

А. Л. Городенцев*

Геометрическое введение в алгебраическую геометрию

Цель этого курса — знакомство с классическими примерами проективных многообразий, геометрическими свойствами абстрактных алгебраических многообразий и морфизмов между ними, а также с современным языком схем. Курс задумывался одновременно и как трамплин для тех, кто собирается в дальнейшем посещать более продвинутые курсы и семинары по алгебраической геометрии, и как дайджест алгебраической геометрии, адресованный тем, кто специализируется в других областях, но хотел бы освоиться с языком алгебраической геометрии и её простейшими инструментами.

Факультет математики НИУ ВШЭ
осень 2025 г

* ВШЭ, ИТЭФ, НМУ, [e-mail:gorod@itep.ru](mailto:gorod@itep.ru), <http://gorod.bogomolov-lab.ru/>

Оглавление

Оглавление	2
§1 Проективная геометрия	3
1.1 Соглашения об обозначениях	3
1.2 Проективное пространство	3
1.3 Проективные преобразования	8
1.4 Задание фигур полиномиальными уравнениями	12
1.5 Проективные квадрики	16
1.6 Пучки квадрик	23
Ответы и указания к некоторым упражнениям	28

§1. Напоминания из проективной геометрии

1.1. Соглашения об обозначениях. Всюду далее мы обозначаем через V векторное пространство над произвольным полем \mathbb{k} , а через V^* — двойственное пространство однородных линейных функций $V \rightarrow \mathbb{k}$. Значение ковектора $\varphi \in V^*$ на векторе $v \in V$ обозначается одним из трёх способов: $\varphi(v) = \langle \varphi, v \rangle = \text{ev}_v(\xi)$. Через e_0, e_1, \dots, e_n и x_0, x_1, \dots, x_n , где $n + 1 = \dim V$, по умолчанию обозначаются двойственные базисы пространств V и V^* , так что

$$\langle x_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Через $\mathbb{A}(V)$ мы обозначаем ассоциированное с V *аффинное пространство*¹. Через

$$SV^* = \bigoplus_{d \geq 0} S^d V^* \simeq \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

обозначается *симметрическая алгебра* пространства V^* , изоморфная алгебре *многочленов* от переменных x_i . Она градуирована подпространствами $S^d V^* \subset SV^*$ *однородных* многочленов степени d . Пространство $S^d V^*$ называется *d-той симметрической степенью* пространства V^* и представляет собою \mathbb{k} -линейную оболочку всевозможных произведений $\varphi_1 \dots \varphi_d$, составленных из d ковекторов $\varphi_i \in V^*$.

1.2. Проективное пространство. Со всяким $(n + 1)$ -мерным векторным пространством V помимо $(n + 1)$ -мерного аффинного пространства $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$ связано n -мерное *проективное пространство* $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, точками которого по определению являются одномерные векторные подпространства в V или, что то же самое, проходящие через начало координат аффинные прямые в $\mathbb{A}(V)$. Чтобы видеть их как «обычные» точки, внутрь $\mathbb{A}(V)$ следует поместить экран — не содержащую начала координат аффинную гиперплоскость $U_\xi \subset \mathbb{A}(V)$, задаваемую неоднородным линейным уравнением $\xi(x) = 1$, где $\xi \in V^*$ — любая ненулевая линейная форма на V (см. рис. 1◊1).

УПРАЖНЕНИЕ 1.1. Убедитесь, что соответствие $\xi \mapsto U_\xi$ задаёт биекцию между ненулевыми ковекторами $\xi \in V^*$ и не проходящими через начало координат аффинными гиперплоскостями в $\mathbb{A}(V)$.

Всякий такого рода экран U_ξ называется *аффинной картой* на $\mathbb{P}(V)$. В карте U_ξ видны все одномерные подпространства, порождённые векторами $v \in V$ с $\xi(v) \neq 0$. Дополнение $\mathbb{P}_n \setminus U_\xi$ состоит из одномерных подпространств n -мерного векторного подпространства $\text{Ann}(\xi) = \{v \in V \mid \langle \xi, v \rangle = 0\}$ — проходящей через начало координат параллельной копии гиперплоскости U_ξ . Эти одномерные подпространства составляют $(n - 1)$ -мерное проективное пространство $\mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}(\text{Ann}(\xi))$, которое называется *бесконечно удалённой гиперплоскостью* карты U_ξ . Точки $\mathbb{P}(\text{Ann} \xi)$ можно воспринимать

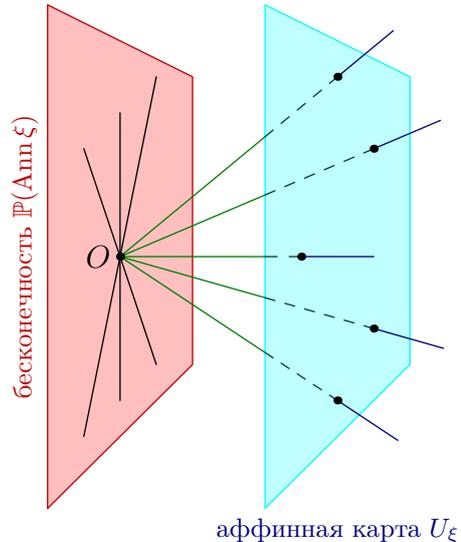


Рис. 1◊1. Проективный мир.

¹Его точки, по определению, взаимно однозначно соответствуют векторам из V , и их можно представлять себе как «концы» этих векторов, отложенных от отвечающей нулевому вектору точки $O \in \mathbb{A}(V)$.

как *направления* в аффинной карте U_ξ . Итак, n -мерное проективное пространство \mathbb{P}_n разбивается в дизъюнктное объединение аффинных пространств всех промежуточных размерностей: $\mathbb{P}_n = U_\xi \sqcup \mathbb{P}(\text{Ann } \xi) = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}_{n-2} = \dots = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{A}^0$, где $\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}_0$ — это одна точка.

УПРАЖНЕНИЕ 1.2. Какое соотношение на q получится, если независимо подсчитать количества точек, из которых состоят левая и правая части этого разбиения над конечным полем из q элементов?

1.2.1. Глобальные однородные координаты. Ненулевые векторы

$$v = (x_0, x_1, \dots, x_n) \quad \text{и} \quad w = (y_0, y_1, \dots, y_n),$$

заданные строками своих координат в каком-нибудь базисе e_0, e_1, \dots, e_n пространства V , изображаются одной и той же точкой $p \in \mathbb{P}_n$, если и только если их координаты пропорциональны, что означает равенство отношений¹ $x_\mu : x_\nu = y_\mu : y_\nu$ для всех $0 \leq \mu \neq \nu \leq n$. Таким образом, точке $p \in \mathbb{P}_n$ корректно соответствует не набор из $n + 1$ координат, а набор из n отношений $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ между ними. Эти отношения называется *однородными координатами* точки p в базисе e_0, e_1, \dots, e_n .

1.2.2. Локальные аффинные координаты. Рассмотрим на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ аффинную карту $U_\xi = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}(V) \mid \xi(x) = 1\}$, отвечающую какому-нибудь ненулевому ковектору $\xi \in V^*$. Любые n ковекторов $\xi_1, \dots, \xi_n \in V^*$, таких что ξ, ξ_1, \dots, ξ_n образуют базис в V^* , задают внутреннюю карты U_ξ *локальные аффинные координаты*. А именно, если векторы $e_0, e_1, \dots, e_m \in V$ составляют двойственный к ξ, ξ_1, \dots, ξ_n базис, то точка $e_0 \in U_\xi$ будет началом отсчёта аффинной координатной системы, а векторы e_1, \dots, e_n будут базисными векторами в векторном пространстве $\text{Ann } \xi$, с которым ассоциировано аффинное пространство U_ξ . Чтобы вычислить локальные аффинные координаты точки $p \in \mathbb{P}_n$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$, следует выбрать в одномерном подпространстве p единственный вектор $v = p / \xi(p) \in U_\xi$ с $\xi(v) = 1$ и вычислить значения n линейных форм ξ_ν на этом векторе. Отметим, что получающиеся таким образом значения локальных аффинных координат $x_i(p) = \xi_i(v) = \xi_i(p) / \xi(p)$ зависят от однородных координат точки p *нелинейно*.

ПРИМЕР 1.1 (ПРОЕКТИВНАЯ ПРЯМАЯ)

$\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ покрывается двумя аффинными картами $U_0 = U_{x_0}$ и $U_1 = U_{x_1}$, представляющими собою аффинные прямые с уравнениями $x_0 = 1$ и $x_1 = 1$ (см. рис. 1◊2). Карта U_0 покрывает все точки \mathbb{P}_1 кроме вертикальной координатной оси $(0 : 1)$, которая является единственной бесконечно удалённой точкой для карты U_0 . Точка $(x_0 : x_1)$ с $x_0 \neq 0$ видна в карте U_1 как $\left(1 : \frac{x_1}{x_0}\right)$ и функция $t = x_1|_{U_0} = x_1/x_0$ может использоваться в качестве локальной аффинной координаты в этой карте. Карта U_1 покрывает все точки $(x_0 : x_1) = (x_0/x_1 : 1)$ с $x_1 \neq 0$, и функция $s = x_0|_{U_1} = x_0/x_1$ годится в качестве локальной координаты в U_1 . Единственной бесконечно удалённой точкой для карты U_1 является горизонтальная координатная ось $(1 : 0)$. Координаты s и t одной и той же точки $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}_1$, видимой сразу в обеих картах, связаны соотношением $s = 1/t$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.3. Убедитесь в этом.

¹Где равенства вида $0 : x = 0 : y$ и $x : 0 = y : 0$ также допускаются.

Поэтому \mathbb{P}_1 можно воспринимать как результат склейки двух аффинных координатных прямых \mathbb{A}^1 (одна — с координатой s , другая — с координатой t) вдоль дополнения до начала координат по следующему правилу: точка с координатой s на одной прямой приклеивается к точке с координатой $t = 1/s$ на другой.

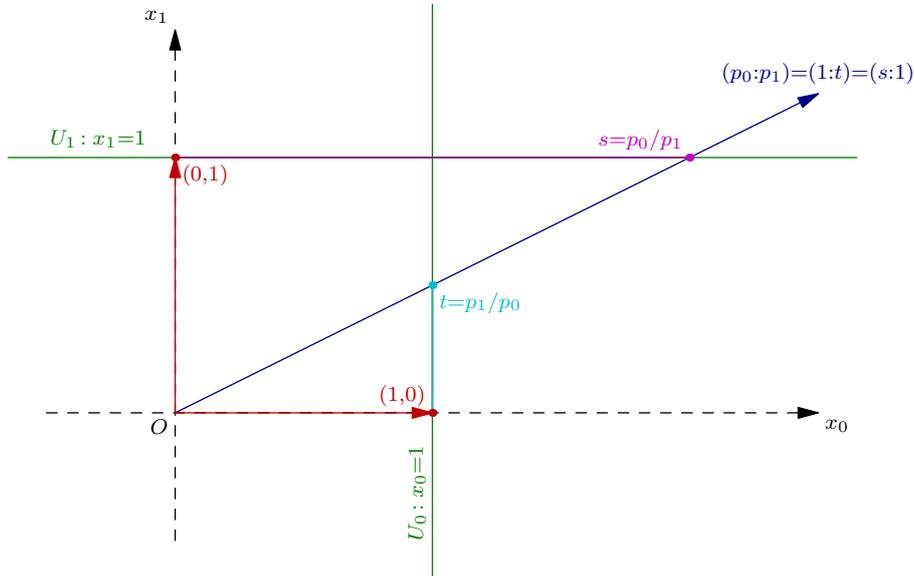


Рис. 1◊2. Стандартные карты на \mathbb{P}_1 .

Если основное поле $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, то в результате такой склейки мы получим окружность диаметра 1, картами на которой служат две диаметрально противоположные касательные прямые¹, а отображения окружности на карты суть центральные проекции из точек, диаметрально противоположных к точке касания этой карты с окружностью.

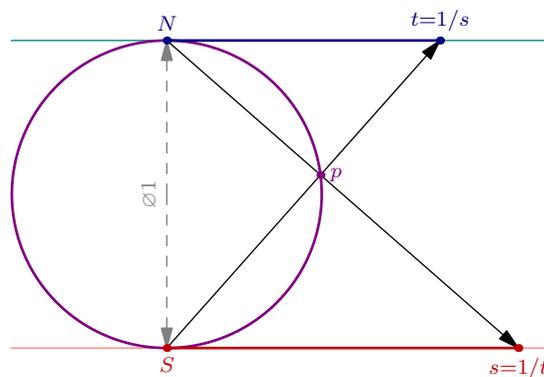


Рис. 1◊3. $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \simeq S^1$.

Точно также при $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ в результате склейки двух экземпляров комплексной аффинной прямой $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ по правилу $s \leftrightarrow t = 1/s$ мы получим сферу диаметра 1, для которой наши карты являются диаметрально противоположными касательными плоскостями, а сопоставление точке сферы точки на карте задаётся центральной проекцией из диаметрально противоположного к

¹См. рис. 1◊3 на стр. 5.

точке касания «полюса» сферы, как на рис. 1◊4: если ориентации касательных плоскостей выбраны согласованным образом, как на рис. 1◊4, комплексные числа s и t будут иметь противоположные аргументы и — согласно рис. 1◊3 — обратные модули.

