

§6. Алгебраические многообразия

Всюду в этом параграфе мы продолжаем по умолчанию считать, что основное поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто.

6.1. Определения и примеры. Алгебраическое многообразие определяется по той же схеме, что и гладкие или аналитические многообразия в дифференциальной геометрии, т. е. как топологическое пространство, каждая точка которого обладает открытой окрестностью, гомеоморфной некой стандартной «локальной модели», и любые две таких модели, происходящие из разных окрестностей, регулярным образом согласованы на пересечении этих окрестностей. В качестве локальных моделей в алгебраической геометрии допускаются *произвольные*¹ аффинные алгебраические многообразия, а регулярная согласованность двух таких моделей на их пересечении означает, что переход от одной модели к другой задаётся рациональными функциями, регулярными на рассматриваемом пересечении. Точные определения таковы.

Алгебраической аффинной картой на топологическом пространстве X называется гомеоморфизм $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ какого-нибудь аффинного алгебраического многообразия X_U с топологией Зарисского на открытое подмножество $U \subset X$ с индуцированной из X топологией. Две алгебраических аффинных карты $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ и $\varphi_W : X_W \xrightarrow{\sim} W$ на X называются *совместимыми*, если гомеоморфизм склейки между прообразами пересечения $U \cap W$ в X_U и X_W

$$\varphi_{WU} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_W^{-1} \circ \varphi_U|_{\varphi_U^{-1}(U \cap W)} : \varphi_U^{-1}(U \cap W) \xrightarrow{\sim} \varphi_W^{-1}(U \cap W)$$

регулярен в том смысле, что его гомоморфизм поднятия $\varphi_{WU}^* : f \mapsto f \circ \varphi_{WU}$ является изоморфизмом алгебры рациональных функций на X_U , регулярных на $\varphi_U^{-1}(U \cap W)$, с алгеброй рациональных функций на X_W , регулярных на $\varphi_W^{-1}(U \cap W)$, т. е.

$$\varphi_{WU}^* : \mathbb{k}[\varphi_W^{-1}(U \cap W)] \xrightarrow{\sim} \mathbb{k}[\varphi_U^{-1}(U \cap W)] .$$

Открытое покрытие $X = \bigcup U_\nu$ попарно совместимыми алгебраическими картами называется *алгебраическим атласом* на X . Два алгебраических атласа называются *эквивалентными*, если их объединение также представляет собой алгебраический атлас. Топологическое пространство X , с зафиксированным на нём классом эквивалентных алгебраических атласов называется *алгебраическим многообразием*. Алгебраические многообразия, обладающие конечным атласом, называются многообразиями *конечного типа*.

Пример 6.1 (ПРОЕКТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА)

Проективное пространство $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{k}^{n+1})$ с однородными координатами

$$x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$$

обладает алгебраическим атласом из $(n + 1)$ стандартных аффинных карт

$$U_i = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mid x_i \neq 0\}, \quad 0 \leq i \leq n .$$

Обозначим через $X_i \simeq \mathbb{A}^n$ аффинное пространство с координатами²

$$t_i = (t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}) .$$

¹В том числе не гладкие — такие, как крест $\text{Spec}_m(\mathbb{k}[x, y]/(xy))$.

²первый индекс i является номером карты, а сами координаты $t_{i,\nu}$ в i -той карте нумеруются вторым индексом $\nu \neq i, 0 \leq \nu \leq n$

Отображение $\varphi_i : t_i \mapsto (t_{i,0} : \dots : t_{i,i-1} : 1 : t_{i,i+1} : \dots : t_{i,n})$ задаёт биекцию

$$\varphi_i : X_i \xrightarrow{\sim} U_i, \quad (6-1)$$

в которой прообразом пересечения $U_i \cap U_j$ является главное открытое множество $\mathcal{D}(t_{i,j}) \subset X_i$.
Отображение склейки

$$\varphi_{ji} = \varphi_j^{-1} \varphi_i : X_i \supset \mathcal{D}(t_{i,j}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(t_{j,i}) \subset X_j$$

действует по формуле $t_i \mapsto t_{i,j}^{-1} \cdot t_j$ и устанавливает изоморфизм между аффинными алгебраическими многообразиями

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(t_{i,j}) &= \text{Spec}_m \mathbb{k}[t_{i,j}^{-1}, t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}], \\ \mathcal{D}(t_{j,i}) &= \text{Spec}_m \mathbb{k}[t_{j,i}^{-1}, t_{j,0}, \dots, t_{j,j-1}, t_{j,j+1}, \dots, t_{j,n}]. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.1. Убедитесь в этом.

Поэтому перенос топологии Зарисского с $X_i \simeq \mathbb{A}^n$ на U_i при помощи биекции (6-1) определяет согласованные индуцированные топологии на пересечениях $U_i \cap U_j$ и корректно наделяет \mathbb{P}_n топологией, в которой все отображения (6-1) являются гомеоморфизмами.

ПРИМЕР 6.2 (ГРАССМАНИАНЫ)

Точками грассманова многообразия $\text{Gr}(k, m)$ являются k -мерные векторные подпространства в координатном векторном пространстве \mathbb{k}^m или, что то же самое, орбиты действия полной линейной группы $\text{GL}_k(\mathbb{k})$ левыми умножениями на матрицах $x \in \text{Mat}_{k \times m}(\mathbb{k})$ ранга k . При этом орбите матрицы x отвечает линейная оболочка её строк, а подпространству $W \subset \mathbb{k}^m$ — орбита матрицы, по строкам которой записаны координаты относительно стандартного базиса e_1, \dots, e_m в \mathbb{k}^m каких-нибудь k базисных векторов пространства W . Грассманиан $\text{Gr}(k, m)$ покрывается $\binom{m}{k}$ стандартными аффинными картами U_I , занумерованными строго возрастающими наборами индексов $I = (i_1, \dots, i_k)$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$. Если обозначить через $s_I(x) \subset x$ квадратную подматрицу, образованную столбцами с номерами из I , то карта

$$U_I \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \text{Mat}_{k \times m}(\mathbb{k}) \mid \det s_I(x) \neq 0\}$$

состоит из всех k -мерных подпространств $W \subset \mathbb{k}^m$, которые изоморфно проектируются на k -мерную координатную плоскость E_I , натянутую на стандартные базисные векторы e_i с $i \in I$, вдоль дополнительной $(m - k)$ -мерной координатной плоскости $E_{\bar{I}}$, натянутой на остальные базисные векторы e_ℓ с $\ell \notin I$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.2. Убедитесь в этом.

Обозначим через $X_I \simeq \text{Mat}_{k \times (m-k)}(\mathbb{k}) \simeq \mathbb{A}^{k(m-k)}$ аффинное пространство всех матриц из k строк ширины $m - k$, столбцы которых занумерованы индексами $v \in \bar{I}$ из дополнительного к I набора $\bar{I} = \{1, 2, \dots, m\} \setminus I$. Отображение

$$\varphi_I : X_I \xrightarrow{\sim} U_I, \quad (6-2)$$

превращающее $k \times (m - k)$ -матрицу $t \in X_I$ в $k \times m$ -матрицу $\varphi_I(t)$ дописыванием к ней единичной $k \times k$ -матрицы в столбцы с номерами из I , биективно, и

$$\varphi_I^{-1}(U_I \cap U_J) = \mathcal{D}(\det s_J(\varphi_I(t))) \subset X_I.$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.3. Убедитесь, что отображение склейки

$$\varphi_{JI} = \varphi_J^{-1} \varphi_I : X_I \supset \mathcal{D}(\det s_J(\varphi_I(t))) \rightarrow \mathcal{D}(\det s_I(\varphi_J(t))) \subset X_J$$

действует по формуле $t \mapsto s_J^{-1}(s_J^{-1}(\varphi_I(t)) \cdot \varphi_I(t))$ и является изоморфизмом аффинных алгебраических многообразий.

Отсюда мы как и в предыдущем примере [прим. 6.1](#) мы заключаем, что грассманиан $\mathrm{Gr}(k, n)$ является алгебраическим многообразием конечного типа. При $k = 1, m = n+1$ эта конструкция превращается в конструкцию из [прим. 6.1](#).

ПРИМЕР 6.3 (ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОГООБРАЗИЙ)

Структура алгебраического многообразия на прямом произведении алгебраических многообразий X и Y задаётся атласом, состоящим из всех попарных произведений $U \times W$ аффинных карт $U \subset X$ и $W \subset Y$ на X, Y .

6.1.1. Структурный пучок и регулярные морфизмы. Заданная на открытом подмножестве W алгебраического многообразия X функция $f : U \rightarrow \mathbb{k}$ называется *регулярной* в точке $x \in U$, если существуют покрывающая x аффинная карта $\varphi_W : X_W \xrightarrow{\sim} W$ и такая определённая в точке $\varphi_W^{-1}(x) \in X_W$ рациональная функция $\tilde{f} \in \mathbb{k}(X_W)$, что $\varphi_W^* f(z) = \tilde{f}(z)$ для всех $z \in \varphi_W^{-1}(U \cap W) \cap \mathrm{Dom} \tilde{f}$. Регулярные в каждой точке открытого подмножества $U \subset X$ функции $U \rightarrow \mathbb{k}$ образуют коммутативное кольцо, которое обозначается $\mathcal{O}_X(U)$ и называется *кольцом локальных регулярных функций* на U . Сопоставление $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$ задаёт пучок \mathbb{k} -алгебр на топологическом пространстве X . Он называется *структурным пучком* алгебраического многообразия X . Отображение алгебраических многообразий $\varphi : X \rightarrow Y$ называется *регулярным*, если для каждого открытого подмножества $U \subset Y$ гомоморфизм подъёма $\varphi^* : \mathbb{k}^U \rightarrow \mathbb{k}^{\varphi^{-1}U}$ переводит локальные регулярные функции на U в локальные регулярные функции на $\varphi^{-1}(U)$, т. е. является гомоморфизмом $\varphi^* : \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.4. Убедитесь, что элементы алгебры $\mathcal{O}_X(X)$ — это в точности регулярные морфизмы $X \rightarrow \mathbb{A}^1$, и для каждой аффинной карты $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ гомоморфизм подъёма

$$\varphi_U^* : \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{k}[X_U]$$

отождествляет кольцо локальных регулярных на U функций с координатной алгеброй аффинного многообразия X_U .

6.1.2. Замкнутые подмногообразия. Всякое замкнутое подмножество Z алгебраического многообразия X имеет естественную структуру алгебраического многообразия. А именно, для каждой аффинной карты $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ прообраз пересечения $\varphi_U^{-1}(Z \cap U)$ является замкнутым подмножеством в X_U , т. е. аффинным алгебраическим многообразием с координатным кольцом

$$\mathbb{k}[X_U] / \varphi_U^* I(Z \cap U) \simeq \mathcal{O}_X(U) / I(Z \cap U),$$

где идеал $I(Z \cap U) \subset \mathcal{O}_X(U)$ состоит из всех локальных регулярных на U функций¹, тождественно зануляющихся на $Z \cap U$. Аффинные карты $\varphi_U^{-1}(Z \cap U) \xrightarrow{\sim} Z \cap U \subset X_U$ образуют алгебраический атлас на Z . Сопоставление $U \mapsto I(Z \cap U)$ является подпучком идеалов в структурном пучке \mathbb{k} -

¹Ср. с [упр. 6.4](#).

