§2. Проективные квадрики

Всюду в этом параграфе мы считаем, что $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$.

2.1. Напоминания из линейной алгебры и геометрии. Каждая ненулевая квадратичная форма $q \in S^2V^*$ задаёт в проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$ алгебраическую гиперповерхность

$$Q = V(q) = \{v \in V \smallsetminus 0 \mid q(v) = 0\},$$

которая состоит из одномерных изотропных[1] подпространств формы q и называется *проективной квадрикой*. Если $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$, то квадратичный многочлен q можно записать в однородных координатах $x = (x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ как

$$q(x) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i x_j = x \cdot A \cdot {}^t x\,,$$

где $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — строка координат, ${}^t x$ — транспонированный ей столбец координат, а $A = (a_{ij})$ — *симметричная* матрица, которая при $i \neq j$ имеет в качестве $a_{ij} = a_{ji}$ половину[2] коэффициента при $x_i x_j$ в многочлене $q(x)$. Другими словами, для любого однородного многочлена $q(x)$ второй степени существует единственная симметричная билинейная форма $\tilde{q} : V \times V \to \Bbbk$, такая что $q(x) = \tilde{q}(x, x)$. Она называется *поляризацией* квадратичной формы q и выражается через q несколькими эквивалентными способами:

$$\tilde{q}(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i y_j = x \cdot A \cdot {}^t y = \frac{1}{2}\,\partial_y q(x) = \frac{1}{2}\,\partial_x q(y) = \frac{1}{2}\Big(q(x + y) - q(x) - q(y)\Big)\,. \tag{2-1}$$

Матрица A представляет собой *матрицу Грама* формы $\tilde{q}$ в двойственном к x_i базисе e_i пространства V, т. е. $a_{ij} = \tilde{q}(e_i, e_j)$. В другом базисе $(e'_0, e'_1, \ldots, e'_n) = (e_0, e_1, \ldots, e_n) \cdot C$ новая матрица Грама A' выражается через A по формуле $A' = {}^t C \cdot A \cdot C$. В частности, при линейной замене координат *определитель Грама* $\det A$ умножается на *ненулевой квадрат* определителя матрицы перехода: $\det(A') = \det(A) \cdot \det^2(C)$. Поэтому класс определителя Грама по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля $\Bbbk$ не зависит от выбора базиса и является инвариантом квадрики по отношению к линейным заменам координат. Мы будем называть этот класс *определителем* формы q и обозначать $\det(q)$. Если $\det q \neq 0$, квадрика $V(q)$ называется *невырожденной* (или *гладкой*), в противном случае — *вырожденной* (или *особой*).

2.1.1. Корреляция, ядро и ранг. С симметричной билинейной формой $\tilde{q}$ на V связан линейный *оператор корреляции* $\hat{q} : V \to V^*$, переводящий вектор $v \in V$ в линейную форму скалярного умножения на v:

$$\hat{q}(v) : V \to \Bbbk\,, \quad w \mapsto \tilde{q}(w, v)\,.$$

Упражнение 2.1. Проверьте, что матрица оператора корреляции, записанная в любом базисе пространства V и двойственном к нему базисе в V^* совпадает с матрицей Грама квадратичной формы q в этом базисе.

[1] Напомню, что подпространство $U \subset V$ называется *изотропным* для квадратичной формы $q \in S^2(V^*)$, если $q(u) = 0$ для всех $u \in U$. См. раздел 13.3.2 на с. 174 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_13.pdf.

[2] Именно для этого существенно, что $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$.

Невырожденность квадратичной формы q равносильна тому, что $\hat{q}$ изоморфизм. Пространство

$$\ker \hat{q} = \{\, v \in V \mid \forall\, w \in V \ \tilde{q}(w, v) = 0 \}$$

называется *ядром* квадратичной формы q. Поскольку $\dim \ker \hat{q} = \dim V - \operatorname{rk} A$, ранг матрицы Грама не зависит от выбора базиса. Он называется *рангом* квадрики q. Проективизация ядра $\operatorname{Sing} Q \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\ker \hat{q}) \subset \mathbb{P}(V)$ называется *вершинным пространством* квадрики Q. Обратите внимание, что $\operatorname{Sing} Q \subset Q$.

2.1.2. Касательные прямые и касательное пространство. Вершинное подпространство совпадает с *множеством особых точек* квадратичной гиперповерхности $Q = V(q)$, как оно определялось в n° 1.5 на стр. 16 выше. В самом деле, проходящая через точку $a \in Q$ прямая $\ell = (ab)$ касается Q в точке a, если и только если $\tilde{q}(b, a) = 0$, поэтому особость точки a равносильна тому, что $a \in \ker \hat{q}$. Касательное пространство к Q в точке a совпадает с проективизацией ортогонала к вектору a относительно билинейной формы $\tilde{q}$

$$T_a Q = \mathbb{P}(a^{\perp}) = \{ b \in \mathbb{P}(V) \mid \tilde{q}(a, b) = 0 \} \tag{2-2}$$

и либо является гиперплоскостью в $\mathbb{P}(V)$, если точка a гладкая, либо совпадает со всем пространством $\mathbb{P}(V)$, если точка $a \in \ker \hat{q}$ особая.

Если $b \notin Q$, то ограничение формы q на одномерное подпространство $b \subset V$ невырождено и $V = b \oplus b^{\perp}$. Формула (2-2) утверждает, что видимый из точки $b \notin Q$ контур квадрики Q, т. е. ГМТ пересечения с квадрикой Q всевозможных касательных, опущенных на неё из точки b, высекается из квадрики Q не проходящей через точку b гиперплоскостью

$$\mathbb{P}(b^{\perp}) = \{ x \mid \tilde{q}(x, b) = 0 \}\,, \tag{2-3}$$

которая называется *полярой* точки b относительно квадрики Q.