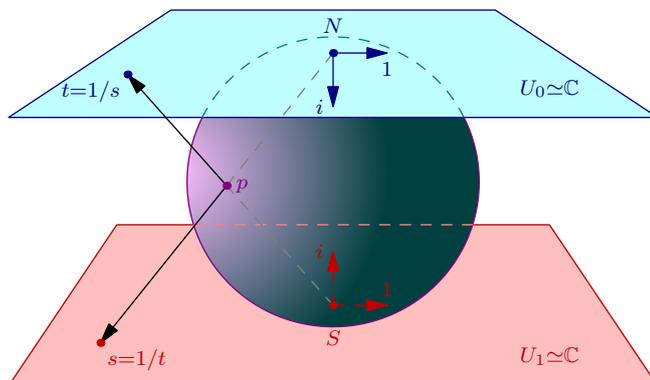


Рис. 1◊4. $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq S^2$.

ПРИМЕР 1.2 (СТАНДАРТНОЕ АФФИННОЕ ПОКРЫТИЕ \mathbb{P}_n)

Набор из $(n+1)$ аффинных карт $U_\nu = U_{x_\nu}$, задаваемых в \mathbb{A}^{n+1} уравнениями $\{x_\nu = 1\}$, называется *стандартным открытым покрытием* $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$. Для каждого $\nu = 0, 1, \dots, n$ в качестве стандартных локальных аффинных координат на U_ν берутся n форм

$$t_i^{(\nu)} = x_i|_{U_\nu} = \frac{x_i}{x_\nu} \quad \text{с } 0 \leq i \leq n, i \neq \nu.$$

Таким образом, пространство \mathbb{P}_n можно представлять себе как результат склейки $(n+1)$ различных копий U_0, U_1, \dots, U_n аффинного пространства \mathbb{A}^n по их фактическим пересечениям внутри \mathbb{P}_n . В однородных координатах на \mathbb{P}_n пересечение $U_\mu \cap U_\nu$ состоит из всех таких x , у которых обе координаты x_μ и x_ν не обращаются в 0. В локальных аффинных координатах на U_μ и U_ν это подмножество задаётся, соответственно, неравенствами $t_\nu^{(\mu)} \neq 0$ и $t_\mu^{(\nu)} \neq 0$. При этом точка $t^{(\mu)} \in U_\mu$ склеивается с точкой $t^{(\nu)} \in U_\nu$, если и только если $t_\nu^{(\mu)} = 1/t_\mu^{(\nu)}$ и $t_i^{(\mu)} = t_i^{(\nu)}/t_\mu^{(\nu)}$ для $i \neq \mu, \nu$. Правые части этих равенств называются *функциями перехода* от локальных координат $t^{(\nu)}$ к локальным координатам $t^{(\mu)}$.

ПРИМЕР 1.3 (АФФИННЫЕ КОНИКИ)

Посмотрим как выглядит в различных аффинных картах плоская проективная кривая C второй степени, заданная в однородных координатах на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ уравнением

$$x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 \tag{1-1}$$

В стандартной карте U_{x_1} , где $x_1 = 1$, в локальных координатах

$$t_0 = x_0|_{U_{x_1}} = x_0/x_1, \quad t_2 = x_2|_{U_{x_1}} = x_2/x_1$$

уравнение (1-1) превращается в уравнение гиперболы $t_2^2 - t_0^2 = 1$. В стандартной карте U_{x_2} , где $x_2 = 1$, с локальными координатами $t_0 = x_0|_{U_{x_2}} = x_0/x_2, t_1 = x_1|_{U_{x_2}} = x_1/x_2$ возникает уравнение окружности $t_0^2 + t_1^2 = 1$. В карте $U_{x_1+x_2}$, где $x_1 + x_2 = 1$, в локальных аффинных координатах $t =$

$x_0|_{U_{x_1+x_2}} = x_0/(x_1+x_2)$, $u = (x_2-x_1)|_{U_{x_1+x_2}} = (x_2-x_1)/(x_2+x_1)$ получается¹ уравнение параболы $t^2 = u$. Таким образом, аффинные эллипс, гипербола и парабола суть изображения одной и той же проективной кривой (1-1) в различных картах. Вид C в карте $U \subset \mathbb{P}_2$ определяется тем, как располагается по отношению к C бесконечно удалённая прямая этой карты: эллипс, парабола и гипербола возникают, соответственно, когда эта прямая не пересекается с C , касается C и пересекается с C в двух различных точках (см. рис. 1◊5).

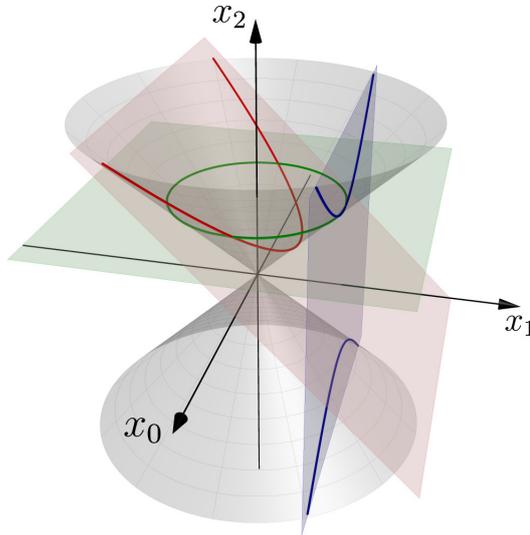


Рис. 1◊5. Аффинные коники.

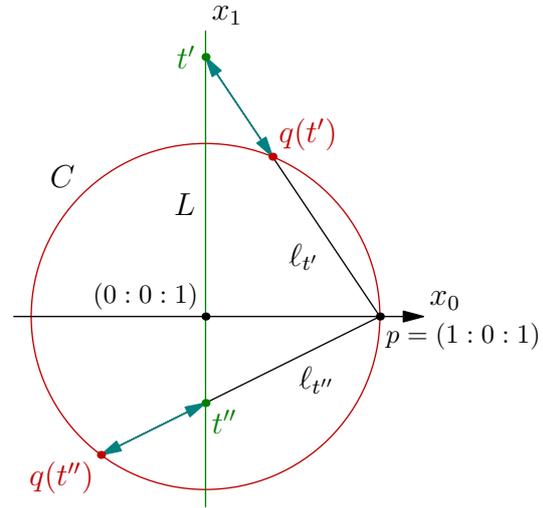


Рис. 1◊6. Проекция коники на прямую.

1.2.3. Дополнительные подпространства и проекции. Проективные подпространства $K = \mathbb{P}(U)$ и $L = \mathbb{P}(W)$ в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ называются *дополнительными*, если $K \cap L = \emptyset$ и $\dim K + \dim L = n - 1$. Например, любые две непересекающиеся прямые в \mathbb{P}_3 дополнительные. На языке линейной алгебры дополнительность означает, что $U \cap W = 0$ и $\dim U + \dim W = \dim V$, т. е. $V = U \oplus W$. В этом случае любой вектор $v \in V$ имеет единственное разложение $v = u + w$ с $u \in U$ и $w \in W$, и если v не содержится ни в U , ни в W , то обе компоненты этого разложения отличны от нуля. Геометрически это означает, что для любой точки $p \notin K \sqcup L$ существует единственная проходящая через p прямая $\ell = (q, r)$, пересекающая оба подпространства K, L .

УПРАЖНЕНИЕ 1.4. Убедитесь в этом.

Для каждой пары дополнительных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ проекция на L из K

$$\pi_L^K : (\mathbb{P}_n \setminus K) \rightarrow L,$$

тождественно действует на L и переводит каждую точку $p \in \mathbb{P}_n \setminus (K \sqcup L)$ в точку пересечения с L той единственной прямой, что проходит через p и пересекает K и L . В однородных координатах $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$, согласованных с разложением $V = U \oplus W$ так, что $(x_0 : x_1 : \dots : x_m)$ являются координатами в K , а $(x_{m+1} : x_{m+2} : \dots : x_n)$ — координатами в L , проекция π_L^K просто удаляет первые $(m + 1)$ координат x_ν с $0 \leq \nu \leq m$.

¹Надо перенести x_1^2 в (1-1) слева направо и поделить обе части на $x_2 + x_1$.

ПРИМЕР 1.4 (ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОНИКИ НА ПРЯМУЮ)

Спроектируем гладкую конику C из прим. 1.3 из точки $p = (1 : 0 : 1) \in C$ на прямую L , заданную уравнением $x_0 = 0$. В стандартной аффинной карте U_2 , где $x_2 = 1$, эта проекция $\pi_L^p : C \rightarrow L$ выглядит как на рис. 1◊б. Она является бирациональной биекцией между L и C , т. е. однородные координаты соответственных точек $q = (q_0 : q_1 : q_2) \in C$ и $t = (0 : t_1 : t_2) = \pi_L^p(q) \in L$ суть рациональные алгебраические функции друг друга:

$$\begin{aligned} (t_1 : t_2) &= (q_1 : (q_2 - q_0)) \\ (q_0 : q_1 : q_2) &= ((t_1^2 - t_2^2) : 2t_1t_2 : (t_1^2 + t_2^2)) \end{aligned} \quad (1-2)$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.5. Проверьте эти формулы и убедитесь, что когда пара (t_1, t_2) пробегает $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, тройка $(q_0 : q_1 : q_2)$ пробегает все пифагоровы тройки¹ с точностью до пропорциональности.

а само отображение $\pi_L^p : C \rightarrow L$ взаимно однозначно, если доопределить его в точке p так, чтобы она переходила в точку пересечения прямой L и касательной к C в точке p прямой $x_0 = x_2$ (на рис. 1◊б это пересечение происходит в бесконечной точке $t = (0 : 1 : 0)$). В самом деле, каждая проходящая через p прямая $\ell_t = (pt)$, за исключением касательной, пересекает C ещё ровно в одной точке $q = q(t)$, отличной от p , и координаты этой точки q рационально выражаются через коэффициенты уравнения прямой ℓ_t , являющиеся рациональными функциями от t , и координаты точки p .

1.2.4. Проективная двойственность. Пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}_n^\times \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(V^*)$ называются двойственными проективными пространствами. Геометрически, каждое из них есть пространство гиперплоскостей в другом: однородное линейное уравнение $\langle \xi, v \rangle = 0$ на $\xi \in V^*$ и $v \in V$ при фиксированном $\xi \in \mathbb{P}_n^\times$ задаёт гиперплоскость в \mathbb{P}_n , а при фиксированном $v \in \mathbb{P}_n$ — гиперплоскость в \mathbb{P}_n^\times , состоящую из всех гиперплоскостей в \mathbb{P}_n , проходящих через точку $v \in \mathbb{P}_n$. Из курса линейной алгебры известно, что соответствие $U \rightleftharpoons \text{Ann}(U)$ устанавливает обратную включению биекцию между векторными подпространствами дополнительных размерностей в двойственных пространствах V и V^* . При переходе к проективизациям для каждого $m = 0, 1, \dots, (n-1)$ возникает биекция между m -мерными проективными подпространствами в \mathbb{P}_n и $(n-1-m)$ -мерными проективными подпространствами в \mathbb{P}_n^\times , переводящая проективное подпространство $L = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}_n$ в проективное подпространство $L^\times = \mathbb{P}(\text{Ann}(U)) \subset \mathbb{P}_n^\times$, образованное всеми гиперплоскостями, содержащими L . Такая проективная двойственность позволяет переговаривать геометрические утверждения в двойственные геометрические утверждения. Например, условие коллинеарности трёх точек двойственно условию наличия у трёх гиперплоскостей общего подпространства коразмерности 2.

1.3. Проективные преобразования. Всякий линейный изоморфизм векторных пространств $F : U \xrightarrow{\sim} W$ корректно определяет биекцию $\bar{F} : \mathbb{P}(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(W)$, которая называется проективным изоморфизмом или проективным преобразованием.

УПРАЖНЕНИЕ 1.6. Рассмотрим две гиперплоскости $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и точку $p \notin L_1 \cup L_2$. Убедитесь, что проекция из p задаёт проективный изоморфизм $\gamma_p : L_1 \xrightarrow{\sim} L_2$.

ЛЕММА 1.1

Для любых двух упорядоченных наборов $p_0, p_1, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{P}(U)$, $q_0, q_1, \dots, q_{n+1} \in \mathbb{P}(W)$ из $n+2$ точек, в каждом из которых никакие $n+1$ точек не лежат в одной гиперплоскости, существует

¹Т. е. все целые решения уравнения Пифагора $q_0^2 + q_1^2 = q_2^2$

единственный с точностью до пропорциональности такой линейный изоморфизм $F : U \simeq W$, что $\bar{F}(p_i) = q_i$ при всех i .