алгебр \mathcal{O}_X . Он называется *пучком идеалов* замкнутого подмногообразия $Z \subset X$ и обозначается $\mathcal{I}_Z \subset \mathcal{O}_X$. В этой ситуации пишут $Z = V(\mathcal{I}_Z)$.

Регулярный морфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ называется *замкнутым вложением*, если $\varphi(X)$ является замкнутым подмногообразием в Y и φ задаёт изоморфизм между X и $\varphi(X)$. В частности, алгебраическое многообразие X тогда и только тогда допускает замкнутое вложение в аффинное пространство, когда оно является аффинным алгебраическим многообразием в смысле п° 4.4 на стр. 64, т. е. является множеством нулей системы полиномиальных уравнений в аффинном пространстве.

ПРИМЕР 6.4 (СЕМЕЙСТВА ПОДМНОГООБРАЗИЙ)

Каждый регулярный морфизм $\pi : X \rightarrow Y$ может восприниматься как семейство замкнутых подмногообразий $X_y = \pi^{-1}(y) \subset X$, параметризованное точками $y \in Y$. Если $\pi : X \rightarrow Y$, $\pi' : X' \rightarrow Y$ — два семейства с одной и той же базой, то регулярный морфизм $\varphi : X \rightarrow X'$ называется *морфизмом семейств*¹, если он переводит X_y в X'_y для каждого $y \in Y$, т. е. если $\pi = \pi' \circ \varphi$. Семейство $\pi : X \rightarrow Y$ называется *постоянным* или *тривиальным*, если оно изоморфно над Y прямому произведению $\pi_Y : X_0 \times Y \rightarrow Y$ для некоторого многообразия X_0 .

6.1.3. Отделимость. Стандартный атлас на \mathbb{P}_1 состоит из двух карт $\varphi_i : \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\sim} U_i \subset \mathbb{P}_1$, где $i = 0, 1$. Их пересечение видно внутри каждой из них как дополнение к началу координат:

$$\varphi_0^{-1}(U_0 \cap U_1) = \varphi_1^{-1}(U_0 \cap U_1) = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} = \{t \in \mathbb{A}^1 \mid t \neq 0\}.$$

Карты склеены по этому пересечению посредством отображения склейки

$$\varphi_{01} : t \mapsto 1/t. \quad (6-3)$$

Если вместо этого отображения воспользоваться тождественным отображением

$$\tilde{\varphi}_{01} : t \mapsto t, \quad (6-4)$$

получится другое многообразие — прямая с «раздвоенной» точкой: —:—. Такого рода патология называется *неотделимостью*. Причина её возникновения в том, что правило склейки (6-4) не замкнуто и допускает продолжение с $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ на всё $\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$.

В общем случае отделимость формализуется так. Включения $U_0 \hookleftarrow U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_1$ задают вложение $U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_0 \times U_1$, образ которого — пересечение аффинной карты $U_0 \times U_1 \subset X \times X$ с диагональю $\Delta_X = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$. В рассмотренном выше примере правило (6-3) задаёт вложение $(\mathbb{A}^1 \setminus 0) \hookrightarrow \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^2$ по формуле $t \mapsto (t, t^{-1})$ и отождествляет пересечение $U_0 \cap U_1 \simeq (U_0 \times U_1) \cap \Delta_{\mathbb{P}_1}$ с замкнутым подмножеством $V(xy - 1) \subset \mathbb{A}^2$, а правило (6-4) задаёт вложение $(\mathbb{A}^1 \setminus 0) \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ по формуле $t \mapsto (t, t)$, образ которого не замкнут в \mathbb{A}^2 и представляет собою прямую $V(x - y) \subset \mathbb{A}^2$ без начала координат. Алгебраическое многообразие X называется *отделимым*, если для любой пары аффинных карт U, W на X образ канонического вложения $U \cap W \hookrightarrow U \times W$ замкнут, или, что то же самое, если диагональ $\Delta_X \subset X \times X$ замкнута в $X \times X$.

Например, \mathbb{A}^n и \mathbb{P}_n отделимы, поскольку диагонали в $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ и в $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$ задаются, соответственно, уравнениями $x_i = y_i$ и $x_i y_j = x_j y_i$. Замкнутое подмногообразие $X \subset Y$ отделимого многообразия Y тоже отделимо, ибо диагональ в $X \times X$ является прообразом диагонали в $Y \times Y$ при вложении $X \times X \hookrightarrow Y \times Y$. В частности, всякое аффинное или проективное многообразие отделимо и имеет конечный тип.

¹Или морфизмом над Y .

ПРИМЕР 6.5 (ГРАФИК МОРФИЗМА)

Пусть $\varphi : X \rightarrow Y$ — регулярный морфизм. Прообраз диагонали $\Delta \subset Y \times Y$ при индуцированном морфизме $\varphi \times \text{Id}_Y : X \times Y \rightarrow Y \times Y$, $(x, y) \mapsto (\varphi(x), y)$ называется *графиком* морфизма φ и обозначается $\Gamma_\varphi = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$. Если Y отделимо, то график любого морфизма $X \rightarrow Y$ замкнут в $X \times Y$. Например, если X и Y аффинны, то график регулярного морфизма φ задаётся в $X \times Y = \text{Spec}_m(\mathbb{k}[X] \otimes \mathbb{k}[Y])$ системой уравнений $1 \otimes f = \varphi^*(f) \otimes 1$, где f пробегает $\mathbb{k}[Y]$, а $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$ — гомоморфизм подъёма.

6.1.4. Рациональные отображения. Регулярный морфизм $\varphi : U \rightarrow Y$, определённый на некотором открытом плотном подмножестве U алгебраического многообразия X , называется *рациональным отображением* из X в Y . Рациональное отображение $\psi : W \rightarrow Y$, заданное на открытом множестве $W \supset U$ и совпадающее с φ на U , называется *продолжением* рационального отображения $\varphi : U \rightarrow Y$. Объединение всех открытых множеств $W \supset U$, на которые продолжается φ , называется *областью определения* рационального отображения $\varphi : X \dashrightarrow Y$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.5 (квадратичная инволюция Кремоны). Покажите, что правило

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^{-1} : x_1^{-1} : x_2^{-1})$$

задаёт рациональное отображение $\kappa : \mathbb{P}_2 \dashrightarrow \mathbb{P}_2$, определённое всюду, кроме трёх точек, найдите эти точки и опишите образ κ .

Рациональные отображения $\varphi : X \dashrightarrow Y$ не являются отображениями «из X » в теоретико-множественном смысле, ибо определены не везде. В частности, композиция рациональных отображений не определена, когда образ первого отображения оказывается целиком вне области определения второго. Тем не менее, рациональные отображения часто возникают и играют важную роль в алгебраической геометрии. Например, естественная проекция $\mathbb{A}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V)$, переводящая точку пространства $\mathbb{A}(V)$, представленную вектором $v \in V$, в точку пространства $\mathbb{P}(V)$, представленную тем же самым вектором v , является сюръективным рациональным отображением определённым всюду, кроме нуля.

6.2. Проективные многообразия. Алгебраическое многообразие X называется *проективным*, если оно допускает замкнутое вложение в проективное пространство, т. е. изоморфно замкнутому подмногообразию в \mathbb{P}_n для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.6. Покажите, что множество решений системы однородных полиномиальных уравнений на однородные координаты пространства \mathbb{P}_n является замкнутым подмногообразием в \mathbb{P}_n .

В частности, проективными алгебраическими многообразиями являются грассманианы $\text{Gr}(k, V)$, задаваемые квадратичными соотношениями Пюккера в $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.7. Покажите, что прямое произведение проективных многообразий проективно, и выведите из этого, что подмножество в $\mathbb{P}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{n_m}$, задаваемое набором однородных по координатам каждого сомножителя полиномиальных уравнений на однородные координаты, является проективным алгебраическим многообразием.

ПРИМЕР 6.6 (РАЗДУТИЕ ТОЧКИ В \mathbb{P}_n)

Фиксируем точку $p \in \mathbb{P}_n$ и обозначим через $E \simeq \mathbb{P}_{n-1}$ пространство всех проходящих через p прямых в \mathbb{P}_n . График инцидентности $\mathcal{B}_p = \{(q, \ell) \in \mathbb{P}_n \times E \mid q \in \ell\}$ называется *раздутием* точки $p \in \mathbb{P}_n$. Проекция $\sigma_p : \mathcal{B}_p \rightarrow \mathbb{P}_n$ биективна всюду над $\mathbb{P}_n \setminus \{p\}$, но прообразом самой

точки p является весь слой $\sigma_p^{-1}(p) = \{p\} \times E \subset \mathbb{P}_n \times E$. Он называется *исключительным дивизором*¹. Вторая проекция $q_E: \mathcal{B}_p \rightarrow E$ реализует \mathcal{B}_p как *линейное расслоение* над E , слой которого над точкой $q \in E$ — это прямая $(pq) \subset \mathbb{P}_n$. Это расслоение называется *тавтологическим* линейным расслоением над E . Из [упр. 6.7](#) вытекает, что \mathcal{B}_p является проективным многообразием: выберем однородные координаты на \mathbb{P}_n так, чтобы $p = (1 : 0 : \dots : 0)$, и отождествим E с гиперплоскостью $V(x_0) = \{(0 : \lambda_1 : \dots : \lambda_n)\} \subset \mathbb{P}_n$, сопоставляя прямой $\ell \ni p$ точку $\lambda = \ell \cap V(x_0)$. Тогда коллинеарность точек p, q, λ запишется системой однородных квадратичных уравнений

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ q_0 & q_1 & \dots & q_n \\ 0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = 2, \text{ или } q_i t_j = q_j t_i, \text{ где } 1 \leq i < j \leq n,$$

на $(q, \lambda) \in \mathbb{P}_n \times E$. Иначе раздутье точки p можно представлять себе как результат приклеивания к проделанному в точке p на \mathbb{P}_n точечному отверстию проективного пространства E таким образом, что движение к точке p вдоль проходящей через p прямой $\ell \subset \mathbb{P}_n$ приводит в точку $\ell \in E$.

ЛЕММА 6.1

Каждое замкнутое подмногообразие $X \subset \mathbb{P}_n$ является множеством решений конечной системы полиномиальных уравнений на однородные координаты пространства \mathbb{P}_n .