Теорема 2.1
Пересечение особой квадрики Q с любым дополнительным к $\operatorname{Sing} Q$ проективным подпространством $L \subset \mathbb{P}(V)$ является гладкой (возможно пустой) квадрикой $Q' = L \cap Q$ в подпространстве L, и исходная квадрика Q является линейным $J(Q', \operatorname{Sing} Q)$ соединением[1] квадрики Q' и подпространства $\operatorname{Sing} Q$.

Доказательство. Ограничение формы q на подпространство L невырождено, поскольку ограничение корреляции $\hat{q}$ на любое дополнительное к $\ker \hat{q}$ подпространство имеет нулевое ядро. Каждая пересекающая $\operatorname{Sing} Q$ прямая, будучи касательной к квадрике Q, либо целиком лежит на квадрике Q, либо пересекает Q ровно в одной точке — точке своего пересечения с $\operatorname{Sing} Q$. Поэтому каждая прямая (a, b) с $a \in \operatorname{Sing} Q$, $b \in Q'$ целиком лежит на Q, т. е. $J(Q', \operatorname{Sing} Q) \subset Q$. Через каждую не лежащую в L гладкую точку $c \in Q$ проходит единственная прямая, пересекающая и L, и $\operatorname{Sing} Q$. Поскольку эта прямая пересекает Q также и в точке $c \notin \operatorname{Sing} Q$, она целиком лежит на квадрике Q, а значит, пересекает L в точке, лежащей на Q'. Поэтому $Q \subset J(Q', \operatorname{Sing} Q)$. □

Упражнение 2.2. Покажите, что квадрика, имеющая хоть одну гладкую точку, не содержится в гиперплоскости.

[1] Т. е. объединением всех прямых вида (ab) с $a \in Q'$ и $b \in \operatorname{Sing} Q$.

Пример 2.1 (квадрики на $\mathbb{P}_1$)
При $\dim V = 2$ вырожденность квадрики $V(q)$ означает обращение в нуль дискриминанта[1] квадратичной формы q. В этом случае $q = \psi^2$ является квадратом ненулевой линейной формы $\psi \in V^*$, обращающейся в нуль в единственной точке $p = \mathbb{P}\operatorname{Ann}\xi \subset \mathbb{P}(V)$. Такая квадрика называется *двойной точкой* p.

Гладкая квадрика имеет ненулевой дискриминант и либо состоит из двух различных точек, либо пуста. Первое происходит, когда $D/4 = -\det(q)$ является квадратом в $\Bbbk$, что всегда так, если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, второе — когда $D/4 = -\det(q)$ не квадрат, и над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ такого не бывает.

Мы заключаем, что в проективном пространстве любой размерности произвольные квадрика Q и прямая ℓ пересекаются ровно одним из следующих четырёх способов: либо $\ell \subset Q$, либо $\ell \cap Q$ это одна двойная точка, либо $\ell \cap Q$ это две различные точки, либо $\ell \cap Q = \varnothing$, причём над алгебраически замкнутым полем последний случай невозможен.

Пример 2.2 (коники)
Квадрики на плоскости называются *кониками*. С гладкой коникой в $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ мы уже встречались в прим. 1.3 на стр. 6.

Если $\operatorname{rk} q = 1$, то уравнение $q(x) = 0$ переписывается в ортогональном базисе как $x_0^2 = 0$. Такая коника $C = V(q)$ совпадает с $\operatorname{Sing} C$ и называется *двойной прямой*. В терминах теор. 2.1 коника C является линейным соединением прямой $\operatorname{Sing} C$ и пустой нульмерной квадрики[2].

Если $\operatorname{rk} q = 2$, то $\operatorname{Sing} q$ является проективизацией одномерного ядра формы q и состоит из одной точки s. По теор. 2.1 пересечение такой коники C с любой не проходящей через s прямой, будучи гладкой квадрикой на этой прямой, либо состоит из двух разных точек, либо пусто,и над алгебраически замкнутым полем последнее невозможно. В первом случае C является объединением двух различных прямых, пересекающихся в её особой точке s, и называется *распавшейся*, а форма $q = \psi_1\psi_2$ является произведением двух различных линейных форм. Во втором случае коника C называется *двойной точкой* и визуально совпадает со своей особой точкой. Например, над полем $\mathbb{R}$ уравнение $x_0^2 + x_1^2 = 0$ задаёт двойную точку $(0 : 0 : 1)$.

Невырожденная квадратичная форма q на трёхмерном векторном пространстве либо анизотропна[3], либо является прямой ортогональной суммой двумерной гиперболической[4] и одно-

---

[1] Напомню, что дискриминант $D = 4(b^2 - ac)$ квадратичной формы $ax_0^2 + 2bx_0x_1 + cx_1^2$ связан с определителем Грама соотношением

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = -\frac{D}{4}.$$

[2] Дополнительным подпространством к прямой на плоскости является точка — проективизация одномерного векторного пространства, а невырожденная форма на одномерном пространстве автоматически анизотропна.

[3] Напомню, что квадратичная форма q называется *анизотропной*, если у неё нет ненулевых изотропных векторов, т. е. $q(v) = 0$ только для $v = 0$. Над алгебраически замкнутым полем анизотропны только одномерные формы. Подробнее об этом см. раздел 14.1.2 на с. 182 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_14.pdf.

[4] Напомню, что квадратичная форма q называется *гиперболической*, если её матрица Грама в подходящем базисе имеет блочный вид $\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, в котором 0 и E — нулевая и единичная квадратные матрицы одинакового размера (таким образом размерность всего пространства чётна). Подробнее о гиперболических формах см. примере 13.2 на с. 173 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_13.pdf и раздел 14.1.2 на с. 182 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/

мерной анизотропной форм. В первом случае $V(q) = \varnothing$, и над алгебраически замкнутым полем такое невозможно. Над полем $\mathbb{R}$ примером такой коники служит $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. Во втором случае в подходящих координатах коника задаётся уравнением

$$x_1^2 = x_0 x_2 \,. \tag{2-4}$$

Поскольку любые значения $x_0 = t_0$, $x_1 = t_1$ однозначно дополняются до тройки

$$(t_0 : t_1 : t_1^2/t_0) = (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2)\,,$$

удовлетворяющей уравнению (2-4), коника (2-5) является образом *вложения Веронезе*

$$\mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_2\,, \quad (t_0 : t_1) \mapsto (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2)\,. \tag{2-5}$$

Мы заключаем, что над любым полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$ имеется единственная с точностью до проективного преобразования непустая невырожденная коника. В подходящих координатах она задаётся уравнением (2-4) и допускает рациональную параметризацию (2-5).