Доказательство. Зафиксируем представляющие точки p_i и q_i векторы u_i и w_i . Тогда наборы векторов u_0, u_1, \dots, u_n и w_0, w_1, \dots, w_n являются базисами в U и W . Оператор $F : U \rightarrow W$ переводит точку p_i в точку q_i , если и только если $F(u_i) = \lambda_i w_i$ для некоторого ненулевого $\lambda_i \in \mathbb{k}$. Для того, чтобы точки p_0, p_1, \dots, p_n переводились преобразованием \bar{F} в точки q_0, q_1, \dots, q_n , необходимо и достаточно, чтобы оператор F имел в указанных выше базисах диагональную матрицу с произвольными ненулевыми константами $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ на главной диагонали. Заметим теперь, что все координаты x_i в разложении $u_{n+1} = x_0 u_0 + x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ отличны от нуля, поскольку в противном случае $n+1$ из точек¹ p_i оказались бы в одной координатной гиперплоскости. Если аналогичным образом разложить вектор $w_{n+1} = y_0 w_0 + y_1 w_1 + \dots + y_n w_n$ и записать равенство $F(u_{n+1}) = \lambda_{n+1} w_{n+1}$ в виде системы равенств на координаты, мы получим на константы $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ соотношения $y_i = \lambda_{n+1} \lambda_i x_i$, из которых $\lambda_i = \lambda_{n+1}^{-1} \cdot y_i / x_i$ при всех $0 \leq i \leq n$, т. е. матрица оператора F определена однозначно с точностью до множителя $\lambda_{n+1}^{-1} \neq 0$. \square

Следствие 1.1

Две матрицы тогда и только тогда задают одинаковые проективные изоморфизмы, когда они пропорциональны. \square

1.3.1. Линейная проективная группа. Согласно [лем. 1.1](#) линейные проективные автоморфизмы пространства $\mathbb{P}(V)$ образуют группу, изоморфную фактор группе полной линейной группы $GL(V)$ по подгруппе гомететий $H = \{\lambda \cdot \text{Id} \mid \lambda \neq 0\} \subset GL(V)$. Эта фактор группа обозначается $PGL(V) = GL(V)/H$ и называется *проективной линейной группой*. Если при помощи выбора базиса отождествить линейную группу $GL(V)$ с группой невырожденных матриц GL_{n+1} , проективная группа $PGL(V)$ отождествится с группой PGL_{n+1} невырожденных матриц, рассматриваемых с точностью до пропорциональности.

1.3.2. Гомографии. Линейные проективные изоморфизмы между прямыми называются *гомографиями*.

Упражнение 1.7. Пусть точка $p \in \mathbb{P}_2$ не лежит на прямой $L \subset \mathbb{P}_2$. Обозначим через $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ прямую², образованную всеми проходящими через p прямыми на \mathbb{P}_2 . Покажите, что отображения $p^\times \simeq L, \ell \mapsto \ell \cap L$, является гомографией между прямыми $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ и $L \subset \mathbb{P}_2$.

Другим простейшим примером гомографии является перспектива $o : \ell_1 \simeq \ell_2$ между прямыми $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$, задаваемая проекцией из какой-нибудь точки $o \notin \ell_1 \cup \ell_2$, как на [рис. 1◊7](#). Это композиция гомографий $\ell_1 \simeq o^\times \simeq \ell_2$ из [упр. 1.7](#).

Лемма 1.2

Гомография $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$ между прямыми $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ является перспективой, если и только если она переводит точку пересечения прямых $\ell_1 \cap \ell_2$ в себя.

Доказательство. Обозначая через o точку пересечения прямых $(a, \varphi(a))$ и $(b, \varphi(b))$, соединяющих произвольные точки $a, b \in \ell_1 \setminus \ell_2$ с их образами $\varphi(a), \varphi(b)$, как на [рис. 1◊7](#). Согласно

¹А именно, точка p_{n+1} и все точки p_i с номерами, отличными от номера занулившейся координаты вектора u_{n+1} .

²См. [н° 1.2.4](#) на стр. 8.

лем. 1.1, каждая гомография однозначно определяется своим действием на три различные точки. Перспектива $o : \ell_1 \simeq \ell_2$ действует на три точки a, b и $\ell_1 \cap \ell_2$ так же, как и φ . \square

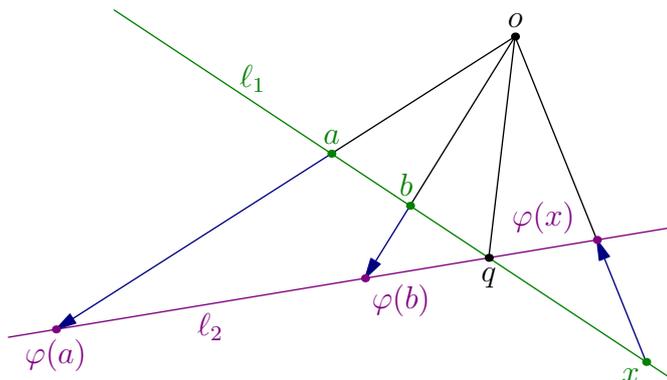


Рис. 1◊7. Перспектива.

Предложение 1.1 (Перекрёстная ось гомографии)

Каждая гомография $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$ между прямыми $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ раскладывается в композицию $\varphi = b_1 \circ b_2$ двух перспектив $b_2 : \ell_1 \rightarrow \ell$ и $b_1 : \ell \rightarrow \ell_2$ с центрами в точках $b_1 \in \ell_1, b_2 \in \ell_2$, см. рис. 1◊8. При этом точку $b_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2$ можно выбрать любой отличной от $\varphi^{-1}(\ell_1 \cap \ell_2)$, точка $b_2 = \varphi(b_1)$, а прямая ℓ не зависит от выбора b_1 , проходит через точки $\varphi(\ell_1 \cap \ell_2)$ и $\varphi^{-1}(\ell_1 \cap \ell_2)$ и представляет собою ГМТ пересечения «перекрёстных прямых» $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$, где $x \neq y$ независимо пробегает ℓ_1 . Более того, любое разложение гомографии φ в композицию $b_1 \circ b_2$ перспектив с центрами $b_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2, b_2 \in \ell_2 \setminus \ell_1$ имеет именно такой вид.

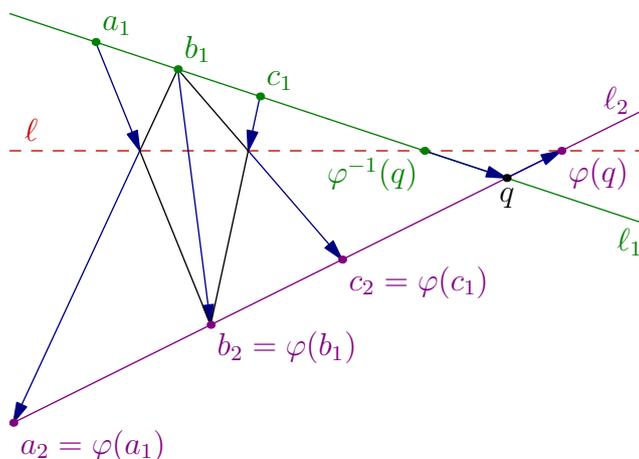


Рис. 1◊8. Перекрёстная ось.

Доказательство. Пусть три различные точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$ и их образы $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$ при гомографии φ таковы, что ни одна из этих шести точек не совпадает с точкой $q = \ell_1 \cap \ell_2$. Обозначим через ℓ прямую, проходящую через точки $(a_1 b_2) \cap (b_1, a_2)$ и $(c_1 b_2) \cap (b_1, c_2)$. Так как композиция перспектив $b_1 \circ b_2$ переводит точки a_1, b_1, c_1 в a_2, b_2, c_2 , она совпадает с φ , см. рис. 1◊8. Мы заключаем, что прямая ℓ проходит через точки¹ $\varphi(q), \varphi^{-1}(q)$ и представляет собою ГМТ пересечения прямых $(b_1 \varphi(x)) \cap (x \varphi(b_1))$, где $x \in \ell_1 \setminus b_1$. Повторяя это же рассуждение для тройки

¹Которые могут совпадать, если гомография φ перспектива.

c_1, a_1, b_1 вместо тройки a_1, b_1, c_1 , как на рис. 1◊9, получим разложение $\varphi = a_1 \circ a_2$ в композицию перспектив $a_2: \ell' \rightarrow \ell$ и $a_1: \ell' \rightarrow \ell_2$, в котором прямая ℓ' тоже проходит через точки $\varphi(q)$, $\varphi^{-1}(q)$ и представляет собою ГМТ пересечения прямых $(a_1\varphi(y)) \cap (y\varphi(a_1))$, где $y \in \ell_1 \setminus a_1$. Поскольку обе прямые ℓ и ℓ' проходят через (возможно совпадающие) точки $\varphi(q)$, $\varphi^{-1}(q)$, а также через отличную от них точку $(b_1a_2) \cap (a_1b_2)$, эти прямые совпадают. Так как точки a_1 и b_1 выбирались произвольно, мы заключаем, что все разложения $\varphi = (x: \ell \rightarrow \ell_2) \circ (\varphi(x): \ell_1 \rightarrow \ell)$ имеют одну и ту же прямую ℓ , которая является ГМТ пересечения прямых $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$, где $x \neq y$ независимо пробегает ℓ_1 . Последнее утверждение предложения вытекает из того, что в любом разложении $\varphi = b_1 \circ b_2$ с $b_1 \in \ell_1, b_2 \in \ell_2$ точка $b_2 = \varphi(b_1)$. \square

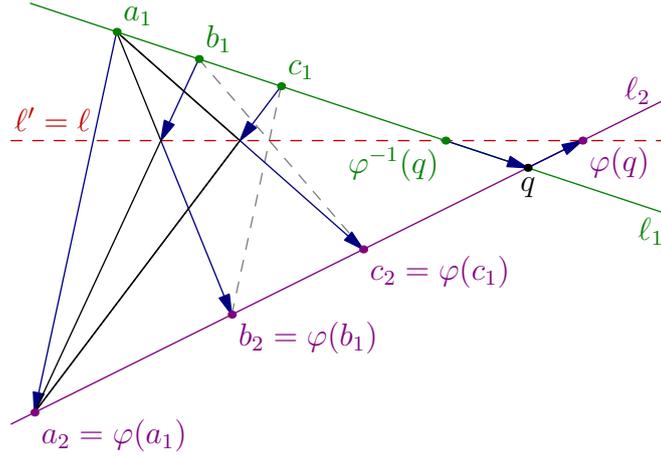


Рис. 1◊9. Равенство $\ell' = \ell$.

1.3.3. Двойное отношение. Линейная проективная группа $\text{PGL}_2(\mathbb{k})$ состоит из классов пропорциональности матриц $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с $ad - bc \neq 0$. Такая матрица действует на \mathbb{P}_1 гомографией

$$\bar{A}: \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax_0 + bx_1 \\ cx_0 + dx_1 \end{pmatrix},$$

которая в стандартной аффинной карте $U_1 \simeq \mathbb{A}^1$ с координатой $t = x_0/x_1$ имеет вид дробно линейного преобразования $t \mapsto (at + b)/(ct + d)$. Единственное дробно линейное преобразование, переводящее три заданных различных точки q, r, s в $\infty, 0, 1$, имеет вид

$$t \mapsto \frac{t - r}{t - q} \cdot \frac{s - r}{s - q}. \quad (1-3)$$

Отметим, что разность аффинных координат $a = a_0/a_1$ и $b = b_0/b_1$ пары точек $a = (a_0 : a_1)$ и $b = (b_0 : b_1)$ на \mathbb{P}_1 с точностью до множителя совпадает с определителем их однородных координат:

$$a - b = \frac{a_0}{a_1} - \frac{b_0}{b_1} = \frac{a_0b_1 - a_1b_0}{a_1b_1} = \frac{\det(a, b)}{a_1b_1}.$$

Для четырёх различных точек $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_1$ величина

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = \frac{(p_1 - p_3)(p_2 - p_4)}{(p_1 - p_4)(p_2 - p_3)} = \frac{\det(p_1, p_3) \cdot \det(p_2, p_4)}{\det(p_1, p_4) \cdot \det(p_2, p_3)}. \quad (1-4)$$

называется *двойным отношением*¹ этих четырёх точек. Согласно (1-3), двойное отношение (1-4) представляет собою образ точки p_4 при единственном дробно линейном автоморфизме \mathbb{P}_1 , переводящем точки p_1, p_2, p_3 в точки $\infty, 0, 1$ соответственно. Отсюда сразу следует, что двойное отношение четырёх различных точек может принимать любые значения кроме $\infty, 0$ и 1 и что две упорядоченных четвёрки точек тогда и только тогда переводятся одна в другую дробно линейным преобразованием прямой, когда их двойные отношения одинаковы.

Упражнение 1.8. Докажите последнее утверждение.

Поскольку замена однородных координат является именно таким преобразованием, мы заключаем, что правая часть равенства (1-4) не зависит от выбора однородных координат, а средняя часть (содержащая разности аффинных координат точек) не зависит ни от выбора аффинной карты, ни от выбора локальной аффинной координаты в ней (при условии, что карта содержит все четыре точки, т. е. значения p_1, p_2, p_3, p_4 конечны).

Упражнение 1.9. Убедитесь, при действии симметрической группы S_4 перестановками точек p_1, p_2, p_3, p_4 , четвертная подгруппа Клейна $V_4 \subset S_4$ сохраняет двойное отношение этих точек, и если $[p_1, p_2, p_3, p_4] = \vartheta$, то

$$\begin{aligned} [p_1, p_2, p_3, p_4] &= [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_2, p_1] = [p_4, p_3, p_2, p_1] = \vartheta \\ [p_2, p_1, p_3, p_4] &= [p_1, p_2, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_1, p_2] = [p_4, p_3, p_1, p_2] = 1/\vartheta \\ [p_3, p_2, p_1, p_4] &= [p_2, p_3, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_2, p_3] = [p_4, p_1, p_2, p_3] = \vartheta/(\vartheta - 1) \\ [p_4, p_2, p_3, p_1] &= [p_2, p_4, p_1, p_3] = [p_3, p_1, p_2, p_4] = [p_1, p_3, p_2, p_4] = 1 - \vartheta \\ [p_2, p_3, p_1, p_4] &= [p_3, p_2, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_3, p_2] = [p_4, p_1, p_3, p_2] = (\vartheta - 1)/\vartheta \\ [p_3, p_1, p_2, p_4] &= [p_1, p_3, p_4, p_2] = [p_2, p_4, p_1, p_3] = [p_4, p_2, p_1, p_3] = 1/(1 - \vartheta). \end{aligned} \quad (1-5)$$

1.4. Задание фигур полиномиальными уравнениями. С каждым вектором $v \in V$ связано отображение вычисления $ev_v : SV^* \rightarrow \mathbb{k}, f \mapsto f(v)$, переводящее произведение линейных форм $f = \varphi_1 \dots \varphi_m \in S^m V^*$ в произведение их значений $f(v) \stackrel{\text{def}}{=} \prod \varphi(v)$ на векторе v . В терминах координат, значение многочлена $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ на векторе v равно результату подстановки вместо каждой переменной x_i значения i -той координаты вектора v в базисе пространства V , двойственном к базису x_0, x_1, \dots, x_n в V^* . Таким образом, каждый многочлен $f \in SV^*$ задаёт функцию $f : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}, v \mapsto f(v)$, на аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$. Все такие функции называются *полиномиальными*.