Доказательство. В обозначениях из [прим. 6.1](#) на стр. 84 пересечение $X \cap U_i$ со стандартной открытой картой $U_i \subset \mathbb{P}_n$ является множеством нулей некоторого идеала I_i в кольце многочленов от n переменных $t_{i,v} = x_v/x_i$, где $0 \leq v \leq n$ и $v \neq i$. Каждый такой многочлен f можно переписать как $\bar{f}(x_0, x_1, \dots, x_n)/x_i^d$, где $d = \deg f$, а $\bar{f} \in \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ — такой однородный многочлен степени d , что $\bar{f}(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}) = f(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n})$. Для каждого i зафиксируем какое-нибудь конечное множество A_i образующих $f_{i,\alpha}$, где $\alpha \in A_i$, идеала I_i и построим по ним однородные многочлены $\bar{f}_{i,\alpha} \in \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$. Покажем, что многообразие X совпадает с множеством Z решений системы однородных полиномиальных уравнений

$$x_i \bar{f}_{i,\alpha}(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \text{где } 0 \leq i \leq n, \alpha \in A_i.$$

Достаточно для каждого i установить равенство $Z \cap U_i = X \cap U_i$. Поскольку пересечение множества нулей однородного многочлена $x_i \cdot \bar{f}(x_0, x_1, \dots, x_n)$ с картой $U_i \subset \mathbb{P}_n$ задаётся в аффинных координатах t_i на U_i уравнением

$$\bar{f}(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}) = f(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}) = 0,$$

пересечение карты U_i с множеством общих нулей однородных многочленов $x_i \bar{f}_{i,\alpha}$, индекс i которых равен номеру карты, совпадает с $X \cap U_i$. Тем самым, $Z \cap U_i \subset X \cap U_i$, и для доказательства равенства остаётся убедиться, что каждый однородный многочлен $x_j \bar{f}_{j,\beta}$ с $j \neq i$ тоже зануляется на $X \cap U_i$. Но множитель x_j зануляется на гиперплоскости $V(t_{i,j}) \subset U_i$, а множитель $\bar{f}_{j,\beta}$ зануляется на дополнительном к этой гиперплоскости главном открытом множестве $\mathcal{D}(t_{i,j}) = X \cap U_i \cap U_j \subset X \cap U_i$, т. к. последнее содержится в пересечении $X \cap U_j$, на котором $\bar{f}_{j,\beta}$ равен нулю. \square

¹Вообще, *дивизорами* (Вейля) на алгебраическом многообразии называются элементы свободной абелевой группы, порождённой неприводимыми замкнутыми подмногообразиями коразмерности 1 (размерности алгебраических многообразий обсуждаются в [п° 6.3](#) ниже).

Пример 6.7 (иллюстрация доказательства лем. 6.1)

Проективное многообразие $X = V(x_0x_1x_2) \subset \mathbb{P}_2$ представляет собою объединение трёх координатных прямых и локально, в стандартных картах U_0, U_1, U_2 , задаётся, соответственно, уравнениями $t_{0,1}t_{0,2} = 0, t_{1,0}t_{1,2} = 0, t_{2,0}t_{2,1} = 0$, которым в предыдущем доказательстве отвечают однородные многочлены $\bar{f}_{0,1} = x_1x_2, \bar{f}_{1,1} = x_0x_2, \bar{f}_{2,1} = x_0x_1$, а задающее X глобальное однородное уравнение $x_0x_1x_2 = 0$ имеет в левой части многочлен

$$x_0x_1x_2 = x_0 \cdot \bar{f}_{0,1} = x_1 \cdot \bar{f}_{1,1} = x_2 \cdot \bar{f}_{2,1}.$$

6.2.1. Замкнутость проективных морфизмов. Проективные многообразия занимают в алгебраической геометрии примерно такое же место, как компактные многообразия в дифференциальной геометрии.

Лемма 6.2

Проекция $\pi : \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ замкнута, т. е. переводит замкнутые множества в замкнутые.

Доказательство. Зафиксируем однородные координаты x на \mathbb{P}_m и аффинные координаты t в \mathbb{A}^n . Замкнутое подмножество $X \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$ задаётся системой однородных по x полиномиальных уравнений $f_v(x, t) = 0$. Его образ $\pi(X) \subset \mathbb{A}^n$ состоит из всех точек p , при подстановке которых в эти уравнения вместо t получается обладающая ненулевым решением система однородных уравнений $f_v(x, p) = 0$ на x . Это означает, что полиномиально зависящие от p коэффициенты форм $f_v(x, p)$ удовлетворяют системе полиномиальных результантных уравнений¹. Таким образом, $\pi(X)$ задаётся полиномиальными уравнениями. \square

Следствие 6.1

Если многообразие X проективно, то для любого многообразия Y проекция $\pi : X \times Y \rightarrow Y$ замкнута.

Доказательство. Утверждение можно доказывать отдельно для каждой аффинной карты многообразия Y , т. е. мы можем считать Y аффинным. Тогда $X \times Y$ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$, а проекция π — ограничением замкнутой проекции $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ на замкнутое подмножество $X \times Y \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$. \square

Следствие 6.2

Если X проективно, а Y отделимо, то любой морфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ замкнут.

Доказательство. Если Y отделимо, график $\Gamma_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, \varphi(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ отображения φ замкнут в $X \times Y$, ибо является прообразом диагонали $\Delta_Y \subset Y \times Y$ при отображении

$$\varphi \times \text{Id}_Y : X \times Y \rightarrow Y \times Y.$$

Образ $\varphi(Z) \subset Y$ любого подмножества $Z \subset X$ совпадает с образом пересечения $\Gamma_\varphi \cap (Z \times Y) \subset X \times Y$ при проекции $X \times Y \rightarrow Y$. Если Z замкнуто в X , произведение $Z \times Y$ замкнуто в $X \times Y$. Если X проективно, проекция $X \times Y \rightarrow Y$ замкнута и переводит замкнутое множество $\Gamma_\varphi \cap (Z \times Y) \subset X \times Y$ в замкнутое множество $\varphi(Z) \subset Y$. \square

¹См. п. 4.5 на стр. 66.

Следствие 6.3

Любое регулярное отображение из связного проективного многообразия X в аффинное многообразие постоянно, т. е. отображает всё X в одну точку. В частности, $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{k}$.

Доказательство. Беря композицию такого отображения с координатными функциями на аффинном многообразии, мы заключаем, что достаточно доказать утверждение для любого регулярного морфизма $\varphi : X \rightarrow \mathbb{A}^1$. Композиция φ с последующим вложением $\mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^1$ в качестве стандартной аффинной карты является регулярным не сюръективным отображением $X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Так как его образ замкнут и связан, он состоит из одной точки. \square

6.2.2. Конечные проекции. Регулярное отображение алгебраических многообразий

$$\varphi : X \rightarrow Y$$

называется *конечным*, если прообраз $W = \varphi^{-1}(U)$ любой аффинной карты $U \subset Y$ является аффинной картой на X , и ограничение $\varphi_W : W \rightarrow U$ является конечным морфизмом аффинных многообразий в смысле п° 5.4.3 на стр. 81. Из лем. 5.3 на стр. 81 следует, что каждый конечный морфизм замкнут, и его ограничение на любое замкнутое подмногообразие $Z \subset X$ также является конечным морфизмом. Более того, если X неприводимо, то собственные замкнутые подмножества многообразия X переводятся конечным морфизмом в *собственные* замкнутые подмножества в Y .

Упражнение 6.8. Проверьте, что композиция конечных морфизмов и ограничение конечного морфизма на замкнутое подмногообразие конечны.

Предложение 6.1

Проекция проективной гиперповерхности $V(f) \subsetneq \mathbb{P}^n$, где $f \neq \text{const}$, из любой точки $p \notin V(f)$ на любую гиперплоскость $H \not\ni p$ является конечным сюръективным морфизмом.

Доказательство. Выберем на \mathbb{P}^n однородные координаты $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ так, чтобы $H = V(x_0)$, а $p = (1 : 0 : \dots : 0)$. Тогда гиперплоскость H состоит из точек $(0 : x_1 : \dots : x_n)$, и можно считать, что аффинная карта $U \subset H$ состоит из точек $y = (0 : y_1 : \dots : y_{n-1} : 1)$. Поскольку $p \notin V(f)$, прообраз $Y = \pi_p^{-1}(U) \subset V(f)$ карты U высекается из $V(f)$ проколотым конусом $C = \bigcup_{y \in U} (py) \setminus \{p\}$ — объединением аффинных прямых, получающихся выкидыванием точки p из проективных прямых $(py) \subset \mathbb{P}^n$, где $y \in U$. Конус C является аффинным алгебраическим многообразием, изоморфным аффинному пространству $\mathbb{A}^n = U \times \mathbb{A}^1$. Изоморфизм переводит точку $(y, t) \in U \times \mathbb{A}^1$ в точку $x = tp + y \in \mathbb{P}^n$. Пересечение $Y = C \cap V(f)$ задаётся в координатах (y, t) на \mathbb{A}^n уравнением

$$g(t, y) = f(tp + y) = \alpha_0(y) t^m + \alpha_1(y) t^{m-1} + \dots + \alpha_m(y) = 0, \quad (6-5)$$

которое получается подстановкой $x = pt + y$ в уравнение гиперповерхности. Мы заключаем, что прообраз $Y \subset V(f)$ карты U является аффинной алгебраической гиперповерхностью с координатной алгеброй $\mathbb{k}[Y] = \mathbb{k}[y_1, \dots, y_{n-1}, t]/(g)$ и $\pi_p|_U^* : \mathbb{k}[U] \hookrightarrow \mathbb{k}[Y]$ тавтологически вкладывает $\mathbb{k}[y_1, \dots, y_{n-1}]$ в $\mathbb{k}[y_1, \dots, y_{n-1}, t]$. Чтобы показать, что алгебра $\mathbb{k}[Y]$ цела над $\mathbb{k}[U]$, достаточно убедиться, что порождающий $\mathbb{k}[Y]$ над $\mathbb{k}[U]$ элемент t цел над $\mathbb{k}[U]$. Для этого достаточно проверить, что старший коэффициент $\alpha_0 \in \mathbb{k}[U]$ уравнения (6-5) является ненулевой константой из поля \mathbb{k} — тогда уравнение (6-5) и будет уравнением целой зависимости. Пусть это не так.

Тогда $a_0(w) = 0$ для некоторой точки $w \in U$, и пересечение гиперповерхности $X = V(f)$ с проективной прямой (pw) задаётся в однородных координатах $(\vartheta_0 : \vartheta_1)$ относительно базиса p, w этой прямой уравнением $f(\vartheta_0 p + \vartheta_1 w) = \alpha_0(w) \vartheta_0^m + \alpha_1(w) \vartheta_0^{m-1} \vartheta_1 + \dots + \alpha_m(w) \vartheta_1^m = 0$, которое получается из уравнения (6-5) подстановкой $t = \vartheta_0 / \vartheta_1$ и имеет нулевой коэффициент при ϑ_0^m , т. е. делится на ϑ_1 . Поэтому $p = (1 : 0) \in V(f)$, что противоречит условию теоремы. Тем самым, $\pi_p|_U : Y \rightarrow U$ — это конечный доминантный (и, стало быть, сюръективный) морфизм. \square

Следствие 6.4

Проекция любого проективного многообразия $X \subsetneq \mathbb{P}_n$ из любой точки $p \notin X$ на любую гиперплоскость $H \not\ni p$ является конечным морфизмом.