2.1.3. Планарность гладкой квадрики. Размерность максимального по включению проективного пространства, целиком лежащего на гладкой квадрике $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$, называется *планарностью* квадрики Q. Иначе говоря, планарность квадрики $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$ на единицу больше размерности максимального изотропного подпространства $U \subset V$ квадратичной формы q. Планарность пустой квадрики, задаваемой анизотропной формой q, по определению полагается равной -1. Квадрики планарности 0 суть непустые квадрики, не содержащие прямых. Ортогональная группа $\mathrm{O}_q(V)$ невырожденной квадратичной формы q действует на $\mathbb{P}(V)$, переводя квадрику $Q = V(q)$ в себя. Из курса линейной алгебры и геометрии известно[1], что это действие транзитивно на изотропных подпространствах любой фиксированной размерности и в частности на точках квадрики Q. Любое ортогональное преобразование, переводящее точку $p \in Q$ в точку $p' \in Q$, биективно отображает множество k-мерных подпространств $L \subset Q$, проходящих через p, в множество k-мерных подпространств $L' \subset Q$, проходящих через p'. Тем самым, через каждую точку m-планарной квадрики можно провести m-мерное проективное подпространство, целиком лежащее на квадрике, и мощность множества таких подпространств не зависит от точки, а никаких $(m+1)$-мерных проективных подпространств на m-планарной квадрике не лежит.

Из курса линейной алгебры и геометрии также известно[2], что всякое пространство V с невырожденной симметричной билинейной формой распадается в прямую ортогональную сумму $V = H_{2k} \oplus A$ гиперболического подпространства H_{2k} и анизотропного подпространства A, каждое из которых может быть нулевым или совпадать со всем пространством V, и для любых двух таких разложений $H_{2k} \oplus A = H_{2\ell} \oplus A'$ выполняется равенство $k = \ell$ и имеется сохраняющий симметричную билинейную форму изоморфизм $A \simeq A'$. На языке формул это означает, что уравнение гладкой m-планарной проективной квадрики записывается в подходящих однородных координатах как

$$x_0 x_1 + x_2 x_3 + \dots + x_{2m} x_{2m+1} = \alpha(x_{2m+2}, \dots, x_n)\,, \tag{2-6}$$

2122/lec_14.pdf.

[1] См. следствие 14.2 на с. 186 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_14.pdf.

[2] См. теоремы 14.1 и 14.4 на с. 183 и 186 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_14.pdf.

где α — анизотропная квадратичная форма от $n-2m-1$ переменных. Число $2m+2$ равно размерности гиперболического слагаемого в разложении пространства V в прямую ортогональную относительно формы $\tilde{q}$ сумму гиперболического и анизотропного подпространств, и максимум размерностей изотропных относительно формы $\tilde{q}$ векторных подпространств в V равен $m+1$. В частности, число m не зависит от выбора координат, в которых уравнение квадрики имеет вид (2-6). При фиксированном n планарность m может принимать значение в пределах

$$-1 \leqslant m \leqslant (n-1)/2\,.$$

Квадрики (2-6) с разными m не переводятся одна в другую проективными преобразованиями.

Пример 2.3 (квадрики максимальной планарности)
Максимально возможная планарность квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ равна $(n-1)/2$ при нечётном n и $(n-2)/2$ при чётном n. Над алгебраически замкнутым полем все невырожденные квадрики имеют максимальную планарность. Над любым полем уравнение квадрики максимальной планарности в $\mathbb{P}_n$ в подходящих однородных координатах записывается в виде

$$0 = x_0x_1 + x_2x_3 + \cdots + x_{2m}x_{2m+1} \text{ при } n = 2m+1\,, \tag{2-7}$$

$$x_0^2 = x_1x_{m+1} + x_2x_{m+2} + \cdots + x_mx_{2m} \text{ при } n = 2m\,. \tag{2-8}$$

Поэтому все квадрики максимальной планарности переводятся друг в друга проективными преобразованиями. Например, все непустые гладкие коники на $\mathbb{P}_2$ проективно конгруэнтны, как мы уже видели в прим. 2.2 на стр. 22.

Пример 2.4 (гладкие вещественные квадрики)
Над полем $\mathbb{R}$ при каждом $k \in \mathbb{N}$ есть единственная с точностью до изометрии и умножения на константу анизотропная форма от k переменных: $x_1^2 + \ldots + x_k^2$. Поэтому каждая гладкая вещественная квадрика размерности n, лежащая в $(n+1)$-мерном пространстве $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$, в подходящих однородных координатах задаётся уравнением

$$x_0x_1 + x_2x_3 + \ldots + x_{2m}x_{2m+1} = x_{2m+2}^2 + \ldots + x_{n+1}^2\,, \quad -1 \leqslant m \leqslant n/2\,. \tag{2-9}$$

При разных m эти уравнения задают квадрики разной планарности и тем самым являют собою полный список различных гладких вещественных квадрик с точностью до проективного преобразования.

Предложение 2.1
Сечение гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ произвольной гиперплоскостью Π либо является гладкой квадрикой в этой гиперплоскости, либо имеет единственную особую точку $p \in \Pi \cap Q$. Последнее равносильно тому, что $\Pi = T_pQ$ касается квадрики в точке p, и в этом случае $Q \cap T_p$ является конусом с вершиной в p над гладкой квадрикой на единицу меньшей планарности и на два меньшей размерности, чем у Q, расположенной в $(n-2)$-мерной плоскости, дополнительной к p внутри T_pQ.