Упражнение 1.10. Покажите, что над конечным полем \mathbb{k} любая функция $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}$ является полиномиальной, причём существуют ненулевые многочлены, задающие нулевую полиномиальную функцию. Напротив, над бесконечным полем имеются неполиномиальные функции $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}$, а два многочлена задают одинаковые полиномиальные функции только когда они равны как многочлены.

1.4.1. Аффинные многообразия. Множество нулей многочлена f на аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ обозначается через $V(f) = \{p \in \mathbb{A}(V) \mid f(p) = 0\}$ и называется *аффинной алгебраической гиперповерхностью*. Пересечения аффинных алгебраических гиперповерхностей, т. е. множества решений систем полиномиальных уравнений на координаты, называются *аффинными алгебраическими многообразиями*. Например, аффинными многообразиями являются аффинные подпространства — они задаются системами линейных уравнений.

¹По-английски *cross-ratio*.

1.4.2. Проективные многообразия. На проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$ отличный от константы многочлен от однородных координат обычно *не задаёт* никакой функции, т. к. значение $f(\lambda v)$ зависит от λ . Тем не менее, для любого *однородного* многочлена f степени d множество его нулей $V(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ является корректно определённым подмножеством в $\mathbb{P}(V)$, поскольку $f(v) = 0 \iff f(\lambda v) = \lambda^d f(v) = 0$. Иначе говоря, аффинная гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{A}(V)$, заданная однородным многочленом f , представляет собой конус, образованный проходящими через начало координат прямыми, которые являются точками проективного пространства. Множество этих точек $V(f) \subset \mathbb{P}(V)$ называется *проективной алгебраической гиперповерхностью* степени $\deg f$. Пересечения проективных гиперповерхностей, т. е. множества рассматриваемых с точностью до пропорциональности ненулевых решений систем однородных полиномиальных уравнений, называются *проективными алгебраическими многообразиями*.

Простейшие примеры проективных многообразий — это задаваемые системами однородных линейных уравнений *проективные подпространства* $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$, ассоциированные с векторными подпространствами $U \subset V$. Так, проективная прямая (ab) представляет собою проективизацию линейной оболочки векторов a и b , т. е. состоит из всевозможных точек вида $\lambda a + \mu b$, и может быть задана системой линейных уравнений $\xi(x) = 0$, где ξ пробегает подпространство $\text{Ann}(a) \cap \text{Ann}(b)$ или какой-нибудь базис в этом подпространстве. Отношение $(\lambda : \mu)$ коэффициентов из разложения вектора $\lambda a + \mu b \in (a, b)$ можно использовать в качестве внутренней однородной координаты на прямой (ab) .

УПРАЖНЕНИЕ 1.1. Покажите, что для любых двух проективных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ выполняется неравенство $\dim(K \cap L) \geq \dim K + \dim L - n$ (в частности, любые две прямые на \mathbb{P}_2 пересекаются).

1.4.3. Проективное замыкание аффинной гиперповерхности $S = V(f) \subset \mathbb{A}^n$ это проективная гиперповерхность $\bar{S} = V(\bar{f}) \subset \mathbb{P}_n$, задаваемая однородным многочленом \bar{f} степени $d = \deg f$, пересечение которой со стандартной аффинной картой U_0 совпадает с X . Если

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0 + f_1(x_1, \dots, x_n) + f_2(x_1, \dots, x_n) + \dots + f_d(x_1, \dots, x_n)$$

где каждый f_i однороден степени i , то

$$\bar{f}(x_0, x_1, \dots, x_n) = f_0 \cdot x_0^d + f_1(x_1, \dots, x_n) \cdot x_0^{d-1} + \dots + f_d(x_1, \dots, x_n)$$

получается из f умножением каждого монома на подходящую степень x_0 , дополняющую степень всего монома до d , и превращается в f при $x_0 = 1$. Дополнение $\bar{S} \setminus S = \bar{S} \cap U_0^{(\infty)}$ задаётся в однородных координатах $(x_1 : x_2 : \dots : x_n)$ на бесконечно удалённой гиперплоскости $x_0 = 0$ уравнением $f_d(x_1, \dots, x_n) = 0$. Таким образом, лежащие на бесконечности точки гиперповерхности \bar{S} — это в точности нули старшей однородной компоненты уравнения, задающего S . В аффинной геометрии их обычно называют *асимптотическими направлениями* гиперповерхности S .

Например проективным замыканием аффинной кубической кривой $x_1 = x_2^3$ является проективная кривая $x_0^2 x_1 = x_2^3$, которая имеет ровно одну бесконечно удалённую точку $(0 : 1 : 0)$ и выглядит в аффинной карте U_1 как полукубическая парабола $x_0^2 = x_2^3$ с остриём в этой точке.

1.4.4. Пространство гиперповерхностей. Поскольку пропорциональные уравнения задают одну и ту же гиперповерхность, гиперповерхности степени d являются точками проективного пространства $\mathbb{P}(S^d V^*)$, которое мы будем называть *пространством гиперповерхностей* степени d в $\mathbb{P}(V)$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.12. Найдите размерность пространства гиперповерхностей d -той степени в \mathbb{P}_n . Поскольку уравнение $f(p) = 0$ при фиксированном $p \in \mathbb{P}(V)$ является *линейным уравнением на* $f \in S^d V^*$, гиперповерхности степени d , проходящие через заданную точку p , образуют проективную гиперплоскость в пространстве всех гиперповерхностей.

Проективные подпространства в пространстве гиперповерхностей называются *линейными системами* гиперповерхностей. По определению, всякая гиперповерхность из линейной системы, порождённой гиперповерхностями $V(f_1), V(f_2), \dots, V(f_m)$, задаётся уравнением вида

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m = 0,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{k}$ — некоторые константы. В частности, любая гиперповерхность из такой системы обязательно содержит пересечение $V(f_1) \cap V(f_2) \cap \dots \cap V(f_m)$. По старинной традиции, одномерные и двумерные линейные системы также называются *пучками* и *связками* соответственно. Поскольку любая прямая в проективном пространстве имеет непустое пересечение с любой гиперплоскостью, всякий пучок гиперповерхностей¹ всегда содержит гиперповерхность, проходящую через любую наперёд заданную точку.

ПРИМЕР 1.5 (НАБОРЫ ТОЧЕК НА \mathbb{P}_1 И КРИВАЯ ВЕРОНЕЗЕ)

Фиксируем двумерное векторное пространство $U \simeq \mathbb{k}^2$ с координатами x_0, x_1 и рассмотрим проективную прямую $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$. Всякое конечное множество точек

$$p_1, \dots, p_d \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$$

(среди которых допускаются и совпадающие) является алгебраической гиперповерхностью, а именно, множеством нулей однородного многочлена d -той степени

$$f(x_0, x_1) = \prod_{v=1}^d \det(x, p_v) = \prod_{v=1}^d (p_{v,1}x_0 - p_{v,0}x_1), \quad \text{где } p_v = (p_{v,0} : p_{v,1}). \quad (1-6)$$

По аналогии с (неоднородными) многочленами от одной переменной, задающими конфигурации точек на аффинной прямой \mathbb{A}_1 , мы будем называть точки $p_v \in \mathbb{P}_1$ *корнями* однородного многочлена f от переменных x_0, x_1 . В этом смысле разложение (1-6) аналогично разложению многочлена от одной переменной на линейные множители, отвечающие корням. В частности, у однородного многочлена степени d от двух переменных имеется не более d различных корней на \mathbb{P}_1 , а если поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто, то таких корней, с учётом кратностей², будет ровно d . Таким образом, над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} всевозможные d -точечные конфигурации на \mathbb{P}_1 взаимно однозначно соответствуют точкам проективного пространства $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$, ассоциированного с $(d+1)$ -мерным векторным пространством однородных многочленов степени d от x_0, x_1 .

Конфигурации, в которых все d точек слипаются в одну, образуют алгебраическую кривую $C_d \subset \mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$, которая называется *кривой Веронезе* степени d или *рациональной нормальной кривой d -той степени*. Эта кривая является образом отображения *Веронезе*

$$\mathbb{P}_1^{\times} = \mathbb{P}(U^*) \xrightarrow{v_d} \mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*), \quad (1-7)$$

¹над любым полем

²Под кратностью корня p понимается максимальная степень линейной формы $\det(t, p)$, на которую делится f .

переводящего задающую одну точку $p \in \mathbb{P}(U)$ линейную форму $\varphi \in U^*$ в её d -ю степень $\varphi^d \in S^d(U^*)$, задающую d -кратную точку p . Если записывать формы $\varphi \in U^*$ и $f \in S^d(U^*)$ в виде

$$\varphi(x) = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 \quad \text{и} \quad f(x) = \sum_{\nu} a_{\nu} \cdot \binom{d}{\nu} x_0^{d-\nu} x_1^{\nu}$$

и использовать отношения коэффициентов $(\alpha_0 : \alpha_1)$ и $(a_0 : a_1 : \dots : a_d)$ в качестве однородных координат на $\mathbb{P}_1^{\times} = \mathbb{P}(U^*)$ и $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$ соответственно, то при не делящейся на характеристику поля \mathbb{k} степени d кривая Веронезе запишется параметрическим уравнением¹

$$(\alpha_0 : \alpha_1) \mapsto (a_0 : a_1 : \dots : a_d) = (\alpha_0^d : \alpha_0^{d-1} \alpha_1 : \alpha_0^{d-2} \alpha_1^2 : \dots : \alpha_1^d). \quad (1-8)$$

Таким образом, при $\text{char } \mathbb{k} \nmid d$ кривая C_d состоит из всех точек $(a_0 : a_1 : \dots : a_d) \in \mathbb{P}_d$, координаты которых составляют геометрическую прогрессию. Это условие равносильно тому, что

$$\text{rk} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{d-2} & a_{d-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{d-1} & a_d \end{pmatrix} = 1,$$

и может быть выражено системой однородных уравнений второй степени — обращением в нуль всех 2×2 -миноров этой матрицы. Например, кривая $C_2 \subset \mathbb{P}_2$ образована всеми квадратными трёхчленами $a_0 x_0^2 + 2a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2$, которые являются полными квадратами. Она задаётся известным из школы уравнением

$$D/4 = -\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = a_1^2 - a_0 a_2 = 0 \quad (1-9)$$

и допускает следующее параметрическое задание:

$$a_0 = \alpha_0^2, \quad a_1 = \alpha_0 \alpha_1, \quad a_2 = \alpha_1^2. \quad (1-10)$$

Пересечение кривой (1-8) с произвольной гиперплоскостью, заданной уравнением

$$A_0 a_0 + A_1 a_1 + \dots + A_d a_d = 0,$$

состоит из Веронезе-образов тех точек $(\alpha_0 : \alpha_1) \in \mathbb{P}_1$, в которых обращается в нуль однородный многочлен $\sum A_{\nu} \cdot \alpha_0^{d-\nu} \alpha_1^{\nu}$ степени d . Поскольку таких точек не более d , никакие $d+1$ точек кривой Веронезе не лежат в одной гиперплоскости. Отсюда вытекает, что при $2 \leq m \leq d$ никакие $m+1$ точек кривой C_d не лежат в одном $(m-1)$ -мерном подпространстве. Над алгебраически замкнутым полем пересечение кривой C_d с любой гиперплоскостью состоит в точности из d точек² — именно поэтому мы и сказали выше, что *степень* кривой C_d равна d .

ТЕОРЕМА 1.1

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} характеристики нуль всякое биективное отображение

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\},$$

которое может быть задано в некоторой аффинной карте с координатой t формулой

$$\varphi(t) = g(t)/h(t), \quad \text{где} \quad g, h \in \mathbb{k}[t], \quad (1-11)$$

является ограничением некоторой гомографии³ $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}_1$.

¹Если d кратно $p = \text{char } \mathbb{k}$, то формула (1-8) превращается в $(\alpha_0 : \alpha_1) \mapsto (\alpha_0^d : 0 : \dots : 0 : \alpha_1^d)$.

²Некоторые из которых могут совпадать друг с другом.

³См. н° 1.3.2 на стр. 9.