Доказательство. Поскольку ограничение конечного морфизма на замкнутое подмногообразие конечно, достаточно применить [предл. 6.1](#) к гиперповерхности $\mathbb{P}_n \supsetneq V(f) \supseteq X$, где f — одно из задающих X однородных уравнений. \square

Следствие 6.5

Каждое проективное многообразие допускает конечный сюръективный морфизм на проективное пространство. \square

Следствие 6.6

Каждая аффинная гиперповерхность $V(f) \subsetneq \mathbb{A}^n$, где $f \neq \text{const}$, допускает конечную сюръективную параллельную проекцию на аффинную гиперплоскость $L \subset \mathbb{A}^n$.

Доказательство. Вложим $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{K}e_0 \oplus V)$ в качестве стандартной карты U_0 и обозначим через $H_\infty = \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}_n \setminus U_0$ бесконечно удалённую гиперплоскость этой карты, а через $V(\bar{f}) \subset \mathbb{P}_n$ — проективное замыкание¹ гиперповерхности $V(f)$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.9. Убедитесь, что если $\emptyset \neq V(f) \neq \mathbb{A}^n$, то $\emptyset \neq V(\bar{f}) \neq \mathbb{P}_n$ и $V(\bar{f}) \cap H_\infty \neq H_\infty$.

По [предл. 6.1](#) проекция проективной гиперповерхности $V(\bar{f})$ из любой точки $p \in H_\infty \setminus V(\bar{f})$ на любую гиперплоскость $H \not\ni p$ конечна и сюръективна. В аффинной карте U_0 она выглядит как параллельная проекция аффинной гиперповерхности $V(f) = V(\bar{f}) \setminus H_\infty$ в направлении $p \in V$ на аффинную гиперплоскость $L = U_0 \cap H = H \setminus H_\infty$. \square

Пример 6.8 (НОРМАЛИЗАЦИЯ НЁТЕР)

Пусть аффинная гиперповерхность $X = V(f) \subset \mathbb{A}^n$ задаётся многочленом

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_d \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n],$$

где каждый f_k однороден степени k и старшая форма $f_d \neq 0$ имеет степень $d \geq 1$. Замыкание $\bar{X} = V(\bar{f})$ в проективном пространстве \mathbb{P}_n с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$, куда исходное \mathbb{A}^n вложено в качестве стандартной аффинной карты $U_0 = \mathcal{D}(x_0)$, задаётся однородным многочленом

$$\bar{f} = f_0 x_0^d + \dots + f_{d-1} x_0 + f_d.$$

Бесконечно удалённая точка $p = (0 : p_1 : \dots : p_n)$ не лежит на \bar{X} , если и только если

$$f_d(p_1, \dots, p_n) \neq 0.$$

¹См. п.° 1.4.3 на стр. 13.

Если поле \mathbb{k} бесконечно¹, то такая точка всегда найдётся. Пусть координаты (x_1, \dots, x_n) занумерованы так, что $p = (p_1 : \dots : p_{n-1} : 1)$ и $f_d(p) \neq 0$. Тогда проекция $\pi_p : V(f) \rightarrow V(x_n)$ поверхности $V(f)$ из p на гиперплоскость

$$V(x_n) = \{(y_1, \dots, y_{n-1}, 0) \in \mathbb{A}^n \mid (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{A}^{n-1}\} \simeq \mathbb{A}^{n-1} = \operatorname{Spec}_m \mathbb{k}[y_1, \dots, y_{n-1}]$$

выглядит внутри \mathbb{A}^n как параллельная проекция вдоль вектора $(p_1, \dots, p_{n-1}, 1)$ и переводит точку $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n$ в точку² $y = (x_1 - p_1 x_n, \dots, x_{n-1} - p_{n-1} x_n, 0)$. Соответствующий подъём

$$\pi_p^* : \mathbb{k}[y_1, \dots, y_{n-1}] \rightarrow \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/(f), \quad y_i \mapsto x_i - p_i x_n, \quad (6-6)$$

делает алгебру $\mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/(f)$ целой над $\mathbb{k}[y_1, \dots, y_{n-1}]$, так как x_n удовлетворяет уравнению $f(y_1 + p_1 x_n, \dots, y_{n-1} + p_{n-1} x_n, x_n) = 0$ со старшим мономом $f_d(p_1, \dots, p_{n-1}, 1) x_n^d$, где $f_d(p_1, \dots, p_{n-1}, 1) \in \mathbb{k}$ — ненулевая константа в силу выбора точки p . Мы заключаем, что каждая аффинная гиперповерхность над любым бесконечным полем допускает конечную параллельную проекцию на гиперплоскость. Этот факт известен как *лемма Нётер о нормализации*. Если поле алгебраически замкнуто, проекция $\pi_p : V(f) \rightarrow V(x_n)$ сюръективна, поскольку для всех $y = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0) \in V(x_n)$ многочлен $f(y_1 + p_1 x_n, \dots, y_{n-1} + p_{n-1} x_n, x_n) \in \mathbb{k}[x_n]$ отличен от константы и имеет корень в \mathbb{k} .

Следствие 6.7

Каждое аффинное многообразие X допускает конечный сюръективный морфизм на аффинное пространство. \square

6.3. Размерность. Размерностью алгебраического многообразия X в точке $x \in X$ называется максимальное такое $n \in \mathbb{N}$, что существует цепочка замкнутых подмногообразий

$$\{x\} = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \dots \subsetneq X_{n-1} \subsetneq X_n \subseteq X, \quad (6-7)$$

в которой все X_i неприводимы и все включения кроме самого правого строгие. Размерность многообразия X в точке $x \in X$ обозначается $\dim_x X$. Если X неприводимо, то в любой максимальной цепочке вида (6-7) выполняется равенство $X_n = X$. Если многообразие X приводимо, то $\dim_x X$ равна максимальной из размерностей проходящих через точку x неприводимых компонент многообразия X .

УПРАЖНЕНИЕ 6.10. Покажите, что $\dim_x X = \dim_x U$ для любой аффинной окрестности U точки x .

Предложение 6.2

Для любого конечного морфизма $\varphi : X \rightarrow Y$ неприводимых алгебраических многообразий в каждой точке $x \in X$ выполняется неравенство $\dim_x X \leq \dim_{\varphi(x)} Y$, и равенство в нём равносильно эпиморфности φ .

Доказательство. В силу упр. 6.10 можно считать X и Y аффинными. Каждая цепочка (6-7) в X по лем. 5.3 на стр. 81 порождает цепочку строго вложенных друг в друга замкнутых неприводимых подмногообразий $\varphi(X_i)$ в Y . Отсюда вытекает требуемое неравенство, и при $\varphi(X) \neq Y$

¹Причём не обязательно алгебраически замкнуто.

²Напомним, что точки $x \in U_0$, $y \in V(x_n) \subset U_0$ и $p \in \mathbb{P}_n \setminus U_0$ связаны в \mathbb{P}_n линейным соотношением $x = y + pt$, см. доказательство предл. 6.1.

оно строгое. Если $\varphi(X) = Y$, то для любой цепочки $Y_0 = \{\varphi(x)\} = Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \dots \subsetneq Y_m = Y$ при каждом i многообразие $\varphi^{-1}(Y_i) \subset X$ имеет неприводимую компоненту X_i сюръективно отображающуюся на Y_i , и из них составляется цепочка вида (6-7) в X . Это даёт противоположное неравенство $\dim_x X \geq \dim_{\varphi(x)} Y$. \square

Следствие 6.8

Размерность аффинного пространства \mathbb{A}^n в любой точке $x \in \mathbb{A}^n$ равна n .

Доказательство. Неравенство $\dim_x \mathbb{A}^n \geq n$ выполняется, поскольку в \mathbb{A}^n имеется цепочка (6-7), образованная проходящими через x аффинными подпространствами. Противоположное неравенство доказывается по индукции. Очевидно, что $\dim \mathbb{A}^0 = 0$. Пусть $\dim \mathbb{A}^k = k$ для всех $k < n$. Поскольку последний отличный от \mathbb{A}_n элемент X_{m-1} в любой цепочке подмногообразий

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_{m-1} \subsetneq X_m = \mathbb{A}^n$$

допускает конечную сюръекцию на аффинное подпространство $\mathbb{A}^k \subset \mathbb{A}^n$ с $k < n$, из предл. 6.2 вытекает неравенство $\dim X_{m-1} < n$, откуда $m \leq n$. \square

Следствие 6.9

Пусть X — неприводимое аффинное многообразие, и $\varphi : X \rightarrow \mathbb{A}^m$ — конечный сюръективный морфизм. Тогда $\dim_x X = m$ в каждой точке $x \in X$, и число m не зависит от выбора φ . \square

Следствие 6.10

Размерность аффинного неприводимого многообразия X равна степени трансцендентности² алгебры $\mathbb{k}[X]$ над \mathbb{k} .

Доказательство. Гомоморфизм подъёма конечной сюръекции $\pi : X \rightarrow \mathbb{A}^m$ задаёт целое расширение $\pi^* : \mathbb{k}[u_1, \dots, u_m] \hookrightarrow \mathbb{k}[X]$. Следовательно алгебраически независимые функции $\pi^* u_i$ образуют базис трансцендентности алгебры $\mathbb{k}[X]$ над \mathbb{k} . \square

УПРАЖНЕНИЕ 6.11. Докажите, что $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$ для любых неприводимых многообразий X, Y .

6.3.1. Размерности подмногообразий. Если функция $f \in \mathbb{k}[X]$ тождественно зануляется на одной из проходящих через точку $x \in X$ неприводимых компонент размерности $\dim_x X$ многообразия X , гиперповерхность $V(f) \subset X$ имеет в точке x ту же размерность, что и объемлющее многообразие X . Такое возможно, только если f делит нуль в $\mathbb{k}[X]$.

Предложение 6.3

Для любой ненулевой регулярной функции $f \in \mathbb{k}[X]$ на неприводимом аффинном многообразии X в каждой точке $p \in V(f)$ выполняется неравенство $\dim_p V(f) = \dim_p(X) - 1$.

Доказательство. Случай $X = \mathbb{A}^n$ уже был разобран в прим. 6.8 на стр. 92. Общий случай сводится к нему при помощи рассуждения, аналогичного использованному в лем. 5.4 на стр. 82. Рассматривая неприводимые компоненты гиперповерхности $V(f)$ по отдельности, мы можем

¹ Иначе Y_i окажется объединением конечного числа собственных замкнутых подмножеств — образов неприводимых компонент прообраза $\varphi^{-1}(Y_i) \subset X$.

² См. опр. 4.3 на стр. 64.