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, $\Pi = \mathbb{P}(W)$ и $Q = V(q)$. Ядро ограничения оператора корреляции $\hat{q} : V \rightleftharpoons V^*$ на подпространство $W \subset V$ является пересечением W с одномерным подпространством $W^\perp \subset V$. Это пересечение либо нулевое, либо является точкой $p \in \Pi$. В первом случае квадрика $Q \cap \Pi$ невырождена, а во втором имеет единственную особую точку p, причём

$\Pi = \mathbb{P}(p^{\perp})$ является касательным пространством[1] к Q в точке p. Согласно теор. 2.1 на стр. 21, особая квадрика $Q \cap \Pi$ в пространстве $\Pi \simeq \mathbb{P}_{n-1}$ является линейным соединением точки p и неособой квадрики, лежащей в любой не проходящей через p гиперплоскости $\mathbb{P}(U) \simeq \mathbb{P}_{n-2} \subset \Pi$. Так как ограничение квадратичной формы q на подпространство $U \subset V$ невырождено, имеется ортогональное разложение $V = U \oplus U^{\perp}$. Ограничение формы q на двумерное пространство $U^{\perp}$ невырождено, и в $U^{\perp}$ есть изотропная прямая $p \subset U^{\perp}$. Следовательно, $U^{\perp} \simeq H_2$ является гиперболической плоскостью, и размерность гиперболической составляющей ограничения $q|_U$ на два меньше, чем у самой формы q на V, т. е. планарность гладкой квадрики $Q \cap \mathbb{P}(U)$ на единицу меньше, чем у Q. □

2.1.4. Полярное преобразование. Корреляция $\hat{q} : V \xrightarrow{\sim} V^*$, ассоциированная с невырожденной квадратичной формой q, индуцирует линейный проективный изоморфизм

$$\overline{q} : \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(V^*)$$

который называется *полярным преобразованием* или *поляритетом* квадрики Q. Поляритет переводит точку $p \in \mathbb{P}_n$ в гиперплоскость $L \subset \mathbb{P}_n$, заданную уравнением $\tilde{q}(p,x) = 0$. Точка p и гиперплоскость L в этом случае называются *полюсом* и *полярой* друг друга относительно квадрики Q. Поляра точки, не лежащей на квадрике, это гиперплоскость, высекающая видимый из этой точки контур квадрики, а поляра точки, лежащей на квадрике, — это гиперплоскость, касающаяся квадрики в этой точке. Таким образом, всякую квадрику Q можно охарактеризовать как ГМТ, лежащих на своих полярах.

Поскольку условие $\tilde{q}(a,b) = 0$ симметрично по a и b, точка a лежит на поляре точки b, если и только если точка b лежит на поляре точки a. Такие точки называются *сопряжёнными* относительно квадрики Q.

Предложение 2.2
Пусть $a, b \notin Q$ и прямая (ab) пересекает Q в двух различных точках c, d. Точки a, b сопряжены относительно квадрики Q, если и только если двойное отношение $[a,b,c,d] = -1$.

Доказательство. Ограничение квадрики Q на прямую (cd) задаётся в однородных координатах $(x_0 : x_1)$ относительно базиса c, d квадратичной формой $q(x) = \det(x,c)\cdot\det(x,d)$, поляризация которой есть $\tilde{q}(x,y) = \frac{1}{2}\left(\det(x,c)\cdot\det(y,d) + \det(y,c)\cdot\det(x,d)\right)$. Условие сопряжённости $\tilde{q}(a,b) = 0$ означает, что $\det(a,c)\cdot\det(b,d) = -\det(b,c)\cdot\det(a,d)$ или $[a,b,c,d] = -1$. □

Предложение 2.3
Для неособой квадрики G и произвольной квадрики Q в $\mathbb{P}_n$ гиперплоскости, полярные относительно квадрики G точкам $p \in Q$, образуют в двойственном проективном пространстве $\mathbb{P}_n^{\times}$ квадрику в $Q_G^{\times}$ того же ранга, что и квадрика Q. Если Q и G имеют в некоторых однородных координатах на $\mathbb{P}_n$ матрицы Грама A и Γ соответственно, то квадрика $Q_G^{\times}$ имеет в двойственных однородных координатах на $\mathbb{P}_n^{\times}$ матрицу $\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}$.

Доказательство. Поляритет $\hat{g} : \mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n^{\times}$ гладкой квадрики $G \subset \mathbb{P}_n$ переводит точку из $\mathbb{P}_n$ со столбцом координат x в точку двойственного пространства $\mathbb{P}_n^{\times}$ со строкой координат $\xi = x^t\Gamma$ и является проективным изоморфизмом. Таким образом, полярная точке $x \in Q$ гиперплоскость ξ удовлетворяет уравнению, которое получается из уравнения $x^t \cdot A \cdot x = 0$ квадрики Q подстановкой $x = \Gamma^{-1}\xi^t$, т. е. уравнению $\xi \cdot \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} \cdot \xi^t = 0$. □

[1]См. формулу (**??**) на стр. **??**.

Следствие 2.1
Касательные пространства гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ образуют в $\mathbb{P}_n^\times$ гладкую квадрику $Q^\times$. Матрицы Грама квадрик Q и $Q^\times$ в двойственных базисах пространств $\mathbb{P}_n$ и $\mathbb{P}_n^\times$ обратны друг другу.

Доказательство. Положим в предыдущей теореме $G = Q$ и $\Gamma = A$, и заметим, что гиперплоскости, полярные точкам $p \in Q$ относительно самой же квадрики Q, это в точности касательные пространства T_pQ. □

2.2. Коники. Напомню[1], что кривые второй степени на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ называются *проективными кониками*. Они являются точками пространства $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Над алгебраически замкнутым полем имеются ровно три проективно неэквивалентных коники:

- *двойная прямая* $x_0^2 = 0$ имеет ранг 1, и все её точки особы
- *распавшаяся коника* $x_0^2 + x_1^2 = 0$ имеет ранг 2 и является объединением двух различных прямых $x_0 = \pm\sqrt{-1} \cdot x_1$, точка пересечения которых $(0 : 0 : 1)$ является единственной особой точкой распавшейся коники
- *гладкая коника* $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ имеет максимальный ранг 3

что согласуется[2] с прим. 2.2.