Доказательство. Переходя к однородным координатам $(x_0 : x_1)$, для которых $t = x_0/x_1$, и меняя при необходимости конечное множество точек неопределённости отображения φ , перепишем формулу (1-11) в виде $\varphi : (x_0 : x_1) \mapsto (f(x_0, x_1) : g(x_0, x_1))$, где f и g — взаимно простые однородные многочлены от (x_0, x_1) одинаковой степени $\deg f = \deg g = d$. Точка $\vartheta = (\vartheta_0 : \vartheta_1) \in \mathbb{P}_1$ имеет при отображении φ ровно один прообраз, если и только если однородный многочлен $\vartheta_1 \cdot f(x_0, x_1) - \vartheta_0 \cdot g(x_0, x_1)$ имеет на \mathbb{P}_1 ровно один корень $\zeta = \varphi^{-1}(\vartheta)$. Над алгебраически замкнутым полем такое возможно, только если этот корень d -кратный, т. е.

$$\vartheta_1 \cdot f(x) - \vartheta_0 \cdot g(x) = \det^d(x, \zeta).$$

Поскольку алгебраически замкнутое поле \mathbb{k} бесконечно, а отображение φ биективно вне конечного множества точек, прямая (fg) в пространстве \mathbb{P}_d однородных многочленов степени d от (x_0, x_1) имеет бесконечно много точек пересечения с кривой Веронезе, образованной d -ми степенями линейных двучленов. Выше мы видели, что при $d \geq 2$ никакие три точки кривой C_d не лежат на одной прямой. Поэтому $d = 1$ и $\varphi \in \text{PGL}_2(\mathbb{k})$. \square

1.5. Проективные квадрики. Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$. Проективная гиперповерхность второй степени $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$, $q \in S^2V^*$, называется *проективной квадратикой*. В однородных координатах $x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ квадратичный многочлен q можно записать как

$$q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = x \cdot A \cdot {}^t x,$$

где $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ — строка координат, ${}^t x$ — транспонированный ей столбец координат, а $A = (a_{ij})$ — симметричная матрица, которая при $i \neq j$ имеет в качестве $a_{ij} = a_{ji}$ половину¹ коэффициента при $x_i x_j$ в многочлене $q(x)$. Другими словами, для любого однородного многочлена $q(x)$ второй степени существует единственная симметричная билинейная форма $\tilde{q} : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$, такая что $q(x) = \tilde{q}(x, x)$. Она называется *поляризацией* квадратичной формы q и выражается через q несколькими эквивалентными способами:

$$\tilde{q}(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j = x \cdot A \cdot {}^t y = \frac{1}{2} \sum_i y_i \frac{\partial q(x)}{\partial x_i} = \frac{1}{2} (q(x+y) - q(x) - q(y)). \quad (1-12)$$

Матрица A представляет собою *матрицу Грама* формы \tilde{q} в двойственном к x_i базисе e_i пространства V , т. е. $a_{ij} = \tilde{q}(e_i, e_j)$. В любом другом базисе $(e'_0, e'_1, \dots, e'_n) = (e_0, e_1, \dots, e_n) \cdot C$ новая матрица Грама A' выражается через A по известной из курса линейной алгебры формуле $A' = {}^t C \cdot A \cdot C$. В частности, при линейной замене координат *определитель Грама* $\det A$ умножается на *ненулевой квадрат* определителя матрицы перехода: $\det(A') = \det(A) \cdot \det^2(C)$. Таким образом, класс определителя Грама по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля \mathbb{k} , не зависит от выбора базиса и является инвариантом квадрики по отношению к линейным заменам координат. Мы будем называть этот класс *определителем* формы q и обозначать $\det(q)$. Если $\det q \neq 0$, квадратика $V(q)$ называется *невырожденной* (или *гладкой*), в противном случае — *вырожденной* (или *особой*).

¹Для этого существенно, что $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$.

1.5.1. Корреляция, ядро и ранг. Со всякой билинейной формой \tilde{q} на V связан линейный оператор корреляции $\hat{q}: V \rightarrow V^*$, переводящий вектор $v \in V$ в линейную форму «скалярного умножения» на v :

$$\hat{q}(v): V \rightarrow \mathbb{k}, \quad w \mapsto \tilde{q}(w, v).$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.13. Проверьте, что матрица оператора корреляции, записанная в любом базисе пространства V и двойственном к нему базисе в V^* совпадает с матрицей Грама квадратичной формы q в этом базисе.

В частности, невырожденность квадратичной формы q равносильна тому, что \hat{q} изоморфизм. Пространство

$$\ker \hat{q} = \{ v \in V \mid \forall w \in V \tilde{q}(w, v) = 0 \}$$

называется *ядром* квадратичной формы q . Поскольку $\dim \ker \hat{q} = \dim V - \text{rk } A$, ранг матрицы Грама не зависит от выбора базиса. Он называется *рангом* квадрики q . Проективизация ядра $\text{Sing } Q \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\ker \hat{q}) \subset \mathbb{P}(V)$ называется *множеством особых точек* или *вершинным пространством* квадрики Q . Обратите внимание, что $\text{Sing } Q \subset Q$.

ТЕОРЕМА 1.2 (ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА)

Для любой квадрики над произвольным полем \mathbb{k} характеристики $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ существует базис, в котором её матрица Грама диагональна.

Доказательство. Индукция по $\dim V$ (при $\dim V = 1$ доказывать нечего). Поскольку $q \neq 0$, найдётся $e \in V$, такой что $q(e) = \tilde{q}(e, e) \neq 0$. Примем его за первый базисный вектор и обозначим через $e^\perp = \{ u \in V \mid \tilde{q}(u, e) = 0 \}$ ортогональное относительно формы \tilde{q} дополнение к натянутому на e одномерному подпространству $\mathbb{k} \cdot e$. Пространство V является ортогональной прямой суммой $V = (\mathbb{k} \cdot e) \oplus e^\perp$, т. к. $(\mathbb{k} \cdot e) \cap e^\perp = 0$, и любой вектор $v \in V$ представляется в виде

$$v = \frac{\tilde{q}(v, e)}{\tilde{q}(e, e)} \cdot e + u,$$

где $u = v - e \cdot \tilde{q}(v, e) / \tilde{q}(e, e) \in e^\perp$ (обязательно убедитесь в этом!). Если $q|_{e^\perp} \equiv 0$, искомый базис состоит из e и произвольных базисных векторов пространства e^\perp . Если $q|_{e^\perp} \neq 0$, то по индукции в e^\perp есть базис e_1, \dots, e_{n-1} с диагональной матрицей Грама. Тогда матрица Грама базиса e, e_1, \dots, e_{n-1} тоже диагональна. \square

СЛЕДСТВИЕ 1.2

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} всякая квадратика задаётся в подходящих однородных координатах уравнением $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 = 0$, где r — ранг квадрики. В частности, две квадрики переводятся друг в друга проективными преобразованиями, если и только если они имеют одинаковый ранг.

Доказательство. Ненулевые диагональные элементы матрицы Грама становятся единицами при замене базисных векторов e_i на $e_i / \sqrt{q(e_i)}$. \square

ПРИМЕР 1.6 (квадрики на \mathbb{P}_1)

По **теор. 1.2** всякая квадратичная форма от двух переменных в подходящем базисе задаётся либо уравнением $x_0^2 + ax_1^2 = 0$ с $a \neq 0$, либо уравнением $x_0^2 = 0$. В первом случае определитель

Грама $\det(q)$ с точностью до умножения на квадраты равен a , и форма невырождена. Во втором случае $\det(q) = 0$ и форма вырождена. Вырожденная квадратика $x_0^2 = 0$ называется *двойной точкой*, поскольку её уравнение — это квадрат линейной формы x_0 , задающей точку $(0 : 1)$. Неособая квадратика $x_0^2 + ax_1^2 = 0$ либо пуста, либо состоит из двух точек. Первое равносильно тому, что $-a$ не является квадратом в \mathbb{k} , и над алгебраически замкнутым полем невозможно. Если же $-a = \delta^2$, то $x_0^2 + ax_1^2 = (x_0 - \delta x_1)(x_0 + \delta x_1)$ имеет на \mathbb{P}_1 два разных корня $(\pm\delta : 1)$.

Таким образом, строение квадратика, задаваемой на \mathbb{P}_1 произвольной ненулевой квадратичной формой $q(x) = a_0x_0^2 + 2a_1x_0x_1 + a_2x_1^2$, полностью определяется классом её *дискриминанта* $D/4 \stackrel{\text{def}}{=} -\det(q) = a_1^2 - a_0a_2$ по модулю умножения на ненулевые квадраты: если он нулевой, то квадратика является двойной точкой, если он единичный — парой различных точек, если он не квадрат — квадратика пуста (что бывает только над незамкнутыми полями).

В качестве следствия мы получаем, что для пересечения произвольных квадратика Q и прямой ℓ имеется ровно 4 взаимоисключающие возможности: или $\ell \subset Q$, или $\ell \cap Q$ это одна двойная точка, или $\ell \cap Q$ состоит из 2 различных точек, или $\ell \cap Q = \emptyset$, причём над алгебраически замкнутым последний случай невозможен.

ТЕОРЕМА 1.3

Пересечение $Q' = L \cap Q$ особой квадратика Q с любым дополнительным к $\text{Sing } Q$ проективным подпространством $L \subset \mathbb{P}(V)$ представляет собой невырожденную квадратика в L , и исходная квадратика Q является *линейным соединением*¹ Q' и $\text{Sing } Q$.

Доказательство. Пусть $K = \ker \hat{q}$ и $L = \mathbb{P}(U)$. Тогда $V = U \oplus K$. Если вектор $u \in U$ лежит в ядре ограничения $\hat{q}|_U$, то $q(u, u') = 0$ для всех $u' \in U$. Записывая произвольный вектор $v \in V$ как $v = u' + u''$ с $u' \in U$ и $u'' \in K$, получаем $\tilde{q}(u, v) = \tilde{q}(u, u'') + \tilde{q}(u, u') = 0$ для всех $v \in V$, откуда $u \in U \cap \ker \hat{q} = 0$. Таким образом, ограничение $q|_U$ невырождено.

Если прямая ℓ проходит через точку $p \in \text{Sing } Q$ и не лежит на квадратике Q , то ограничение формы q на ℓ является ненулевой особой квадратичной формой, а значит, $Q \cap \ell$ — это двойная точка p . Тем самым, каждая прямая, пересекающая $\text{Sing } Q$, либо целиком лежит на Q , либо больше нигде не пересекает квадратика. \square

1.5.2. Касательное пространство. Прямая ℓ , проходящая через точку $p \in Q$, называется *касательной* к квадратике Q в точке $p \in \ell \cap Q$, если $\ell \subset Q$ или $\ell \cap Q$ это двойная точка p . Объединение всех прямых, касающихся Q в точке p , называется *касательным пространством* к квадратике Q в точке $p \in Q$ и обозначается T_pQ .

ЛЕММА 1.3

Прямая $\ell = (ab)$ касается квадратика $Q = V(q)$ в точке $a \in Q$, если и только если $\tilde{q}(a, b) = 0$.

Доказательство. Ограничение формы q на прямую ℓ имеет в базисе a, b матрицу Грама

$$\begin{pmatrix} 0 & \tilde{q}(a, b) \\ \tilde{q}(b, a) & \tilde{q}(b, b) \end{pmatrix},$$

которая имеет нулевой определитель, если и только если $\tilde{q}(a, b) = \tilde{q}(b, a) = 0$. \square

¹Т. е. объединением всех прямых, пересекающих как Q' , так и $\text{Sing } Q$.

Следствие 1.3

Видимый из точки $b \notin Q$ контур¹ квадрики Q высекается из неё гиперплоскостью

$$\text{Ann } \hat{q}(b) = \{x \mid \tilde{q}(b, x) = 0\}.$$

Доказательство. Поскольку $\tilde{q}(b, b) = q(b) \neq 0$, линейная форма $\hat{q}(b) : x \mapsto \tilde{q}(b, x)$ ненулевая и задаёт гиперплоскость. \square

Следствие 1.4

Следующие условия на точку $a \in Q \subset \mathbb{P}(V)$ эквивалентны друг другу:

$$1) p \in \text{Sing } Q \quad 2) T_p Q = \mathbb{P}(V) \text{ это всё пространство} \quad 3) \frac{\partial q}{\partial x_i}(p) = 0 \text{ для всех } i.$$

Следствие 1.5

Если точка $p \in Q$ неособа, то $T_p Q = \{x \in \mathbb{P}_n \mid \tilde{q}(p, x) = 0\}$ является гиперплоскостью коразмерности 1. \square

1.5.3. Коники. Кривые второй степени на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ называются *проективными кониками*. Они являются точками пятимерного проективного пространства $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$. Над алгебраически замкнутым полем имеются ровно три проективно неэквивалентных коники:

- *двойная прямая* $x_0^2 = 0$ имеет ранг 1, и все её точки особые
- *распавшаяся коника* $x_0^2 + x_1^2 = 0$ имеет ранг 2 и является объединением двух различных прямых $x_0 = \pm \sqrt{-1} \cdot x_1$, точка пересечения которых $(0 : 0 : 1)$ является единственной особой точкой распавшейся коники
- *гладкая коника* $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ имеет максимальный ранг 3

что согласуется² с теор. 1.3.