считать $f \in \mathbb{k}[X]$ неприводимым. Зафиксируем конечную сюръекцию $\pi : X \rightarrow \mathbb{A}^m$ и рассмотрим отображение

$$\varphi = \pi \times f : X \rightarrow \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1, \quad x \mapsto (\pi(x), f(x)).$$

В лем. 5.4 мы видели, что оно конечно и сюръективно отображает X на аффинную гиперповерхность $V(\mu_f) \subset \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1$ — множество нулей минимального многочлена

$$\mu_f(u, t) = t^n + \alpha_1(u)t^{n-1} + \dots + \alpha_n(u) \in \mathbb{k}[u_1, \dots, u_m][t]$$

функции f над полем $\mathbb{k}(\mathbb{A}^m)$. Неприводимая гиперповерхность $V(f) \subset X$ конечно отображается морфизмом φ на пересечение гиперповерхности $V(\mu_f)$ с аффинной гиперплоскостью $V(t)$, внутри которой это пересечение задаётся уравнением $\alpha_n(u) = 0$, т. е. является аффинной гиперповерхностью $V(a_n) \subset \mathbb{A}^m$ размерности $m - 1$. По предл. 6.2 $\dim V(f) = \dim V(a_n) = m - 1 = \dim X - 1$. \square

Следствие 6.11

На аффинном многообразии X для любого набора функций $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{k}[X]$ в каждой точке $p \in V(f_1, \dots, f_m)$ выполняется неравенство $\dim_p V(f_1, \dots, f_m) \geq \dim_p(X) - m$. Если при каждом i класс функции f_i в факторкольце¹ $\mathbb{k}[X]/(f_1, \dots, f_{i-1})$ не делит нуль, то неравенство становится равенством. \square

Предостережение 6.1. Ни предл. 6.3, ни сл. 6.11 не утверждают, что гиперповерхность $V(f)$ или подмногообразие $V(f_1, \dots, f_m)$ не пусты, и в случае их пустоты предл. 6.3 и сл. 6.11 остаются формально справедливыми. По слабой теореме о нулях пустота $V(f_1, \dots, f_m)$ означает, что при некотором i класс f_i в $\mathbb{k}[X]/(f_1, \dots, f_{i-1})$ равен ненулевой константе. Такое вполне случается: например, $V(1) = \emptyset$ на любом многообразии X , и $V(x, x+1) = \emptyset$ на плоскости $\mathbb{A}^2 = \text{Срес}_m \mathbb{k}[x, y]$. Это предупреждение относится и к следующему предложению.

Предложение 6.4

Для любых аффинных многообразий $X_1, X_2 \subset \mathbb{A}^n$ в каждой точке $x \in X_1 \cap X_2$ выполняется неравенство $\dim_x(X_1 \cap X_2) \geq \dim_x(X_1) + \dim_x(X_2) - n$.

Доказательство. Пусть $\varphi_1 : X_1 \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ и $\varphi_2 : X_2 \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ — замкнутые вложения. Тогда $X_1 \cap X_2$ является прообразом диагонали $\Delta \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ при отображении

$$\varphi_1 \times \varphi_2 : X_1 \times X_2 \hookrightarrow \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n.$$

Внутри $X_1 \times X_2$ он задаётся n уравнениями $(\varphi_1 \times \varphi_2)^* x_i = (\varphi_1 \times \varphi_2)^* y_i$, которые являются поднятиями линейных уравнений $x_i = y_i$, задающих диагональ Δ в $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$. Остаётся применить сл. 6.11. \square

Предложение 6.5

Если размерности неприводимых проективных многообразий $X_1, X_2 \subset \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ удовлетворяют неравенству $\dim(X_1) + \dim(X_2) \geq n$, то $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$.

¹Упорядоченный набор функций $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{k}[X]$ с таким свойством называются *регулярной последовательностью*. При $i = 1$ регулярность означает, что f_1 не делит нуль в $\mathbb{k}[X]$.

Доказательство. Для неприводимого проективного многообразия $Z \subset \mathbb{P}(V)$ обозначим через $Z' \subset \mathbb{A}(V)$ аффинный конус над Z , задаваемый теми же самими однородными уравнениями, что и Z , но только теперь в аффинном пространстве. Он содержит начало координат $O \in \mathbb{A}^{n+1}$ и имеет размерность $\dim_O Z' \geq \dim Z + 1$, так как любая цепочка $\{z\} \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_m = Z$ в проективном многообразии порождает в аффинном конусе цепочку

$$\{O\} \subsetneq (Oz) \subsetneq Z'_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z'_m = Z',$$

первыми элементами которой служат начало координат O и прямая (O, z) . По [предл. 6.4](#) для аффинных конусов $X'_1, X'_2 \subset \mathbb{A}^{n+1}$ выполняются неравенства

$$\dim_O(X'_1 \cap X'_2) \geq \dim_O(X'_1) + \dim_O(X'_2) - n - 1 \geq \dim_O(X_1) + \dim_O(X_2) - n + 1 \geq 1.$$

Поэтому $X'_1 \cap X'_2$ не исчерпывается одной только точкой O . □

6.3.2. Размерности слоёв регулярных морфизмов. В алгебраической геометрии размерность прообраза при регулярном отображении контролируется почти столь же жёстко, как в линейной алгебре.

ТЕОРЕМА 6.1

Для любого доминантного морфизма $\varphi : X \rightarrow Y$ неприводимых алгебраических многообразий в каждой точке $x \in X$ выполняется неравенство $\dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geq \dim X - \dim Y$, причём существует такое плотное открытое подмножество $U \subset Y$, что для всех $y \in U$ и $x \in \varphi^{-1}(y)$ выполняется равенство $\dim_x \varphi^{-1}(y) = \dim_x X - \dim_y Y$.

Доказательство. Беря композицию φ с конечным сюръективным морфизмом какой-нибудь аффинной окрестности точки $\varphi(x)$ на аффинное пространство \mathbb{A}^n и заменяя X прообразом этой окрестности, мы сводим первое утверждение теоремы к случаю

$$Y = \mathbb{A}^n = \text{Spec}_m \mathbb{k}[y_1, \dots, y_n], \quad \varphi(x) = 0.$$

Заменяя X аффинной окрестностью точки x , мы можем считать X аффинным. В этом случае $\varphi^{-1}(0)$ является непустым пересечением n гиперповерхностей $V(\varphi^*(y_i)) \subset X$, и требуемое неравенство вытекает из [сл. 6.11](#). В доказательстве второго утверждения мы также можем считать оба многообразия аффинными. Более того, по [упр. 5.21](#) на стр. 81 можно считать X замкнутым подмногообразием в $Y \times \mathbb{A}^m$, а морфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ ограничением проекции $\pi : Y \times \mathbb{A}^m \rightarrow Y$. Если мы покажем, что над некоторым плотным главным открытым подмножеством $W \subset Y$ подмногообразие $X_W = X \cap (W \times \mathbb{A}^m)$ допускает конечный морфизм в $W \times H$, где $H \subset \mathbb{A}^m$ — некоторая аффинная гиперплоскость, то в слое над каждой точкой $w \in W$ ограничение этого морфизма на замкнутое подмногообразие $X_w = X \cap (\{w\} \times \mathbb{A}^m)$ будет давать конечный морфизм $X_w \rightarrow \{w\} \times H$. Заменяя Y на W и повторяя процедуру, мы в конце концов получим плотное открытое подмножество $U \subset Y$ и конечную сюръекцию $\psi : X_U \rightarrow U \times \mathbb{A}^k$, которая в над каждой точкой $u \in U$ будет давать конечную сюръекцию $\psi_u : X_u \rightarrow \{u\} \times \mathbb{A}^k$. Таким образом, в каждой точке $x \in X_u = \varphi^{-1}(u)$ будут выполняться равенства $\dim_x X_U = \dim_x U + k$ и $\dim_x X_u = k$, откуда $\dim_x X = \dim_u Y + \dim_x \varphi^{-1}(u)$, что и утверждалось.

При построении конечного морфизма $X_W \rightarrow W \times H$ можно считать, что $X = V(f)$ является гиперповерхностью в $Y \times \mathbb{A}^m$, задаваемой многочленом

$$f = f_0(x_1, \dots, x_m) + f_1(x_1, \dots, x_m) + \dots + f_d(x_1, \dots, x_m),$$

где каждая форма f_k имеет коэффициенты в $\mathbb{k}[Y]$ и однородна степени k по (x_1, \dots, x_m) . Также можно считать, что $d \geq 1$, иначе уже исходный доминантный морфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ является конечной сюръекцией с нульмерными слоями, и доказывать нечего. Над некоторой точкой $y \in Y$ форма $f_{d,y}$, полученная специализацией формы f_d в эту точку, ненулевая, и в \mathbb{A}^m можно выбрать такие координаты и направление $p = (p_1, \dots, p_{m-1}, 1) \in \mathbb{k}^m$, что $f_{d,y}(p_1, \dots, p_{m-1}, 1) \neq 0$. В [прим. 6.8](#) на стр. 92 мы видели, что элемент $x_m \in \mathbb{k}[X] \simeq \mathbb{k}[Y][x_1, \dots, x_m]/(f)$ удовлетворяет в этой ситуации уравнению

$$f_d(p_1, \dots, p_{m-1}, 1)x_m^d + (\text{члены меньшей степени по } x_m) = 0,$$

и тем самым цел над кольцом дробей $\mathbb{k}[Y][h^{-1}]$, где $h = f_d(p_1, \dots, p_{m-1}, 1) \in \mathbb{k}[Y]$ — ненулевая регулярная функция на Y , полученная подстановкой $x = p$ в многочлен $f_d(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{k}[Y][x_1, \dots, x_m]$. Главное открытое множество $W = \mathcal{D}(h) \subset Y$ всюду плотно в неприводимом многообразии Y , и само является неприводимым аффинным многообразием с координатным кольцом $\mathbb{k}[Y][h^{-1}]$. Мы заключаем, что послойная параллельная проекция в направлении p задаёт конечный морфизм $X_W \rightarrow W \times H$, где $H = V(x_m) \subset \mathbb{A}^m$ — координатная гиперплоскость, что и требовалось. \square

Следствие 6.12 (теорема о полунепрерывности размерностей слоёв)

Для любого морфизма алгебраических многообразий $\varphi : X \rightarrow Y$ и каждого $k \in \mathbb{Z}$ множество

$$X_k \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geq k\}$$

замкнуто в X .

Доказательство. Если $\dim Y = 0$, то теорема тривиально верна для всех X и k . Пусть теперь $\dim Y = m$ и для всех Y меньшей размерности теорема верна для всех X и k . Покажем, что она верна для Y . Можно считать X и Y неприводимыми. Если $k \leq \dim(X) - \dim(Y)$, то $X_k = X$ по [теор. 6.1](#). Для $k > \dim(X) - \dim(Y)$ заменим Y на $Y' = Y \setminus U$, где U взято из [теор. 6.1](#), а X — на $X' = \varphi^{-1}(Y')$. Тогда $\dim Y' < \dim Y$, и множество $X_k \subset X'$ замкнуто по индуктивному предположению. \square

Следствие 6.13

Для любого замкнутого морфизма алгебраических многообразий $\varphi : X \rightarrow Y$ и каждого $k \in \mathbb{Z}$ множество $Y_k \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid \dim \varphi^{-1}(y) \geq k\}$ замкнуто в Y .