Над произвольным полем $\Bbbk$ с $\operatorname{char}(\Bbbk) \neq 2$ каждая непустая гладкая коника $C \subset \mathbb{P}_2$ допускает квадратичную *рациональную параметризацию*, т. е. отображение $\varphi : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_2$ задаваемое в однородных координатах тройкой взаимно простых однородных многочленов второй степени $\varphi(t_0, t_1) = \big(\varphi_0(t_0, t_1) : \varphi_1(t_0, t_1) : \varphi_2(t_0, t_1)\big) \in \mathbb{P}_2$ и биективно отображающее прямую $\mathbb{P}_1$ на конику $C \subset \mathbb{P}_2$. Такая параметризация задаётся проекцией $p : C \xrightarrow{\sim} \ell$ коники C из любой её точки $p \in C$ на любую не проходящую через p прямую ℓ. В самом деле, каждая отличная от касательной прямой T_pC прямая (px) с $x \in \ell$ пересекает конику C по двум различным точкам: точке p и ещё одной точке $p'(x) \in C$, однородные координаты которой $(\lambda_0 : \lambda_1)$ в базисе p, x на прямой (px) доставляют отличный от $p = (1 : 0)$ корень уравнения

$$(\lambda_0, \lambda_1) \cdot \begin{pmatrix} q(p,p) & q(p,x) \\ q(x,p) & q(x,x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = 0 \iff 2q(p,x) \cdot \lambda_0\lambda_1 + q(x,x) \cdot \lambda_1^2 = 0\,,$$

равный $(\lambda_0 : \lambda_1) = \big(q(x,x) : -2q(p,x)\big)$. Отображение

$$\ell \ni x \mapsto q(x,x) \cdot p - 2q(p,x) \cdot x \in C \subset \mathbb{P}_2 \tag{2-10}$$

и задаёт искомую квадратичную параметризацию коники C точками $x \in \ell$.

Упражнение 2.3. Убедитесь, что все три однородных координаты точки

$$q(x,x) \cdot p - 2q(p,x) \cdot x \in \mathbb{P}_2$$

являются однородными полиномами степени 2 от однородных координат $(t_0 : t_1)$ точки $x \in \ell$ относительно произвольного базиса на прямой ℓ, и что формула (2-10) корректно сопоставляет точке $x = T_pC \cap \ell$ точку $p \in C$.

[1] См. прим. 2.2 на стр. 22.

[2] Распавшаяся коника является линейным соединением особой точки и гладкой квадрики — пары различных точек — на любой прямой, не проходящей через особую точку. Двойная прямая это линейное соединение прямой особых точек и пустого множества — гладкой квадрики на $\mathbb{P}_0$.

Упражнение 2.4. Убедитесь, что проекция коники Веронезе $a_0a_2 - a_1^2 = 0$ из точки $(1 : 1 : 1)$ на прямую $a_1 = 0$, переводит точку $(\alpha_0^2 : \alpha_0\alpha_1 : \alpha_1^2)$ в точку $(\alpha_0 : 0 : \alpha_1)$.

Предложение 2.4

Гладкая коника пересекает произвольную кривую, заданную на $\mathbb{P}_2$ однородным уравнением степени d, не более, чем по $2d$ точкам, либо целиком содержится в этой кривой.

Доказательство. Запараметризуем конику однородными полиномами степени 2 от параметра $t = (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_1$. Значения t, при которых коника пересекает кривую с уравнением $f(x) = 0$, являются корнями однородного уравнения $f\big(q(t)\big) = 0$, левая часть которого либо тождественно равна нулю, либо имеет степень $2d$. В первом случае вся коника содержится в кривой, во втором случае имеется не более $2d$ различных корней. □

Предложение 2.5

Каждые 5 точек в $\mathbb{P}_2$ лежат на некоторой конике. Если никакие 4 из пяти точек не коллинеарны, то такая коника единственна, а если никакие 3 не коллинеарны, то она ещё и невырождена.

Доказательство. При фиксированном $p \in V$ уравнение $q(p) = 0$ линейно по $q \in S^2V^*$. Поэтому коники, проходящие через $p \in \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ образуют гиперплоскость в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Поскольку любые 5 гиперплоскостей в $\mathbb{P}_5$ имеют непустое пересечение, требуемая коника существует. Если какие-то три из точек коллинеарны, а никакие четыре — нет, коника содержит прямую, проходящую через три коллинеарные точки, и стало быть, распадается в объединение этой прямой и прямой, проходящей через две оставшиеся точки. Тем самым, такая коника единственна. Если никакие три из точек не коллинеарны, любая проходящая через них коника автоматически неособа, и значит, единственна по предл. 2.4. □

Следствие 2.2

Любые 5 прямых на $\mathbb{P}_2$, никакие 3 из которых не конкурентны касаются единственной невырожденной коники.

Доказательство. Это утверждение проективно двойственно предыдущему: 5 точек на $\mathbb{P}_2^\times = \mathbb{P}(V^*)$, двойственные к данным пяти прямым на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$, лежат на единственной гладкой конике $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$, и двойственная ей коника[1] $C \subset \mathbb{P}_2$ есть единственная гладкая коника, касающаяся пяти данных прямых. □

2.3. Квадратичные поверхности в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ образуют проективное пространство

$$\mathbb{P}_9 = \mathbb{P}(S^2V^*).$$

Поэтому любые 9 точек в $\mathbb{P}_3$ лежат на некоторой квадрике. В частности, любые три прямые в $\mathbb{P}_3$ лежат на некоторой квадрике — достаточно взять по 3 точки на каждой прямой и провести квадрику через эти 9 точек.