Над произвольным полем \mathbb{k} с $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ каждая непустая гладкая коника $C \subset \mathbb{P}_2$ допускает квадратичную *рациональную параметризацию*, т. е. отображение $\varphi : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}_2$ задаваемое в однородных координатах тройкой взаимно простых однородных многочленов второй степени $\varphi(t_0, t_1) = (\varphi_0(t_0, t_1) : \varphi_1(t_0, t_1) : \varphi_2(t_0, t_1)) \in \mathbb{P}_2$ и биективно отображающее прямую \mathbb{P}_1 на конику $C \subset \mathbb{P}_2$. Такая параметризация задаётся проекцией $p : C \xrightarrow{\simeq} \ell$ коники C из любой её точки $p \in C$ на любую не проходящую через p прямую ℓ . В самом деле, каждая отличная от касательной прямой $T_p C$ прямая (px) с $x \in \ell$ пересекает конику C по двум различным точкам: точке p и ещё одной точке $p'(x) \in C$, однородные координаты которой $(\lambda_0 : \lambda_1)$ в базисе p, x на прямой (px) доставляют отличный от $p = (1 : 0)$ корень уравнения

$$(\lambda_0, \lambda_1) \cdot \begin{pmatrix} q(p, p) & q(p, x) \\ q(x, p) & q(x, x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = 0 \iff 2q(p, x) \cdot \lambda_0 \lambda_1 + q(x, x) \cdot \lambda_1^2 = 0,$$

равный $(\lambda_0 : \lambda_1) = (q(x, x) : -2q(p, x))$. Отображение

$$\ell \ni x \mapsto q(x, x) \cdot p - 2q(p, x) \cdot x \in C \subset \mathbb{P}_2 \tag{1-13}$$

¹ГМТ касания с квадратикой Q всевозможных касательных, опущенных на неё из точки b .

²Распавшаяся коника является линейным соединением особой точки и гладкой квадрики — пары различных точек — на любой прямой, не проходящей через особую точку. Двойная прямая это линейное соединение прямой особых точек и пустого множества — гладкой квадрики на \mathbb{P}_0 .

и задаёт искомую квадратичную параметризацию коники C точками $x \in \ell$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.14. Убедитесь, что все три однородных координаты точки

$$q(x, x) \cdot p - 2q(p, x) \cdot x \in \mathbb{P}_2$$

являются однородными полиномами степени 2 от однородных координат $(t_0 : t_1)$ точки $x \in \ell$ относительно произвольного базиса на прямой ℓ , и что формула (1-13) корректно сопоставляет точке $x = T_p C \cap \ell$ точку $p \in C$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.15. Убедитесь, что проекция коники Веронезе $a_0 a_2 - a_1^2 = 0$ из точки $(1 : 1 : 1)$ на прямую $a_1 = 0$, переводит точку $(\alpha_0^2 : \alpha_0 \alpha_1 : \alpha_1^2)$ в точку $(\alpha_0 : 0 : \alpha_1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2

Гладкая коника пересекает произвольную кривую, заданную на \mathbb{P}_2 однородным уравнением степени d , не более, чем по $2d$ точкам, либо целиком содержится в этой кривой.

Доказательство. Запараметризуем конику однородными полиномами степени 2 от параметра $t = (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_1$. Значения t , при которых коника пересекает кривую с уравнением $f(x) = 0$, являются корнями однородного уравнения $f(q(t)) = 0$, левая часть которого либо тождественно равна нулю, либо имеет степень $2d$. В первом случае вся коника содержится в кривой, во втором случае имеется не более $2d$ различных корней. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3

Каждые 5 точек в \mathbb{P}_2 лежат на некоторой конике. Если никакие 4 из пяти точек не коллинеарны, то такая коника единственна, а если никакие 3 не коллинеарны, то она ещё и невырождена.

Доказательство. При фиксированном $p \in V$ уравнение $q(p) = 0$ линейно по $q \in S^2 V^*$. Поэтому коники, проходящие через $p \in \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ образуют гиперплоскость в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$. Поскольку любые 5 гиперплоскостей в \mathbb{P}_5 имеют непустое пересечение, требуемая коника существует. Если какие-то три из точек коллинеарны, а никакие четыре — нет, коника содержит прямую, проходящую через три коллинеарные точки, и стало быть, распадается в объединение этой прямой и прямой, проходящей через две оставшиеся точки. Тем самым, такая коника единственна. Если никакие три из точек не коллинеарны, любая проходящая через них коника автоматически неособа, и значит, единственна по [предл. 1.2](#). \square

СЛЕДСТВИЕ 1.6

Любые 5 прямых на \mathbb{P}_2 , никакие 3 из которых не конкурентны касаются единственной невырожденной коники.

Доказательство. Это утверждение проективно двойственно предыдущему: 5 точек на $\mathbb{P}_2^\times = \mathbb{P}(V^*)$, двойственные к данным пяти прямым на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$, лежат на единственной гладкой конике $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$, и двойственная ей коника¹ $C \subset \mathbb{P}_2$ есть единственная гладкая коника, касающаяся пяти данных прямых. \square

¹Т. е. коника, образованная касательными к конике C^\times , см. [сл. 1.7](#) на стр. 22 ниже.

1.5.4. Квадратичные поверхности в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ образуют проективное пространство

$$\mathbb{P}_9 = \mathbb{P}(S^2V^*).$$

Поэтому любые 9 точек в \mathbb{P}_3 лежат на некоторой квадрике. В частности, любые три прямые в \mathbb{P}_3 лежат на некоторой квадрике — достаточно взять по 3 точки на каждой прямой и провести квадрику через эти 9 точек.

УПРАЖНЕНИЕ 1.16. Покажите, что вырожденная квадрика в \mathbb{P}_3 (над произвольным полем) не может содержать трёх попарно непересекающихся прямых.

Таким образом, любые три попарно скрещивающиеся прямые в \mathbb{P}_3 лежат на гладкой квадрике. Удобной геометрической моделью такой квадрики является *квадрика Сегре*, состоящая из ненулевых матриц ранга 1 в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{k}))$:

$$Q_s \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \neq 0 \mid \det \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} = \alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10} = 0 \right\}. \quad (1-14)$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.17. Убедитесь, что всякий ненулевой линейный оператор $F : U \rightarrow V$ ранга один имеет вид $v \otimes \xi : u \mapsto v \cdot \langle \xi, u \rangle$ для некоторых ненулевых $v \in V$, $\xi \in U^*$, определяемых по оператору однозначно с точностью до пропорциональности

В ситуации, когда $U = V = \mathbb{k}^2$, а v и ξ имеют в стандартных двойственных базисах пространств \mathbb{k}^2 и \mathbb{k}^{2*} координаты $v = (x_0 : x_1)$ и $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$, матрица оператора $v \otimes \xi$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot (\xi_0 \quad \xi_1) = \begin{pmatrix} \xi_0 x_0 & \xi_1 x_0 \\ \xi_0 x_1 & \xi_1 x_1 \end{pmatrix} \quad (1-15)$$

Сопоставляя паре точек $(\xi, v) \in \mathbb{P}_1^* \times \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^{2*}) \times \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ одномерное подпространство в $\text{Hom}(\mathbb{k}^2, \mathbb{k}^2)$, порождённое оператором $v \otimes \xi$ с матрицей (1-15), мы получаем *вложение Сегре*

$$s : \mathbb{P}_1^* \times \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\text{End}(\mathbb{k}^2)),$$

биективно отображающее $\mathbb{P}_1^* \times \mathbb{P}_1$ на квадрику Сегре $Q_s \subset \mathbb{P}_3$. При этом два семейства координатных прямых на $\mathbb{P}_1^* \times \mathbb{P}_1$ переходят в два семейства прямых на Q_s . А именно, координатная прямая $\xi = \text{const}$ изобразится на квадрике Сегре проективизацией двумерного пространства матриц ранга 1 с фиксированным отношением $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$ между столбцами, а прямая $v = \text{const}$ — матрицами с фиксированным отношением $x = (x_0 : x_1)$ между строками. В каждом из этих семейств все прямые попарно скрещиваются, а любые две прямые из разных семейств пересекаются, причём каждая точка Q_s является точкой пересечения пары прямых из различных семейств.

УПРАЖНЕНИЕ 1.18. Убедитесь, что никаких других прямых на квадрике Сегре нет.

Предложение 1.4

Через любые три попарно непересекающиеся прямые в \mathbb{P}_3 проходит единственная (и автоматически неособая) квадрика. Эта квадрика представляет собою объединение всех прямых, пересекающих все три заданных.

Доказательство. Всякая квадратика, проходящая через три скрещивающихся прямые, является неособой квадратикой Сегре, заметаемой двумя семействами прямолинейных образующих. Все три заданные прямые должны лежать в одном из них. Но тогда любая прямая из другого семейства пересекает каждую из них, и наоборот, всякая прямая пересекающая каждую из них, лежит на квадратике (ибо пересекает её по трём точкам), причём в другом по отношению к трём заданным прямым семействе. \square

1.5.5. Полярное преобразование. Корреляция $\hat{q} : V \simeq V^*$, ассоциированная с невырожденной квадратичной формой q , индуцирует линейный проективный изоморфизм

$$\bar{q} : \mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}(V^*)$$

который называется *полярным преобразованием* или *поляритетом* квадратки Q . Поляритет переводит точку $p \in \mathbb{P}_n$ в гиперплоскость $L \subset \mathbb{P}_n$, заданную уравнением $\bar{q}(p, x) = 0$. Точка p и гиперплоскость L в этом случае называются *полюсом* и *полярной* друг друга относительно квадратки Q . Поляра точки, не лежащей на квадратике, это гиперплоскость, высекающая видимый из этой точки контур квадратки, а поляра точки, лежащей на квадратике, — это гиперплоскость, касающаяся квадратки в этой точке. Таким образом, всякую квадратку Q можно охарактеризовать как ГМТ, лежащих на своих полярах.

Поскольку условие $\bar{q}(a, b) = 0$ симметрично по a и b , точка a лежит на поляре точки b , если и только если точка b лежит на поляре точки a . Такие точки называются *сопряжёнными* относительно квадратки Q .

Предложение 1.5

Пусть $a, b \notin Q$ и прямая (ab) пересекает Q в двух различных точках c, d . Точки a, b сопряжены относительно квадратки Q , если и только если двойное отношение $[a, b, c, d] = -1$.

Доказательство. Ограничение квадратки Q на прямую (cd) задаётся в однородных координатах $(x_0 : x_1)$ относительно базиса c, d квадратичной формой $q(x) = \det(x, c) \cdot \det(x, d)$, поляризация которой есть $\bar{q}(x, y) = \frac{1}{2} (\det(x, c) \cdot \det(y, d) + \det(y, c) \cdot \det(x, d))$. Условие сопряжённости $\bar{q}(a, b) = 0$ означает, что $\det(a, c) \cdot \det(b, d) = -\det(b, c) \cdot \det(a, d)$ или $[a, b, c, d] = -1$. \square

Предложение 1.6

Для неособой квадратки G и произвольной квадратки Q в \mathbb{P}_n гиперплоскости, полярные относительно квадратки G точкам $p \in Q$, образуют в двойственном проективном пространстве \mathbb{P}_n^\times квадратку в Q_G^\times того же ранга, что и квадратка Q . Если Q и G имеют в некоторых однородных координатах на \mathbb{P}_n матрицы Грама A и Γ соответственно, то квадратка Q_G^\times имеет в двойственных однородных координатах на \mathbb{P}_n^\times матрицу $\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}$.

Доказательство. Поляритет $\hat{g} : \mathbb{P}_n \simeq \mathbb{P}_n^\times$ гладкой квадратки $G \subset \mathbb{P}_n$ переводит точку из \mathbb{P}_n со столбцом координат x в точку двойственного пространства \mathbb{P}_n^\times со строкой координат $\xi = x^t \Gamma$ и является проективным изоморфизмом. Таким образом, полярная точке $x \in Q$ гиперплоскость ξ удовлетворяет уравнению, которое получается из уравнения $x^t \cdot A \cdot x = 0$ квадратки Q подстановкой $x = \Gamma^{-1} \xi^t$, т. е. уравнению $\xi \cdot \Gamma^{-1} A \Gamma^{-1} \cdot \xi^t = 0$. \square

Следствие 1.7

Касательные пространства гладкой квадратки $Q \subset \mathbb{P}_n$ образуют в \mathbb{P}_n^\times гладкую квадратку Q^\times . Матрицы Грама квадратик Q и Q^\times в двойственных базисах пространств \mathbb{P}_n и \mathbb{P}_n^\times обратны друг другу.

Доказательство. Положим в предыдущей теореме $G = Q$ и $\Gamma = A$, и заметим, что гиперплоскости, полярные точкам $p \in Q$ относительно самой же квадратки Q , это в точности касательные пространства $T_p Q$. \square

1.6. Пучки квадратик В этом разделе мы по умолчанию считаем, что основное поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто и $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$. Напомню¹, что прямые в пространстве квадратик $\mathbb{P}(S^2 V^*)$ на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ называются *пучками квадратик*. Такой пучок $(Q_0 Q_1) \subset \mathbb{P}(S^2 V^*)$ однозначно задаётся любой парой различных лежащих в нём квадратик $Q_0 = V(q_0)$, $Q_1 = V(q_1)$ и состоит из всех квадратик вида

$$Q_\lambda = V(\lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1) = \{v \in \mathbb{P}(V) \mid \lambda_0 q_0(v) + \lambda_1 q_1(v) = 0\}, \quad (1-16)$$

где $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1) \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$.

Пересечение базисных квадратик $B = Q_0 \cap Q_1$ называется *базисным множеством* пучка. Поскольку каждая квадратика из пучка (1-16) проходит через B , базисное множество является пересечением всех квадратик пучка и не зависит от выбора базисных квадратик Q_0, Q_1 на прямой $(Q_0 Q_1)$. Многочлен

$$\chi_{(q_0 q_1)}(t_0, t_1) \stackrel{\text{def}}{=} \det(t_0 q_0 + t_1 q_1) \in \mathbb{k}[t_0, t_1] \quad (1-17)$$

называется *характеристическим многочленом* пучка (1-16). Это однородный многочлен степени $n + 1$ от $t = (t_0 : t_1)$. В отличие от базисного множества, характеристический многочлен (1-17) *зависит* от выбора базисных квадратик Q_0, Q_1 , и даже их уравнений q_0, q_1 . При переходе к другим двум базисным квадратикам в том же самом пучке или умножении их уравнений на константы переменные $(t_0 : t_1)$ подвергаются обратимому линейному преобразованию. Поэтому алгебраическим инвариантом пучка является не сам многочлен (1-17), а только его класс по модулю обратимой линейной замены переменных.