Теорема 6.2 (размерностный критерий неприводимости)

Если замкнутый регулярный морфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ сюръективен, а все его слои неприводимы и имеют одинаковые размерности, то неприводимость Y влечёт неприводимость X .

Доказательство. Пусть $X = X_1 \cup X_2$, где X_1, X_2 замкнуты. Положим $Y_i \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset X_i\}$, где $i = 1, 2$. Так как каждый слой φ , будучи неприводимым, целиком содержится либо в X_1 , либо в X_2 , мы заключаем, что $Y = Y_1 \cup Y_2$, и если $X_i \neq X$, то и $Y_i \neq Y$. Поскольку множество Y_i состоит из всех таких точек в Y , над которыми слой отображения $\varphi|_{X_i} : X_i \rightarrow Y$ имеет максимальную из достигаемых слоями этого отображения размерностей, множество Y_i замкнуто по [сл. 6.13](#). Тем самым, приводимость X влечёт приводимость Y . \square

6.4. Размерности проективных многообразий. Согласно [предл. 6.5](#), каждое d -мерное неприводимое многообразие $X \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ пересекается со всеми проективными подпространствами $H \subset \mathbb{P}_n$ размерности $\dim H \geq n - d$. Покажем, что общее подпространство H коразмерности $d + 1$ не пересекается с X , и тем самым, размерность неприводимого проективного многообразия равна наибольшему такому числу d , что X пересекается со всеми проективными подпространствами коразмерности d .

Проективные подпространства $H \subset \mathbb{P}(V)$ размерности $n - d - 1$ являются точками грассманиана $\text{Gr}(n - d, n + 1) = \text{Gr}(n - d, V)$. Рассмотрим многообразие инцидентности

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, H) \in X \times \text{Gr}(n - d, V) \mid x \in H\}. \quad (6-8)$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.12. Убедитесь, что Γ является проективным алгебраическим многообразием. Проекция $\pi_1 : \Gamma \rightarrow X$ сюръективна, и её слой над каждой точкой x состоит из всех проходящих через x проективных подпространств размерности $n - d - 1$. Такие подпространства образуют грассманиан $\text{Gr}(n - d - 1, n) = \text{Gr}(n - d - 1, V/\mathbb{k} \cdot x)$ всех векторных $(n - d - 1)$ -мерных подпространств в фактор пространстве $V/\mathbb{k} \cdot x$. По [теор. 6.2](#) многообразие Γ неприводимо и имеет размерность $d + (n - d - 1)(d + 1) = (n - d)(d + 1) - 1$. Образ $\pi_2(\Gamma) \subset \text{Gr}(n - d, V)$ второй проекции $\pi_2 : \Gamma \rightarrow \text{Gr}(n - d, V)$ состоит из всех $(n - d - 1)$ -мерных подпространств, пересекающих X . Это неприводимое замкнутое подмногообразие размерности, не превышающей $\dim \Gamma$ и, тем самым, строго меньшей, чем $\dim \text{Gr}(n - d, V) = (n - d)(d + 1)$. Поэтому множество не пересекающих X $(n - d - 1)$ -мерных подпространств содержит в себе открытое по Зарисскому всюду плотное подмножество грассманиана $\dim \text{Gr}(n - d, V)$.

Соображения размерности позволяют сказать и больше. Повторяя предыдущее рассуждение для $(n - d)$ -мерных подпространств H' вместо $(n - d - 1)$ -мерных, мы получим неприводимое проективное многообразие

$$\Gamma' \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, H') \in X \times \text{Gr}(n - d + 1, V) \mid x \in H'\}$$

размерности $\dim X + \dim \text{Gr}(n - d, n) = d + d(n - d) = d(n - d + 1)$. Так как $X \cap H' \neq \emptyset$ для всех H' , проекция $\pi_2 : \Gamma' \rightarrow \text{Gr}(n - d + 1, V)$ эпиморфна, и её *общий слой*¹ имеет по [теор. 6.1](#) размерность $\dim \Gamma - \dim \text{Gr}(n - d + 1, n + 1) = d(n - d + 1) - (n - d + 1)d = 0$. Это означает, что *общее подпространство H' коразмерности d пересекает X по конечному числу точек.*

Беря одну из таких плоскостей H' и проводя внутри неё $(n - d - 1)$ -мерную плоскость H через одну из точек пересечения $p \in X \cap H'$, мы видим, что $H \cap X$ конечно и непусто. Это означает, что у проекции $\pi_2 : \Gamma \rightarrow \text{Gr}(n - d, V)$ первого многообразия инцидентности (6-8) имеется нульмерный слой. Тем самым, минимальная размерность непустого слоя этой проекции нулевая, откуда по [теор. 6.1](#) вытекает, что $\dim \pi_2(\Gamma) = \dim \Gamma = \dim \text{Gr}(n - d, V) - 1$, т. е. *пересекающиеся с X подпространства размерности $n - d - 1$ образуют неприводимую гиперповерхность*² в грассманиане $\text{Gr}(n - d, n + 1)$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.13. Выведите отсюда, что существует неприводимый многочлен от плюккеровых координат $(n - d - 1)$ -мерного подпространства в \mathbb{P}_n , обращение которого в нуль на данном подпространстве H равносильно тому, что $H \cap X \neq \emptyset$.

Проделанные рассуждения иллюстрируют стандартный метод подсчёта размерностей при помощи многообразий инцидентности, часто используемый в геометрии.

¹Т. е. слой над любой точкой из некоторого плотного открытого подмножества в грассманиане.

²Т. е. подмногообразие коразмерности 1

Пример 6.9 (результант)

Фиксируем $n + 1$ степеней $d_0, d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$ и обозначим через $\mathbb{P}_{N_i} = \mathbb{P}(S^{d_i}V^*)$ пространство проективных гиперповерхностей степени d_i в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, как в н° 4.5 на стр. 66. Покажем, что результатное многообразие $\mathcal{R} = \{(S_0, \dots, S_n) \in \mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n} \mid S_0 \cap \dots \cap S_n \neq \emptyset\}$ системы $n + 1$ однородных полиномиальных уравнений на $n + 1$ неизвестных является неприводимой гиперповерхностью в $\mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$, т. е. существует единственный с точностью до пропорциональности неприводимый многочлен от коэффициентов уравнений системы, однородный по коэффициентам каждого уравнения, обращение в нуль которого на наборе многочленов $f_0, \dots, f_n \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ равносильно существованию ненулевого решения у системы полиномиальных уравнений $f_0 = \dots = f_n = 0$. Этот многочлен называется *результантом* системы однородных полиномиальных уравнений степеней d_0, d_1, \dots, d_n на $n + 1$ переменных. Рассмотрим многообразие инцидентности

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{(S_1, \dots, S_n, p) \in \mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n} \times \mathbb{P}_n \mid p \in S_0 \cap \dots \cap S_n\}.$$

Упражнение 6.14. Убедитесь, что Γ является проективным алгебраическим многообразием.

Так как уравнение $f(p) = 0$ линейно по f , проходящие через данную точку $p \in \mathbb{P}_n$ проективные гиперповерхности степени d_i образуют в \mathbb{P}_{N_i} гиперплоскость. Поэтому проекция $\pi_2 : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}_n$ сюръективна, а все её слои являются произведениями проективных гиперплоскостей и имеют одинаковую размерность $\sum (N_i - 1) = \sum N_i - n - 1$. Таким образом, Γ является неприводимым проективным многообразием размерности $\sum N_i - 1$.

Упражнение 6.15. Предъявите $n + 1$ гиперповерхностей $S_i \subset \mathbb{P}_n$, имеющих заданные степени d_i и ровно одну общую точку.

Упражнение показывает, что у проекции $\pi_1 : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$ есть нульмерный слой. Поэтому общий непустой слой тоже нульмерен, откуда $\dim \pi_1(\Gamma) = \dim \Gamma$. Тем самым, $\pi_1(\Gamma)$ является неприводимой гиперповерхностью в $\mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$.

Упражнение 6.16. Покажите, что всякое неприводимое подмногообразие коразмерности 1 в произведении проективных пространств задаётся неприводимым многочленом от однородных координат, однородным по координатам каждого из проективных пространств.

Пример 6.10 (прямые на поверхностях в \mathbb{P}_3)

Пространство $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^d V^*)$ поверхностей степени d в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ имеет размерность

$$N = \frac{1}{6}(d+1)(d+2)(d+3) - 1.$$

Прямые в \mathbb{P}_3 составляют грассманиан $\text{Gr}(2, 4) = \text{Gr}(2, V)$, который мы отождествим с квадратикой Плюскера $P \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$. Рассмотрим многообразие инцидентности

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{(S, \ell) \in \mathbb{P}_N \times P \mid \ell \subset S\} \subset \mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_5.$$

Упражнение 6.17. Докажите, что Γ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_5$.

Покажем, что проекция $\pi_2 : \Gamma \rightarrow Q_P$ сюръективна и все её слои являются проективными пространствами одинаковой размерности. Прямая ℓ , заданная уравнениями $x_2 = x_3 = 0$, лежит на поверхности $V(f)$ если и только если $f = x_2 g + x_3 h$ лежит в образе линейного отображения

$$\psi : S^{d-1}V^* \oplus S^{d-1}V^* \rightarrow S^d V^*, (g, h) \mapsto x_2 g + x_3 h,$$

который изоморфен фактору пространства $S^{d-1}V^* \oplus S^{d-1}V^*$ размерности $\frac{1}{3}d(d+1)(d+2)$ по подпространству $\ker \psi = \{(g, h) = (x_3q, -x_2q) \mid q \in S^{d-2}V^*\}$ размерности $\frac{1}{6}(d-1)d(d+1)$. Поэтому содержащие ℓ поверхности составляют проективное пространство размерности

$$\frac{1}{6} \left(2d(d+1)(d+2) - (d-1)d(d+1) \right) - 1 = \frac{1}{6}d(d+1)(d+5) - 1.$$

Мы заключаем, что Γ является неприводимым проективным многообразием размерности

$$\dim \Gamma = \frac{1}{6}d(d+1)(d+5) + 3.$$

Проекция $\pi_1(\Gamma) \subset \mathbb{P}_N$ представляет собою множество поверхностей, содержащих хотя бы одну прямую. Из [сл. 6.2](#) на стр. 90 вытекает, что это замкнутое неприводимое подмногообразие в \mathbb{P}_N , размерность которого равна разности $\dim \Gamma$ и минимальной из размерностей непустых слоёв проекции π_1 . Поскольку $\dim \mathbb{P}_N - \dim \Gamma = \frac{1}{6}((d+1)(d+2)(d+3) - d(d+1)(d+5)) - 4 = d-3$, мы заключаем, что при $d \geq 4$ образ $\pi_1(\Gamma) \subset \mathbb{P}_N$ заведомо является собственным подмногообразием. Поэтому общая¹ поверхность степени $d \geq 4$ в \mathbb{P}_3 не содержит прямых.