Упражнение 2.5. Покажите, что вырожденная квадрика в $\mathbb{P}_3$ (над произвольным полем) не может содержать трёх попарно непересекающихся прямых.

[1]Т. е. коника, образованная касательными к конике $C^\times$, см. сл. 2.1 на стр. 26 ниже.

Таким образом, любые три попарно скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ лежат на гладкой 1-планарной квадрике. Удобной геометрической моделью такой квадрики является *квадрика Сегре*, состоящая из ненулевых матриц ранга 1 в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\left(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\Bbbk)\right)$:

$$Q_S \overset{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \neq 0 \;\middle|\; \det \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} = \alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10} = 0 \right\}. \tag{2-11}$$

Упражнение 2.6. Убедитесь, что всякий ненулевой линейный оператор $F : U \to V$ ранга один имеет вид $v \otimes \xi : u \mapsto v \cdot \langle \xi , u \rangle$ для некоторых ненулевых $v \in V$, $\xi \in U^*$, определяемых по оператору однозначно с точностью до пропорциональности

В ситуации, когда $U = V = \Bbbk^2$, а v и ξ имеют в стандартных двойственных базисах пространств $\Bbbk^2$ и $\Bbbk^{2*}$ координаты $v = (x_0 : x_1)$ и $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$, матрица оператора $v \otimes \xi$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 x_0 & \xi_1 x_0 \\ \xi_0 x_1 & \xi_1 x_1 \end{pmatrix} \tag{2-12}$$

Сопоставляя паре точек $(\xi, v) \in \mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\Bbbk^{2*}) \times \mathbb{P}(\Bbbk^2)$ одномерное подпространство в $\mathrm{Hom}(\Bbbk^2, \Bbbk^2)$, порождённое оператором $v \otimes \xi$ с матрицей (2-12), мы получаем *вложение Сегре*

$$s : \mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\Big(\mathrm{End}\left(\Bbbk^2\right)\Big),$$

биективно отображающее $\mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1$ на квадрику Сегре $Q_S \subset \mathbb{P}_3$. При этом два семейства координатных прямых на $\mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1$ переходят в два семейства прямых на Q_S. А именно, координатная прямая $\xi = \mathrm{const}$ изобразится на квадрике Сегре проективизацией двумерного пространства матриц ранга 1 с фиксированным отношением $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$ между столбцами, а прямая $v = \mathrm{const}$ — матрицами с фиксированным отношением $x = (x_0 : x_1)$ между строками. В каждом из этих семейств все прямые попарно скрещиваются, а любые две прямые из разных семейств пересекаются, причём каждая точка Q_S является точкой пересечения пары прямых из различных семейств.

Упражнение 2.7. Убедитесь, что никаких других прямых на квадрике Сегре нет.

Предложение 2.6
Через любые три попарно непересекающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ проходит единственная (и автоматически неособая) квадрика. Эта квадрика представляет собою объединение всех прямых, пересекающих все три заданных.

Доказательство. Всякая квадрика, проходящая через три скрещивающихся прямые, является неособой квадрикой Сегре, заметаемой двумя семействами прямолинейных образующих. Все три заданные прямые должны лежать в одном из них. Но тогда любая прямая из другого семейства пересекают каждую из них, и наоборот, всякая прямая пересекающая каждую из них, лежит на квадрике (ибо пересекает её по трём точкам), причём в другом по отношению к трём заданным прямым семействе. □

2.4. Пучки квадрик В этом разделе мы по умолчанию считаем, что основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто и $\mathrm{char}\,\Bbbk \neq 2$. Напомню[1], что прямые в пространстве квадрик $\mathbb{P}(S^2V^*)$ на

[1] См. n° 1.4.4 на стр. 13.

$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ называются *пучками квадрик*. Такой пучок $(Q_0Q_1) \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$ однозначно задаётся любой парой различных лежащих в нём квадрик $Q_0 = V(q_0)$, $Q_1 = V(q_1)$ и состоит из всех квадрик вида

$$Q_\lambda = V(\lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1) = \{v \in \mathbb{P}(V) \mid \lambda_0 q_0(v) + \lambda_1 q_1(v) = 0\}\,,\quad \text{где } \lambda = (\lambda_0 : \lambda_1) \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\Bbbk^2)\,. \tag{2-13}$$

Пересечение базисных квадрик $B = Q_0 \cap Q_1$ называется *базисным множеством* пучка. Поскольку каждая квадрика из пучка (2-13) проходит через B, базисное множество является пересечением всех квадрик пучка и не зависит от выбора базисных квадрик Q_0, Q_1 на прямой (Q_0Q_1). Многочлен

$$\chi_{(q_0q_1)}(t_0, t_1) \stackrel{\text{def}}{=} \det(t_0q_0 + t_1q_1) \in \Bbbk[t_0, t_1] \tag{2-14}$$

называется *характеристическим многочленом* пучка (2-13). Это однородный многочлен степени $n+1$ от $t = (t_0 : t_1)$. В отличие от базисного множества, характеристический многочлен (2-14) *зависит* от выбора базисных квадрик Q_0, Q_1, и даже их уравнений q_0, q_1. При переходе к другим двум базисным квадрикам в том же самом пучке или умножении их уравнений на константы переменные $(t_0 : t_1)$ подвергаются обратимому линейному преобразованию. Поэтому алгебраическим инвариантом пучка является не сам многочлен (2-14), а только его класс по модулю обратимой линейной замены переменных.

2.4.1. Невырожденные пучки. Пучок квадрик называется *невырожденным*, если в нём есть хотя бы одна гладкая квадрика. Это означает, что характеристический многочлен (2-14) отличен от нуля хотя бы в одной точке на $\mathbb{P}_1$ и, в частности, является ненулевым многочленом. Поэтому в невырожденном пучке квадрик на $\mathbb{P}_n$ может быть не более $n+1$ особых квадрик, причём вершинные подпространства никаких двух из них не пересекаются, так вектор, лежащий в ядре сразу двух корреляций $\hat{q}_0$, $\hat{q}_1$, лежит в ядре и любой их линейной комбинации $\lambda_0\hat{q}_0 + \lambda_1\hat{q}_1$, что означает вырожденность сразу всех квадрик пучка.