1.6.1. Невырожденные пучки. Пучок квадратик называется *невырожденным*, если в нём есть хотя бы одна гладкая квадратика. Это означает, что характеристический многочлен (1-17) отличен от нуля хотя бы в одной точке на \mathbb{P}_1 и, в частности, является ненулевым многочленом. Поэтому в невырожденном пучке квадратик на \mathbb{P}_n может быть не более $n + 1$ особых квадратик, причём вершинные подпространства никаких двух из них не пересекаются, так вектор, лежащий в ядре сразу двух корреляций \hat{q}_0, \hat{q}_1 , лежит в ядре и любой их линейной комбинации $\lambda_0 \hat{q}_0 + \lambda_1 \hat{q}_1$, что означает вырожденность сразу всех квадратик пучка.

Множество вырожденных квадратик в невырожденном пучке (1-16) называют *спектром* этого пучка. Квадратичные формы $\lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1$, задающие квадратик из спектра, биективно соответствуют корням $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1)$ характеристического многочлена (1-17). Будем называть *кратностью* $\text{mult } Q_\lambda$ вырожденной квадратик Q_λ , отвечающей корню λ характеристического многочлена (1-17), кратность этого корня — максимальное $k \in \mathbb{N}$, такое что многочлен (1-17) делится в кольце многочленов $\mathbb{k}[t_0, t_1]$ на $\det^k(\lambda, t) = (\lambda_0 t_1 - \lambda_1 t_0)^k$. Кратности всех гладких квадратик пучка по определению положим равными нулю. Над алгебраически замкнутым полем спектр невырожденного пучка квадратик на \mathbb{P}_n состоит ровно из $n + 1$ квадратик с учётом их кратностей. Рассматриваемый как неупорядоченный набор из $n + 1$ не обязательно различных точек на \mathbb{P}_1 с точностью до дробно линейного автоморфизма \mathbb{P}_1 , он не зависит от выбора базиса в пучке.

ЛЕММА 1.4

Кратность $\text{mult } S$ каждой особой квадратик S из невырожденного пучка строго больше размерности $\dim \text{Sing } S$ пространства её особых точек.

¹См. н° 1.4.4 на стр. 13.

Доказательство. Пусть квадрика $G \subset \mathbb{P}_n$ неособа, а квадрика $S \subset \mathbb{P}_n$ имеет $\dim \text{Sing } S = k$. Это означает, что её матрица Грама имеет $\text{rk } S = (n + 1) - (k + 1) = n - k$, и все миноры порядка $n - k + 1$ и выше в ней — нулевые.

УПРАЖНЕНИЕ 1.19. Выведите из этого, что характеристический многочлен $\det(t_0 S + t_1 G)$ делится на t_1^{k+1} .

Таким образом кратность задающей S точки $t = (1 : 0) \in \mathbb{P}_1$ не менее $k + 1$. \square

1.6.2. Невырожденные пучки коник. Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} невырожденный пучок коник на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ содержит 1, 2 или 3 различных особых коники, а его базисное множество состоит из 1, 2, 3 или 4 различных точек. Если в пучке есть двойная прямая, то все его базисные точки лежат на этой прямой. Если в пучке есть распавшаяся коника $\ell_1 \cup \ell_2$, то все базисные точки такого пучка лежат на ней так, что на каждой из прямых ℓ_1, ℓ_2 есть хотя бы одна базисная точка, ибо любая гладкая коника пучка пересекает каждую из двух прямых.

ПРИМЕР 1.7 (пучок с одной базисной точкой)

Если базисное множество пучка состоит из единственной точки p , особой коникой в нём может быть лишь двойная прямая, касающаяся любой гладкой коники пучка в точке p . Наоборот, любая гладкая коника C и касающаяся её в произвольной точке $p \in C$ двойная прямая ℓ задают регулярный пучок коник с единственной базисной точкой p , и единственной особой коникой — двойной прямой ℓ . Все гладкие коники этого пучка пересекаются друг с другом по единственной точке p и имеют в ней общую касательную см. рис. 1◊10.

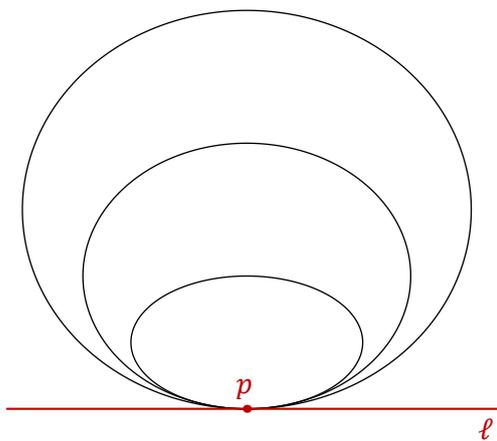


Рис. 1◊10. Пучок с одной базисной точкой ($a = b = c = d = p$).

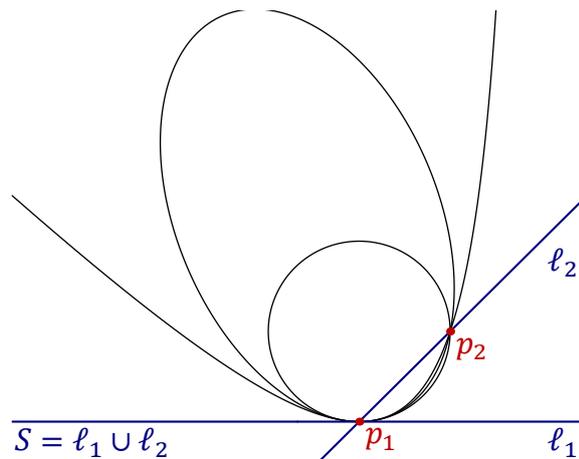


Рис. 1◊11. Пучок с двумя базисными точками $p_1 = a = b = c, p_2 = d$ и одной вырожденной коникой S .

ПРИМЕР 1.8 (пучки с двумя базисными точками)

Если базисное множество пучка состоит из двух точек p_1, p_2 , то вырожденными кониками в нём могут быть только двойная прямая $\ell = (p_1 p_2)$ или такая распавшаяся коника $\ell_1 \cup \ell_2$, что $p_1 \in \ell_1, p_2 \in \ell_2$. Второй случай разделяется на два подслучая: либо обе точки p_1, p_2 отличны от $\ell_1 \cap \ell_2$, как на рис. 1◊12, либо $p_1 = \ell_1 \cap \ell_2$, а $p_2 \in \ell_2 \setminus \ell_1$, как на рис. 1◊11.

Если имеет место последнее, то распавшаяся коника $\ell_1 \cap \ell_2$ является единственной особой коникой в пучке, а каждая гладкая коника пучка касается прямой ℓ_1 в точке p_1 и проходит через

точку p_2 , см. рис. 1◊11. В частности, любые две гладкие коники в таком пучке пересекаются ровно по двум точкам p_1, p_2 и имеют в точке p_1 общую касательную.

Двойная прямая $\ell = (p_1 p_2)$ и распавшаяся коника $\ell_1 \cup \ell_2$ с $p_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2, p_2 \in \ell_2 \setminus \ell_1$ возникают в пучке с двумя базисными точками p_1, p_2 только одновременно в силу следующей леммы.

ЛЕММА 1.5

Коника, касающиеся двух заданных прямых ℓ_1, ℓ_2 в двух заданных точках $p_1 \in \ell_1, p_2 \in \ell_2$, отличных от $\ell_1 \cap \ell_2$, составляют пучок. Этот пучок содержит ровно две вырожденные коники: двойную прямую $\ell = (p_1 p_2)$ и распавшуюся конику $\ell_1 \cup \ell_2$, причём прямые ℓ_1 и ℓ_2 однозначно восстанавливаются по двойной прямой $(p_1 p_2)$ и любой гладкой конике C из пучка как касательные к C в точках пересечения $C \cap (p_1 p_2)$.

Доказательство. Каждый ненулевой вектор $p \in V$ задаёт сюръективное линейное отображение

$$S^2 V^* \rightarrow V^*, \quad q \mapsto \hat{q}(p), \quad (1-18)$$

переводящее квадратичную форму q в ковектор

$$\hat{q}(p) : V \rightarrow \mathbb{k}, \quad v \mapsto \bar{q}(v, p).$$

Так как $\dim V = 3$, ядро отображения (1-18) имеет размерность $\dim S^2 V^* - \dim V^* = 3$. Поэтому полный прообраз любого одномерного подпространства $\xi \subset V^*$ при отображении (1-18) имеет размерность 4, а его проективизация имеет коразмерность 2 в пространстве коник. Беря вектор p на прямой $\ell = \text{Ann } \xi$, мы заключаем, что коники, касающиеся прямой ℓ в точке $p \in \ell$, образуют в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$ проективное подпространство коразмерности 2. Два таких подпространства, отвечающие $p_1 \in \ell_1$ и $p_2 \in \ell_2$, пересекаются как минимум по прямой. Если бы их пересечение содержало плоскость, то в пространстве коник, касающихся ℓ_1 и ℓ_2 в точках p_1 и p_2 , нашлась бы коника, проходящая через любые две наперёд заданные точки. Но такая коника, проходящая через отличную от p_1 и p_2 точку прямой ℓ и ещё какую-нибудь точку вне прямых ℓ, ℓ_1, ℓ_2 , распадается в объединение прямой ℓ и ещё одной прямой ℓ' , отличной от ℓ, ℓ_1, ℓ_2 . Поэтому она не может пересекать прямые ℓ_1, ℓ_2 с кратностью 2 одновременно и в p_1 , и в p_2 . Это доказывает первое утверждение леммы. Остальные утверждения очевидны из рис. 1◊12. □

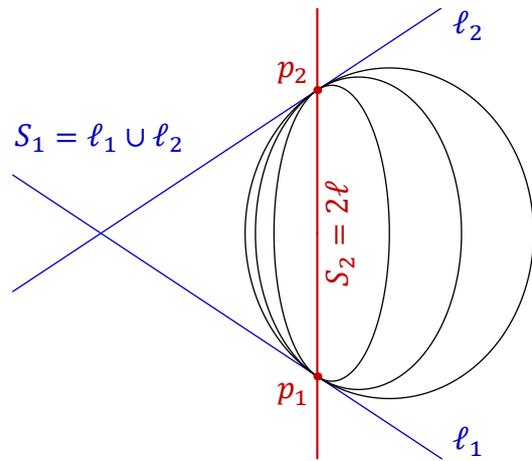


Рис. 1◊12. Пучок с двумя базисными точками $p_1 = a = b, p_2 = c = d$ и двумя вырожденными кониками S_1, S_2 .

ПРИМЕР 1.9 (пучок с тремя базисными точками)

Если базисное множество пучка коник состоит из трёх точек p_1, p_2, p_3 , то они не коллинеарны¹. В частности, такой пучок не содержит двойных прямых. Кроме того, ни одна из точек p_i не может быть особой одновременно для двух распавшихся коник из пучка². Каждая распавшаяся коника $\ell_1 \cup \ell_2$ из такого пучка проходит через базисные точки либо так, что $p_1 = \ell_1 \cap \ell_2$,

¹Иначе содержащая их прямая пересекала бы любую гладкую конику пучка по трём точкам.

²Иначе все коники пучка были бы особы в этой точке, см. самое начало н° 1.6.1.

$p_2 \in \ell_1 \setminus \ell_2, p_3 \in \ell_2 \setminus \ell_1$, либо так, что $p_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2$, а $p_2, p_3 \in \ell_2 \setminus \ell_1$. На рис. 1◊13 ниже первое отвечает прямым ℓ'_1, ℓ'_2 , второе — прямым ℓ''_1, ℓ''_2 . Во втором случае любая гладкая коника C из пучка касается прямой ℓ_1 в точке p_1 . В первом случае все гладкие коники пучка имеют в точке p_1 общую касательную, поскольку проходящая через p_1 прямая ℓ , касающаяся фиксированной гладкой коники C из пучка в точке $p_1 \in C$, соприкасается в точке p_1 с каждой коникой пучка, порождённого коникой C и распавшейся коникой $\ell'_1 \cup \ell'_2$, которая тоже касается прямой ℓ в точке $p_1 = \ell'_1 \cap \ell'_2$.

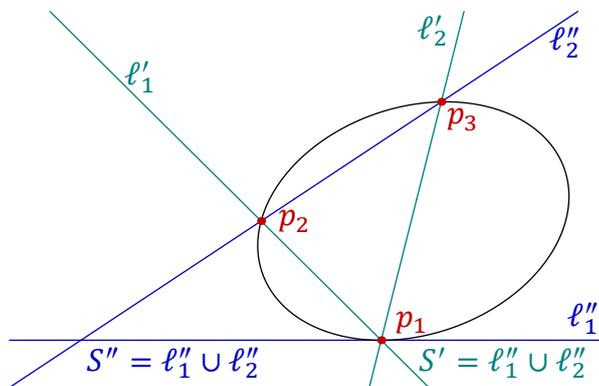


Рис. 1◊13. Пучок с тремя базисными точками $p_1 = a = b, p_2 = c, p_3 = d$ и двумя вырожденными кониками S_1, S_2 .