УПРАЖНЕНИЕ 6.18. Убедитесь, что на проективном замыкании аффинной кубической поверхности $xyz = 1$ лежат ровно три прямых.

Упражнение показывает, что при $d = 3$ у проекции $\pi_1 : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}_N$ есть непустой нульмерный слой. Следовательно, $\dim \pi_1(\Gamma) = \dim \Gamma = N$, и из неприводимости $\pi_1(\Gamma)$ вытекает равенство $\pi_1(\Gamma) = \mathbb{P}_N$. Таким образом, на каждой кубической поверхности в \mathbb{P}_3 лежит хотя бы одна прямая, причём на общей кубической поверхности лежит конечное число прямых.

УПРАЖНЕНИЕ 6.19. Опишите все слои проекции $\pi_1 : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}_N$ для $d = 2$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.20. Найдите все прямые на кубике Ферма $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$.

6.5. Отступление: 27 прямых на гладкой кубической поверхности. Рассмотрим гладкую² кубическую поверхность $S = V(F) \subset \mathbb{P}_3$.

Лемма 6.3

Приводимое плоское сечение поверхности S является либо объединением прямой и гладкой коники, либо объединением трёх различных прямых.

Доказательство. Предположение утверждает, что никакое плоское сечение $\pi \cap V(F)$ не содержит двойной прямой. Допустим, что такая двойная прямая $\ell \subset \pi \cap S$ имеется. Выберем координаты так, чтобы плоскость π имела уравнение $x_2 = 0$, а прямая ℓ — уравнения $x_2 = x_3 = 0$. Тогда $F = x_2Q + x_3^2L$ с линейным L и квадратичным Q . Обозначим через a одну из точек пересечения прямой ℓ с квадрикой $V(Q)$. Тогда $x_2(a) = x_3(a) = Q(a) = 0$ и все частные производные $\partial F / \partial x_i$ равны нулю в точке a , т. е. кубика S особа в точке a . \square

Следствие 6.14

В одной точке поверхности S может пересекаться не более трёх лежащих на S прямых, и такие прямые лежат в одной плоскости.

¹Т. е. принадлежащей некоторому плотному по Зарисскому открытому подмножеству в пространстве всех гиперповерхностей.

²См. п. 1.5 на стр. 16.

Доказательство. Все лежащие на S прямые, проходящие через точку $p \in S$, содержатся в пересечении $S \cap T_p S$ поверхности S с её касательной плоскостью $T_p S$ в точке p . \square

ЛЕММА 6.4

Для каждой прямой $\ell \subset S$ существуют ровно 5 различных плоскостей π_1, \dots, π_5 , содержащих ℓ и пересекающих S по тройке прямых $\pi_i \cap S = \ell \cup \ell_i \cup \ell'_i$. При этом $\ell_i \cap \ell_j = \ell'_i \cap \ell'_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$, и любая лежащая на S и не пересекающая ℓ прямая при каждом i пересекает ровно одну из двух прямых ℓ_i, ℓ'_i .

Доказательство. Рассмотрим такой базис $e_0, e_1, e_2, e_3 \in V$, что прямая $\ell = (e_0 e_1)$ задаётся уравнениями $x_2 = x_3 = 0$. Тогда задающий поверхность S многочлен F имеет вид

$$L_{00}(x_2, x_3) \cdot x_0^2 + 2 L_{01}(x_2, x_3) \cdot x_0 x_1 + L_{11}(x_2, x_3) \cdot x_1^2 + \\ + 2 Q_0(x_2, x_3) \cdot x_0 + 2 Q_1(x_2, x_3) \cdot x_1 + R(x_2, x_3) = 0, \quad (6-9)$$

где $L_{ij}, Q_i, R \in \mathbb{K}[x_2, x_3]$ являются однородными многочленами степеней 1, 2, 3 соответственно. Каждая содержащая прямую ℓ плоскость пересекает прямую $(e_2 e_3)$ в единственной точке $e_\vartheta = \vartheta_2 e_2 + \vartheta_3 e_3$. Обозначим такую плоскость через $\pi_\vartheta = (e_0 e_1 e_\vartheta)$ и будем использовать однородную координату $\vartheta = (\vartheta_2 : \vartheta_3) \in \mathbb{P}_1$ точки e_ϑ относительно базиса e_2, e_3 в качестве параметра в пучке плоскостей, проходящих через прямую ℓ . Обозначим через $(t_0 : t_1 : t_2)$ однородные координаты в плоскости π_ϑ относительно базиса e_0, e_1, e_ϑ . Прямая $\ell \subset \pi_\vartheta$ задаётся в этих координатах уравнением $t_2 = 0$, а уравнение плоской коники $(\pi_\vartheta \cap S) \setminus \ell$ получается из уравнения (6-9) подстановкой $x = (t_0 : t_1 : \vartheta_2 t_2 : \vartheta_3 t_2)$ и сокращением общего множителя t_2 в левой части. Таким образом, матрица Грама этой коники равна

$$G = \begin{pmatrix} L_{00}(\vartheta) & L_{01}(\vartheta) & Q_0(\vartheta) \\ L_{01}(\vartheta) & L_{11}(\vartheta) & Q_1(\vartheta) \\ Q_0(\vartheta) & Q_1(\vartheta) & R(\vartheta) \end{pmatrix}$$

а её определитель $D(\vartheta) = \det G$ является однородным многочленом степени 5 от ϑ

$$D(\vartheta) = L_{00}(\vartheta)L_{11}(\vartheta)R(\vartheta) + 2 L_{01}(\vartheta)Q_0(\vartheta)Q_1(\vartheta) - \\ - L_{11}(\vartheta)Q_0^2(\vartheta) - L_{00}(\vartheta)Q_1^2(\vartheta) - L_{01}(\vartheta)^2 R(\vartheta) \in \mathbb{K}[\vartheta_2, \vartheta_3]. \quad (6-10)$$

Он обращается в нуль в пяти точках $\vartheta \in \mathbb{P}_1$, учтённых с кратностями. Мы должны показать, что все эти кратности равны единице. Каждый нуль детерминанта (6-10) соответствует вырождению коники в пару прямых. Точка пересечения этих прямых либо лежит на ℓ , либо нет.

В первом случае выберем базис так, чтобы этими двумя прямыми были прямые $\ell' = (e_0 e_2)$ и $\ell'' = (e_0 (e_1 + e_2))$, которые задаются уравнениями $x_3 = x_1 = 0$ и $x_3 = (x_1 - x_2) = 0$. Тогда вырождение происходит при $\vartheta = (1 : 0)$, и кратность этого корня равна наибольшей степени ϑ_3 , на которую делится $D(\vartheta_2, \vartheta_3)$. Так как $\ell, \ell', \ell'' \subset S$, уравнение (6-9) имеет вид

$$x_1 x_2 (x_1 - x_2) + x_3 q = 0$$

для некоторого квадратичного многочлена q . Не делящимися на ϑ_3 элементами матрицы G могут быть лишь $L_{11} \equiv x_2 \pmod{\vartheta_3}$ и $Q_1 \equiv -x_2^2/2 \pmod{\vartheta_3}$, при условии, что мономы $x_1 x_2^2$ и $x_0^2 x_2$ входят в (6-9) с ненулевыми коэффициентами, и это действительно так, поскольку моном $x_1 x_2^2$

является единственным, дающим ненулевой вклад в частные производные от F в точке $e_2 \in S$, а моном $x_0^2 x_2$ — единственным с ненулевым вкладом в частные производные от F в точке $e_0 \in S$. Таким образом, $D(\vartheta_2, \vartheta_3) \equiv -L_{00} Q_1^2 \equiv \vartheta_3 \pmod{\vartheta_3^2}$ имеет по ϑ_3 порядок 1.

Во втором случае выберем базис так, чтобы $\ell' = (e_0 e_2)$, $\ell'' = (e_1 e_2)$ задавались уравнениями $x_3 = x_1 = 0$ и $x_3 = x_0 = 0$. Это вырождение также происходит при $\vartheta = (1 : 0)$, а уравнение (6-9) имеет вид $x_0 x_1 x_2 + x_3 q = 0$. Не делящимся на ϑ_3 элементом матрицы G является лишь $L_{01} \equiv x_2/2 \pmod{\vartheta_3}$, и определитель $D(\vartheta_2, \vartheta_3) \equiv -L_{01}^2 R \equiv \vartheta_3 \pmod{\vartheta_3^2}$ тоже имеет по ϑ_3 порядок 1. Оставшиеся утверждения о пересечениях прямых вытекают из [сл. 6.14](#), [лем. 6.3](#) и того, что каждая прямая в \mathbb{P}_3 пересекает любую плоскость. \square

Следствие 6.15

Любая гладкая кубическая поверхность содержит не пересекающиеся прямые. \square

Лемма 6.5

Ни через какие четыре лежащие на поверхности S попарно не пересекающиеся прямые нельзя провести квадрику. В частности, для любой такой четвёрки прямых существует по крайней мере одна, но не более двух лежащих на S прямых, пересекающих каждую прямую четвёрки.

Доказательство. Если через данные четыре попарно непересекающиеся лежащие на S прямые проходит квадрика Q , то это гладкая квадрика Сегре¹, заметаемая двумя семействами прямых, и все четыре данные прямые лежат в одном из этих двух семейств. Поскольку каждая прямая другого семейства пересекает все четыре данные прямые, она лежит на кубической поверхности S . Тем самым, $Q \subset S$, т. е. поверхность S приводима, а значит, особа. \square

ТЕОРЕМА 6.3

Каждая гладкая кубическая поверхность $S \subset \mathbb{P}_3$ содержит ровно 27 прямых, причём матрица их попарных пересечений² с точностью до нумерации прямых не зависит от поверхности.

Доказательство. Зафиксируем пару скрещивающихся прямых $a, b \subset S$ и построим 5 пар прямых ℓ_i, ℓ'_i , расположенных в проходящих через прямую a плоскостях согласно [лем. 6.4](#), причём в каждой паре обозначим через ℓ_i ту прямую, которая пересекается с b , а через ℓ'_i — ту, что не пересекается. Далее, обозначим через ℓ''_i ещё 5 прямых, образующих вместе с прямыми ℓ_i пять пар прямых, расположенных согласно [лем. 6.4](#) в плоскостях проходящих через прямую b . Таким образом, каждая из прямых ℓ''_i не пересекается ни с a , ни с прямыми ℓ_j , у которых $j \neq i$, но пересекается с b и со всеми прямыми ℓ'_j , у которых $j \neq i$.