Множество вырожденных квадрик в невырожденном пучке (2-13) называют *спектром* этого пучка. Квадратичные формы $\lambda_0q_0+\lambda_1q_1$, задающие квадрики из спектра, биективно соответствуют корням $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1)$ характеристического многочлена (2-14). Будем называть *кратностью* $\operatorname{mult} Q_\lambda$ вырожденной квадрики Q_λ, отвечающей корню λ характеристического многочлена (2-14), кратность этого корня — максимальное $k \in \mathbb{N}$, такое что многочлен (2-14) делится в кольце многочленов $\Bbbk[t_0, t_1]$ на $\det^k(\lambda, t) = (\lambda_0t_1 - \lambda_1t_0)^k$. Кратности всех гладких квадрик пучка по определению положим равными нулю. Над алгебраически замкнутым полем спектр невырожденного пучка квадрик на $\mathbb{P}_n$ состоит ровно из $n+1$ квадрик с учётом их кратностей. Рассматриваемый как неупорядоченный набор из $n+1$ не обязательно различных точек на $\mathbb{P}_1$ с точностью до дробно линейного автоморфизма $\mathbb{P}_1$, он не зависит от выбора базиса в пучке.

Лемма 2.1

Кратность $\operatorname{mult} S$ каждой особой квадрики S из невырожденного пучка строго больше размерности $\dim \operatorname{Sing} S$ пространства её особых точек.

Доказательство. Пусть квадрика $G \subset \mathbb{P}_n$ неособа, а квадрика $S \subset \mathbb{P}_n$ имеет $\dim \operatorname{Sing} S = k$. Это означает, что её матрица Грама имеет $\operatorname{rk} S = (n+1) - (k+1) = n - k$, и все миноры порядка $n - k + 1$ и выше в ней — нулевые.

Упражнение 2.8. Выведите из этого, что характеристический многочлен $\det(t_0S+t_1G)$ делится на t_1^{k+1}.

Таким образом кратность задающей S точки $t = (1 : 0) \in \mathbb{P}_1$ не менее $k+1$. □

2.4.2. Невырожденные пучки коник. Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ невырожденный пучок коник на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ содержит 1, 2 или 3 различных особых коники, а его базисное множество состоит из 1, 2, 3 или 4 различных точек. Если в пучке есть двойная прямая, то все его базисные точки лежат на этой прямой. Если в пучке есть распавшаяся коника $\ell_1 \cup \ell_2$, то все базисные точки такого пучка лежат на ней так, что на каждой из прямых ℓ_1, ℓ_2 есть хотя бы одна базисная точка, ибо любая гладкая коника пучка пересекает каждую из двух прямых.

Пример 2.5 (пучок с одной базисной точкой)
Если базисное множество пучка состоит из единственной точки p, особой коникой в нём может быть лишь двойная прямая, касающаяся любой гладкой коники пучка в точке p. Наоборот, любая гладкая коника C и касающаяся её в произвольной точке $p \in C$ двойная прямая ℓ задают регулярный пучок коник с единственной базисной точкой p, и единственной особой коникой — двойной прямой ℓ. Все гладкие коники этого пучка пересекаются друг с другом по единственной точке p и имеют в ней общую касательную см. рис. 2◇1.

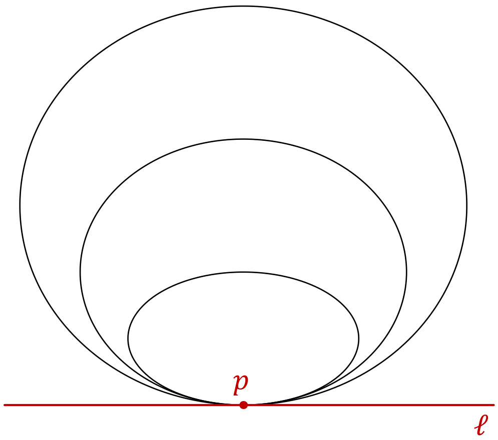

Рис. 2◇1. Пучок с одной базисной точкой ($a = b = c = d = p$).

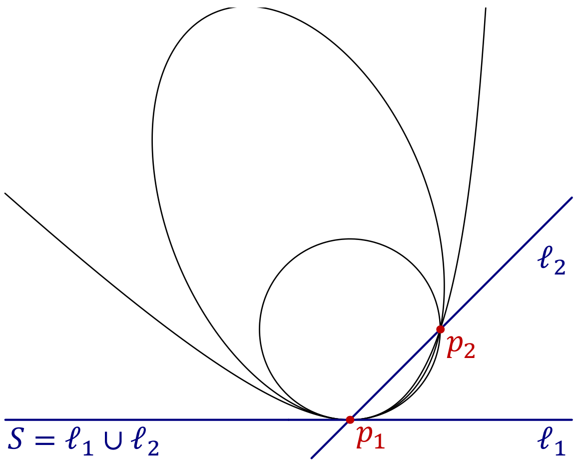

Рис. 2◇2. Пучок с двумя базисными точками $p_1 = a = b = c$, $p_2 = d$ и одной вырожденной коникой S.

Пример 2.6 (пучки с двумя базисными точками)
Если базисное множество пучка состоит из двух точек p_1, p_2, то вырожденными кониками в нём могут быть только двойная прямая $\ell = (p_1 p_2)$ или такая распавшаяся коника $\ell_1 \cup \ell_2$, что $p_1 \in \ell_1$, $p_2 \in \ell_2$. Второй случай разделяется на два подслучая: либо обе точки p_1, p_2 отличны от $\ell_1 \cap \ell_2$, как на рис. 2◇3, либо $p_1 = \ell_1 \cap \ell_2$, а $p_2 \in \ell_2 \smallsetminus \ell_1$, как на рис. 2◇2.

