёх отображений $\mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_n$, посылающих точку $a = (\alpha_0 : \alpha_1) \in \mathbb{P}_1$ соответственно в точки с однородными координатами **а)** $(f_0(a) : \dots : f_n(a))$ **б)** $(1/\det(p_0, a) : \dots : 1/\det(p_n, a))$, где $\det(b, a) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0$ для $b = (\beta_0 : \beta_1)$, **в)** $(a_0 : a_1 : \dots : a_n)$, где $a_i \in \mathbb{k}$ суть коэффициенты многочлена $(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)^n$, переводятся друг в друга проективными преобразованиями $\mathbb{P}_n \simeq \mathbb{P}_n$.
- АГ1♦5.** Фиксируем $n + 3$ точки $a, b, c, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}_n$ так, чтобы никакие $n + 1$ из них не лежали в одной гиперплоскости. Обозначим через $\ell_i \simeq \mathbb{P}_1$ пучок гиперплоскостей, проходящих через все точки p_ν с $\nu \neq i$, а через $\psi_{ij} : \ell_j \simeq \ell_i$ — гомографию, переводящую три проходящие через точки a, b, c гиперплоскости из пучка ℓ_j в аналогичные три гиперплоскости из пучка ℓ_i . Покажите что $\bigcup_{H \in \ell_1} H \cap \psi_{21}(H) \cap \dots \cap \psi_{n1}(H)$ это нормальная рациональная кривая.
- АГ1♦6.** Покажите, что в $\mathbb{P}_n$ **а)** через каждые $n + 3$ точки, никакие $n + 1$ из которых не лежат в одной гиперплоскости, можно провести единственную нормальную рациональную кривую **б)** над бесконечным полем каждые $n + 1$ разных точек рациональной нормальной кривой линейно независимы.
- АГ1♦7.** Покажите, что над алгебраически замкнутым полем всякая допускающая рациональную параметризацию плоская кривая степени¹ d получается проектированием рациональной нормальной кривой $C_d \subset \mathbb{P}_d$ на подходящую плоскость $\mathbb{P}_2 \subset \mathbb{P}_d$.
- АГ1♦8*.** Обозначим через $S^1, S^3 \subset \mathbb{C}[x_0, x_1]$ пространства однородных многочленов степени 1 и 3 соответственно. Опишите с точностью до проективного преобразования все возможные плоские проекции² кубики Веронезе $V_3 = \{\varphi^3 \in \mathbb{P}(S^3) \mid \varphi \in S^1\}$, убедитесь, что среди них нет гладкой³ кубической кривой, и выведите отсюда, что гладкая кубическая кривая $C \subset \mathbb{P}_2$ не допускает рациональной параметризации.
- АГ1♦9.** Пусть в пучке коник на $\mathbb{P}_2$ есть гладкая коника. Может ли в нём быть ровно **а)** 0 **б)** 1 **в)** 2 **г)** 3 **д)** 4 вырожденных коники? **е)** Могут ли все коники пучка быть вырожденными? Если да, приведите явные примеры, если нет — объясните, почему.
- АГ1♦10.** Могут ли две гладкие коники пересекаться ровно по **а)** 1 **б)** 2 **в)** 3 различным точкам? Если да, приведите явные примеры, если нет — объясните, почему.
- АГ1♦11*.** Коника C пробегает простой пучок L с четырьмя базисными точками b_1, b_2, b_3, b_4 и тремя особыми кониками S_1, S_2, S_3 . Как связаны двойные отношения $[S_1, S_2, S_3, C]$ на L и $[b_1, b_2, b_3, b_4]$ на C ?

¹Т. е. пересекающая каждую прямую ровно по d точкам с учётом кратностей.

²Подсказка: с точностью до проективного преобразования результат не зависит от выбора плоскости проекции, а зависит только от центра проекции, который может быть одного из трёх типов: лежащим на кубике Веронезе (куб линейной формы, x_0^3), лежащим на касательной прямой к кубике Веронезе, но не на самой кубике (форма с одним двукратным и одним простым корнем, $x_0^2 x_1$), не лежащим на касательных к кубике Веронезе (форма без кратных корней, $3x_0 x_1(x_0 - x_1)$).

³Без самопересечений и заострений, т. е. без таких точек $p \in C$, что любая проходящая через p прямая пересекает C с кратностью ≥ 2 .

Персональный табель _____
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 1 (05.09.2025)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3а			
б			
в			
г			
4			
5			
6а			
б			
7			
8			
9			
10			
11			