Любая прямая $c \subset S$, отличная от 17 перечисленных, не пересекает ни a , ни b , но при каждом i пересекает ровно одну из двух прямых ℓ_i, ℓ'_i . Из [лем. 6.5](#) вытекает, что все лежащие на S прямые, пересекающие не менее четырёх прямых ℓ_i , исчерпываются парой прямых a, b . С другой стороны, если лежащая на S прямая c пересекает не более двух прямых ℓ_i , то с точностью до перестановки индексов, она пересекается с тремя прямыми $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3$ и ещё либо с прямой ℓ'_4 , либо с прямой ℓ_5 . В обоих случаях по [лем. 6.5](#) прямая c это одна из двух прямых a, ℓ''_5 .

Таким образом, каждая прямая $c \subset S$, отличная от 17 прямых $a, b, \ell_i, \ell'_i, \ell''_i$, пересекается в точности с тремя прямыми ℓ_i . Покажем, что на поверхности S есть ровно 10 таких прямых, и

¹См. форм. (2-11) на стр. 28.

²Т. е. симметричная матрица размера 27×27 , в позиции ij которой стоит нуль, если $\ell_i \cap \ell_j = \emptyset$, и единица, если $\ell_i \cap \ell_j \neq \emptyset$. При перенумерации прямых эта матрица сопрягается матрицей перестановки номеров.

они биективно соответствуют $\binom{5}{3} = 10$ тройкам $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Для каждой тройки прямых ℓ_i имеется самое большее одна отличная от a прямая c , пересекающая все прямые из тройки и оставшиеся две прямые ℓ'_j . С другой стороны, по лем. 6.4 для каждого i на S лежит ровно 10 прямых, пересекающих прямую ℓ_i . В их число входят 4 прямые a, b, ℓ'_i, ℓ''_i , а оставшиеся 6 должны, как мы знаем, пересекать ещё ровно две из оставшихся четырёх прямых ℓ_j . Поскольку таких пар и имеется ровно $\binom{4}{2} = 6$, мы получаем нужную биекцию между прямыми c и тройками (i, j, k) . \square

Упражнение 6.21. Поле $\mathbb{F}_4 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{F}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ является квадратичным расширением поля $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/(2)$ и обладает автоморфизмом Фробениуса $z \mapsto \bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} z^2$, тождественным на \mathbb{F}_2 и переводящим корни многочлена¹ $x^2 + x + 1$ друг в друга. Обозначим через $\text{PU}_4(\mathbb{F}_4)$ фактор унитарной группы $\text{U}_4(\mathbb{F}_4) = \{M \in \text{Mat}_4(\mathbb{F}_4) \mid \overline{MM^t} = E\}$ по подгруппе скалярных унитарных матриц, а через $G \subset S_{27}$ — группу всех сохраняющих матрицу инцидентности перестановок прямых, лежащих на гладкой кубической поверхности S . Покажите, что $\text{PU}_4(\mathbb{F}_4)$ является подгруппой индекса 2 в G , и найдите порядок группы G .

¹Расширение $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_4$ аналогично расширению $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2 + x + 1)$, и автоморфизм Фробениуса служит аналогом комплексного сопряжения.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 6.1. Если $x_i x_j \neq 0$, то $t_{j,v} = x_v / x_j = (x_v : x_i) / (x_j : x_i) = t_{i,v} / t_{i,j}$ (при $v = i$ надо считать $t_{i,i} = 1$). Поэтому $\varphi_{ji}^* : t_{j,v} \mapsto t_{i,v} / t_{i,j}$. Обратный к φ_{ji}^* гомоморфизм $\mathbb{k}[\mathcal{D}(t_{i,j})] \rightarrow \mathbb{k}[\mathcal{D}(t_{j,i})]$ действует по той же формуле $t_j^{(i)} \mapsto 1/t_i^{(j)}$, $t_{i,v} \mapsto t_{j,v} / t_{j,i}$.

Упр. 6.2. В каждом таком W имеется единственный базис w_1, \dots, w_k , проектирующийся в стандартный базис e_{i_1}, \dots, e_{i_k} координатной плоскости. Матрица z , по строкам которой стоят координаты векторов w_i в стандартном базисе пространства \mathbb{k}^m , имеет $s_I(z) = E$. В GL_k -орбите каждой матрицы x им U_I также имеется единственная матрица z с $s_I(z) = E$ — именно, $z = s_I(x)^{-1} \cdot x$.

Упр. 6.3. Элементы $k \times m$ -матрицы $s_J^{-1}(\varphi_I(t)) \cdot \varphi_I(t)$ являются рациональными функциями от элементов матрицы t со знаменателями $\det s_J(\varphi_I(t))$ и, стало быть, регулярны в $\mathcal{D}(\det s_J(\varphi_I(t)))$. Поэтому отображение φ_{JI} , переводящее эту матрицу в её $k \times (m - k)$ -подматрицу, образованную столбцами с не лежащими в J номерами, регулярно. Обратное отображение задаётся той же формулой: $t \mapsto s_I^{-1}(\varphi_J(t)) \cdot \varphi_J(t)$ (удостоверьтесь в этом!).

Упр. 6.4. Это следует из определения локальной регулярной функции и [зам. 5.1.](#) на стр. 79.

Упр. 6.5. Отображение κ можно задать формулой $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1 x_2 : x_0 x_2 : x_0 x_1)$, из которой видно, что оно не определено только в точках $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ и образ κ тоже равен дополнению до этих трёх точек.

Упр. 6.6. В обозначения из [прим. 6.1](#) на стр. 84 пересечение множества нулей однородного многочлена $\bar{f}(x_0, x_1, \dots, x_n)$ со стандартной картой $U_i \subset \mathbb{P}_n$ задаётся в аффинных координатах t_i карты U_i полиномиальным уравнением

$$\bar{f}(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}) = 0.$$

Упр. 6.10. Пусть $X_1, X_2 \subset X$ — два замкнутых неприводимых подмножества и $U \subset X$ — открытое множество, такое что оба пересечения $X_1 \cap U, X_2 \cap U$ непусты. Тогда $X_1 = X_2 \iff X_1 \cap U = X_2 \cap U$, поскольку $X_i = \overline{X_i \cap U}$.

Упр. 6.11. Докажите, что произведение конечных сюръекций $X \rightarrow \mathbb{A}^n, Y \rightarrow \mathbb{A}^m$ является конечной сюръекцией $X \times Y \rightarrow \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$.

Упр. 6.12. Выберите в H какой-нибудь базис, запишите координаты векторов этого базиса и координаты точки p по строкам $(n - d + 1) \times (n + 1)$ -матрицы. Условие $p \in H$ означает, что ранг этой матрицы равен $n - d$. Зануление всех миноров порядка $n - d + 1$ является системой билинейных уравнений на плюккеровы координаты¹ подпространства H и однородные координаты точки p .

Упр. 6.14. Γ задаётся однородными по каждому f_i и по p уравнениями $f_0(p) = f_1(p) = \dots = f_n(p) = 0$.

Упр. 6.15. Возьмите $n + 1$ гиперплоскостей, пересекающихся в одной точке, и возведите задающие их линейные формы в подходящие степени.

Упр. 6.17. Линейная оболочка векторов $u, w \in V$ является образом линейного отображения

$$V^* \rightarrow V, \quad \xi \mapsto \partial_\xi(u \wedge w) = \langle \xi, u \otimes w - w \otimes u \rangle.$$

¹напомню, что плюккеровыми координатами подпространства являются старшие миноры матрицы, составленной из координат какого-нибудь базиса в этом подпространстве

Прямая $(uw) \subset \mathbb{P}_3$ лежит на поверхности $V(f) \subset \mathbb{P}_3$ если и только если $f(\partial_\xi(u \wedge w)) = 0$ для всех $\xi \in V^*$. Пусть векторы e_i образуют базис в V , $u = \sum u_i e_i$, $v = \sum v_i e_i$, $\xi = \sum \xi_i e_i^*$. Тогда

$$u \wedge v = \sum_{i \neq j} p_{ij} e_i \wedge e_j, \quad \text{где} \quad p_{ij} = -p_{ji} = u_i v_j - u_j v_i$$

обозначают плюккеровы координаты на $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$. Поскольку

$$\partial_\xi(u \wedge v) = \sum_k \sum_{i \neq j} \xi_k p_{ij} \frac{\partial}{\partial e_k} (e_i \wedge e_j) = \sum_k \left(\sum_{i \neq j} p_{ij} \xi_k \right) \cdot e_j,$$

подставляя $x_j = \sum_{i \neq j} p_{ij} \xi_i$ в $f(x)$ и приравнявая к нулю коэффициент при каждом мономе от ξ_j , получаем систему полиномиальных уравнений на коэффициенты многочлена f и плюккеровы координаты p_{ij} , описывающую Γ как замкнутое алгебраическое подмногообразие в $\mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_5$.

Упр. 6.18. В аффинной части прямых нет вообще, так как подставляя вместо (x, y, z) точку, бегущую по прямой с параметрическим уравнением $x = x_0 + \alpha t$, $y = y_0 + \beta t$, $z = z_0 + \gamma t$ получаем несовместную систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma = 0 \\ \alpha\beta z_0 + \beta\gamma x_0 + \gamma\alpha y_0 = 0 \\ \alpha y_0 z_0 + \beta x_0 z_0 + \gamma x_0 y_0 = 0 \\ x_0 y_0 z_0 = 1 \end{cases}$$

(убедитесь в этом!). Пересечение поверхности с бесконечно удалённой гиперплоскостью задаётся уравнением $xyz = 3$ и является объединением трёх прямых.

Упр. 6.19. В этом случае $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^2 V^*) = \mathbb{P}_5$ это пространство квадрик. Слой проекции $\pi_1 : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}_5$ над каждой гладкой квадрикой является дизъюнктивным объединением двух проективных прямых, слой над любой гладкой точкой гиперповерхности вырожденных квадрик $V(\det) \subset \mathbb{P}_5$ является одной проективной прямой, слой над парой пересекающихся плоскостей изоморфен дизъюнктивному объединению двойственных плоскостей, а слой над двойной плоскостью — двойственной плоскости.

Упр. 6.20. С точностью до перенумерации координат, пара линейных уравнений, задающих прямую на кубике Ферма, приводится методом Гаусса к виду $x_0 = \alpha x_2 + \beta x_3$, $x_1 = \gamma x_2 + \delta x_3$. Подставьте эти значения в уравнение кубики, покажите, что $\alpha\beta\gamma\delta = 0$, а затем найдите их.

Упр. 6.21. Кубическая форма Ферма $\sum x_i^3$ над \mathbb{F}_4 совпадает со стандартной эрмитовой формой $\sum x_i \bar{x}_i$. Поэтому проективная унитарная группа $\text{PU}_4(\mathbb{F}_4)$ действует на кубике Ферма $C_F \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{F}_4)$ из упр. 6.20, переводя прямые в прямые с сохранением инцидентности. При этом $|\text{PU}_4(\mathbb{F}_4)| = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$, а $|G| = 51\,840$.