УПРАЖНЕНИЕ 1.20. Убедитесь в этом и покажите, что множество всех коник $C \subset \mathbb{P}_2$, касающихся заданной прямой ℓ в заданной точке $p \in \ell$ и проходящих через две другие различные заданные точки $c, d \notin \ell$, составляют пучок, содержащий ровно две вырожденные коники: $(cd) \cup \ell$ и $(pc) \cup (pd)$.

ПРИМЕР 1.10 (простой пучок коник)

Пучок коник, спектр которого состоит из трёх разных точек, называется *простым*. По лем. 1.4 все точки спектра простого пучка имеют кратность 1, и по предыдущему базисное множество такого пучка состоит из четырёх различных точек a, b, c, d , никакие 3 из которых не коллинеарны.

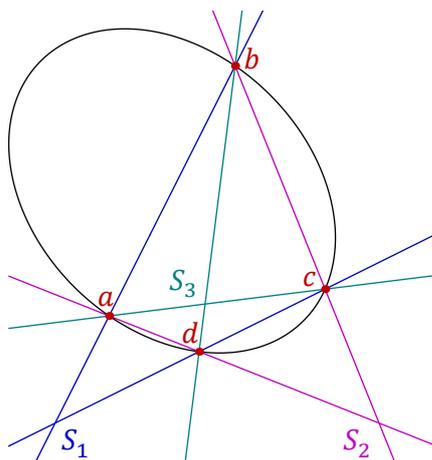


Рис. 1◊14. Простой пучок.

УПРАЖНЕНИЕ 1.21. Покажите, что множество всех коник, проходящих через четыре различные точки a, b, c, d , никакие три из которых не коллинеарны, представляет собою простой пучок, три особые коники которого суть пары противоположных сторон четырёхвершинника $abcd$, как на рис. 1◊14.

Таким образом, простой пучок коник однозначно определяется своими базисными точками a, b, c, d . В однородных координатах $x = (x_0 : x_1 : x_2)$ на \mathbb{P}_2 уравнения его коник имеют вид

$$\frac{\det(x, a, b) \cdot \det(x, c, d)}{\det(x, a, d) \cdot \det(x, b, c)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1},$$

где $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1)$ пробегает \mathbb{P}_1 . Все предыдущие примеры являются вырождениями простого пучка и получаются из него, когда некоторые из базисных точек слипаются друг с другом. А

именно, пучок на рис. 1◊13 возникает при $a, b \rightarrow p_1, c = p_2, d = p_3$, пучок на рис. 1◊12 — когда $a, b \rightarrow p_1, c, d \rightarrow p_2$, пучок на рис. 1◊11 — если $a, b, c \rightarrow p_1, d = p_2$, а на рис. 1◊10 все четыре базисные точки схлопываются в одну.

ПРИМЕР 1.11 (В. С. Жгун)

Покажем, что треугольник xuz с вершинами в точках пересечения трёх пар противоположных сторон четырёхвершинника $abcd$ на рис. 1◊15 автополярен относительно всех гладких коник, описанных около этого четырёхвершинника. Действительно, каждая такая коника $Q = V(q)$ лежит в простом пучке, порождённом любыми двумя из трёх распавшихся коник

$$S_x = V(f_x) = (ab) \cup (cd)$$

$$S_y = V(f_y) = (ad) \cup (bc)$$

$$S_z = V(f_z) = (ac) \cup (bd).$$

Поскольку $x = \text{Sing } S_x = \ker \hat{f}_x$, мы имеем равенства $\tilde{f}_x(y, x) = \tilde{f}_x(z, x) = 0$. Аналогично, $\tilde{f}_y(x, y) = \tilde{f}_y(z, y) = 0$ и $\tilde{f}_z(x, z) = \tilde{f}_z(y, z) = 0$. Так как билинейная форма \tilde{q} является линейной комбинацией билинейных форм \tilde{f}_x и \tilde{f}_y , из равенств $\tilde{f}_x(x, y) = \tilde{f}_y(x, y) = 0$ вытекает равенство $\tilde{q}(x, y) = 0$. Аналогично получаем равенства $\tilde{q}(x, z) = 0$ и $\tilde{q}(y, z) = 0$.

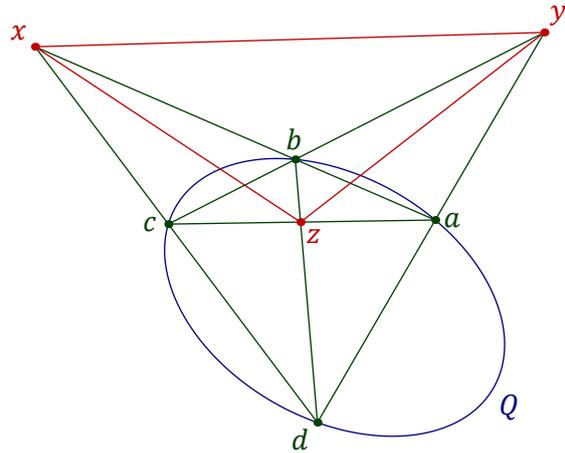


Рис. 1◊15. Автополярный Δxuz .

УПРАЖНЕНИЕ 1.22 (ПОСТРОЕНИЕ ШТЕЙНЕРА ИЛИ ЗАДАЧА МИШУСТИНА). Одной линейкой постройте полярную данной точки относительно данной гладкой коники.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.2. В правой части стоит геометрическая прогрессия $q^n + q^{n-1} + \dots + q + 1$, а слева — количество ненулевых векторов в $(n + 1)$ -мерном пространстве, делённое на количество ненулевых векторов в одномерном пространстве, т. е. $(q^{n+1} - 1)/(q - 1)$.

Упр. 1.3. Это очевидно из подобия прямоугольных треугольников на рис. 1.2 на стр. 5, а также из соотношения $(s : 1) = (x_0 : x_1) = (1 : t)$.

Упр. 1.4. В качестве точек q и r , задающих такую прямую, можно взять компоненты u, w разложения любого вектора $v \in V$, отвечающего точке $p \in \mathbb{P}(V)$. Наоборот, если v лежит в двумерном векторном подпространстве с базисом u, w , где $u \in U$ и $w \in W$, то компоненты разложения вектора v по U и W пропорциональны u и w в силу единственности такого разложения.

Упр. 1.6. Пусть $L_1 = \mathbb{P}(U), L_2 = \mathbb{P}(W), p = \mathbb{P}(\mathbb{k} \cdot e)$. Поскольку $p \notin L_2, V = W \oplus \mathbb{k} \cdot e$. Центральная проекция из p индуцирована линейной проекцией V на W вдоль $\mathbb{k} \cdot e$. Так как $p \notin L_1$, ограничение этой проекции на подпространство U имеет нулевое ядро и, стало быть, является линейным изоморфизмом.

Упр. 1.7. Биjectивность очевидна. Докажем линейность. Пусть прямая $\ell \subset \mathbb{P}_2$ аннулируется линейной формой $\xi \in \mathbb{P}_2^\times$, и $a, b \in L$ — две различные точки. Точка $\ell \cap L = (ab) \cap \text{Ann } \xi = \xi(b) \cdot a - \xi(a) \cdot b$ линейно зависит от ξ .

Упр. 1.8. Пусть $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ и дробно линейные автоморфизмы

$$\varphi_p : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1 \quad \text{и} \quad \varphi_q : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$$

таковы, что прообразами точек $\infty, 0, 1$ являются, соответственно, p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3 . Тогда $\varphi_p(p_4) = \varphi_q(q_4)$ и $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p$ переводит p_1, p_2, p_3, p_4 в q_1, q_2, q_3, q_4 . Наоборот, если $\varphi_p : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ переводит p_1, p_2, p_3 в $\infty, 0, 1$, а φ_{qp} переводит p_1, p_2, p_3, p_4 в q_1, q_2, q_3, q_4 , то $\varphi_p \circ \varphi_{qp}^{-1}$ переводит q_1, q_2, q_3, q_4 , соответственно, в $\infty, 0, 1, [p_1, p_2, p_3, p_4]$, откуда

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4].$$

Упр. 1.10. Если поле \mathbb{k} конечно и состоит из q элементов, пространство функций $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}$ тоже конечно и состоит из $q^{\dim V}$ элементов. Так как алгебра многочленов бесконечна, гомоморфизм из алгебры многочленов в алгебру функций имеет ненулевое ядро. Его сюръективность следует из того, что для любого конечного набора точек существует многочлен, принимающий в этих точках любые наперёд заданные значения. Над бесконечным полем \mathbb{k} инъективность гомоморфизма алгебры многочленов $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ в алгебру функций $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}$ доказывается индукцией по $n = \dim V$. Так как ненулевой многочлен $f(x)$ от одной переменной не может иметь $\geq \deg f$ корней, тождественно нулевая на бесконечном множестве $\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}(\mathbb{k})$ функция может получиться только из нулевого многочлена. Многочлен от n переменных является многочленом от x_n с коэффициентами из $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_{n-1}]$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{v=0}^d \varphi_v(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot x_n^{d-v}.$$

Вычисляя коэффициенты φ_v в произвольной точке $(p_1, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{k}^{n-1}$, мы получаем многочлен от x_n с постоянными коэффициентами, задающий тождественно нулевую функцию на прямой $(x_1, \dots, x_{n-1}) = (p_1, \dots, p_{n-1})$, и потому нулевой. Тем самым, все многочлены φ_v являются тождественно нулевыми функциями на \mathbb{A}^{n-1} . По предположению индукции, они являются нулевыми многочленами.

Упр. 1.16. Особая квадратика в \mathbb{P}_3 это либо двойная плоскость (квадрика ранга 1), либо пара различных пересекающихся плоскостей (линейное соединение особой прямой с гладкой пустой квадратикой на дополнительной прямой), либо двойная прямая (линейное соединение особой прямой с гладкой пустой квадратикой на дополнительной прямой), либо одна двойная точка (линейное соединение особой точки с гладкой пустой коникой в дополнительной плоскости), либо простой конус (линейное соединение особой точки с гладкой непустой коникой в дополнительной плоскости). Убедитесь, что в последнем случае любая лежащая на квадратике прямая проходит через особую точку.

Упр. 1.18. Всякая прямая, лежащая на Q_s и проходящая через какую-нибудь точку $p \in Q_s$ содержится в плоской конике $Q_s \cap T_p Q_s$, где $T_p Q$ — касательная плоскость к Q в точке p . Эта коника исчерпывается парой проходящих через p прямых из описанных выше двух семейств.

Упр. 1.19. Это вытекает из следующей формулы, справедливой в $\mathbb{k}[\alpha, \beta]$:

$$\det(\alpha A + \beta B) = \sum_{p=0}^n \operatorname{tr}(A^p A \cdot A^p B^\vee) \alpha^p \beta^{n-p},$$

где $A, B \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{k})$ — квадратные матрицы размера $n \times n$, а $A^p A$ и $A^p B^\vee$ — квадратные матрицы размера $\binom{n}{p} \times \binom{n}{p}$, клетки которых занумерованы возрастающими p -элементными подмножествами $I, J \subset \{1, \dots, n\}$, и в IJ -той клетке у $A^p A$ находится IJ -тый $p \times p$ минор a_{IJ} матрицы A , а у $A^p B^\vee$ — алгебраическое дополнение $(-1)^{|I|+|J|} b_{\overline{IJ}}$ к JI -му $p \times p$ минору матрицы B . Для доказательства обозначьте через a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_n столбцы матриц A и B , рассматриваемые как векторы из координатного пространства \mathbb{k}^n , и вычислите коэффициент при $\alpha^p \beta^{n-p}$ в грассмановом произведении $(\alpha a_1 + \beta b_1) \wedge \dots \wedge (\alpha a_n + \beta b_n) = \det(\alpha A + \beta B) e_1 \wedge \dots \wedge e_n$, где e_1, \dots, e_n — стандартный базис в \mathbb{k}^n .

Упр. 1.20. В доказательстве лем. 1.5 на стр. 25 мы видели, что коники, касающиеся прямой ℓ в точке $p \in \ell$, образуют в пространстве коник \mathbb{P}_5 подпространство коразмерности 2. Оно пересекается с двумя гиперплоскостями коник, проходящих через точки c, d по крайней мере по прямой. Если бы пересечение имело размерность хотя бы два, то через любые две точки на \mathbb{P}_2 проходила бы коника, одновременно содержащая точки c, d и касающаяся прямой ℓ в точке p , что не так: возьмём одну из точек на прямой (cd) , а другую — вне $(cd) \cup \ell$. Описание особых коник в этом пучке очевидно.

Упр. 1.21. Условие прохождения через точку задаёт в пространстве коник гиперплоскость. Если никакие три из четырёх точек не коллинеарны, эти гиперплоскости линейно независимы, т. к. через любые три из точек можно провести распавшуюся конику, не проходящую через четвёртую точку. Следовательно, коники проходящие через точки a, b, c, d , никакие три из которых не коллинеарны, образуют пучок. Этот пучок содержит три распавшихся коники, образованные парами противоположных сторон четырёхвершинника $abcd$.

Упр. 1.22. Согласно прим. 1.11 на стр. 27, полярной точки x относительно коники на рис. 1♦15 на стр. 27 является прямая uz . Для её построения достаточно провести через x любые две прямые, пересекающие конику в точках a, b и c, d соответственно, и найти точки $y = (ad) \cap (bc)$ и $z = (ac) \cap (bd)$.