Если имеет место последнее, то распавшаяся коника $\ell_1 \cap \ell_2$ является единственной особой коникой в пучке, а каждая гладкая коника пучка касается прямой ℓ_1 в точке p_1 и проходит через точку p_2, см. рис. 2◇2. В частности, любые две гладкие коники в таком пучке пересекаются ровно по двум точкам p_1, p_2 и имеют в точке p_1 общую касательную.

Двойная прямая $\ell = (p_1 p_2)$ и распавшаяся коника $\ell_1 \cup \ell_2$ с $p_1 \in \ell_1 \smallsetminus \ell_2$, $p_2 \in \ell_2 \smallsetminus \ell_1$ возникают в пучке с двумя базисными точками p_1, p_2 только одновременно в силу следующей леммы.

Лемма 2.2
Коники, касающиеся двух заданных прямых ℓ_1, ℓ_2 в двух заданных точках $p_1 \in \ell_1$, $p_2 \in \ell_2$, отличных от $\ell_1 \cap \ell_2$, составляют пучок. Этот пучок содержит ровно две вырожденные коники:

двойную прямую $\ell = (p_1p_2)$ и распавшуюся конику $\ell_1 \cup \ell_2$, причём прямые ℓ_1 и ℓ_2 однозначно восстанавливаются по двойной прямой (p_1p_2) и любой гладкой конике C из пучка как касательные к C в точках пересечения $C \cap (p_1p_2)$.

Доказательство. Каждый ненулевой вектор $p \in V$ задаёт сюрьективное линейное отображение

$$S^2V^* \twoheadrightarrow V^*\,, \quad q \mapsto \hat{q}(p)\,, \tag{2-15}$$

переводящее квадратичную форму q в ковектор

$$\hat{q}(p) : V \to \Bbbk\,, \quad v \mapsto \tilde{q}(v,p)\,.$$

Так как $\dim V = 3$, ядро отображения (2-15) имеет размерность $\dim S^2V^* - \dim V^* = 3$. Поэтому полный прообраз любого одномерного подпространства $\xi \subset V^*$ при отображении (2-15) имеет размерность 4, а его проективизация имеет коразмерность 2 в пространстве коник. Беря вектор p на прямой $\ell = \operatorname{Ann}\xi$, мы заключаем, что коники, касающиеся прямой ℓ в точке $p \in \ell$, образуют в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$ проективное подпространство коразмерности 2. Два таких подпространства, отвечающие $p_1 \in \ell_1$ и $p_2 \in \ell_2$, пересекаются как минимум по прямой. Если бы их пересечение содержало плоскость, то в пространстве коник, касающихся ℓ_1 и ℓ_2 в точках p_1 и p_2, нашлась бы коника, проходящая через любые две наперёд заданные точки. Но такая коника, проходящая через отличную от p_1 и p_2 точку прямой ℓ и ещё какую-нибудь точку вне прямых ℓ, ℓ_1, ℓ_2, распадается в объединение прямой ℓ и ещё одной прямой ℓ', отличной от ℓ, ℓ_1, ℓ_2. Поэтому она не может пересекать прямые ℓ_1, ℓ_2 с кратностью 2 одновременно и в p_1, и в p_2. Это доказывает первое утверждение леммы. Остальные утверждения очевидны из рис. 2◇3. □

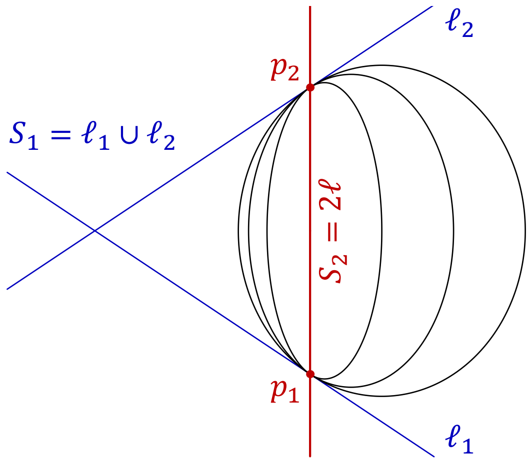

Рис. 2◇3. Пучок с двумя базисными точками $p_1 = a = b$, $p_2 = c = d$ и двумя вырожденными кониками S_1, S_2.

Пример 2.7 (пучок с тремя базисными точками)

Если базисное множество пучка коник состоит из трёх точек p_1, p_2, p_3, то они не коллинеарны[1]. В частности, такой пучок не содержит двойных прямых. Кроме того, ни одна из точек p_i не может быть особой одновременно для двух распавшихся коник из пучка[2]. Каждая распавшаяся коника $\ell_1 \cup \ell_2$ из такого пучка проходит через базисные точки либо так, что $p_1 = \ell_1 \cap \ell_2$, $p_2 \in \ell_1 \smallsetminus \ell_2$, $p_3 \in \ell_2 \smallsetminus \ell_1$, либо так, что $p_1 \in \ell_1 \smallsetminus \ell_2$, а $p_2, p_3 \in \ell_2 \smallsetminus \ell_1$. На рис. 2◇4 ниже первое отвечает прямым ℓ_1', ℓ_2', второе — прямым ℓ_1'', ℓ_2''. Во втором случае любая гладкая коника C из пучка касается прямой ℓ_1 в точке p_1. В первом случае все гладкие коники пучка имеют в точке p_1 общую касательную, поскольку проходящая через p_1 прямая ℓ, касающаяся фиксированной гладкой коники C из пучка в точке $p_1 \in C$, соприкасается в точке p_1 с каждой коникой пучка, порождённого коникой C и распавшейся коникой $\ell_1'' \cup \ell_2''$, которая тоже касается прямой ℓ в точке $p_1 = \ell_1'' \cap \ell_2''$.

[1] Иначе содержащая их прямая пересекала бы любую гладкую конику пучка по трём точкам.
[2] Иначе все коники пучка были бы особы в этой точке, см. самое начало n° 2.4.1.

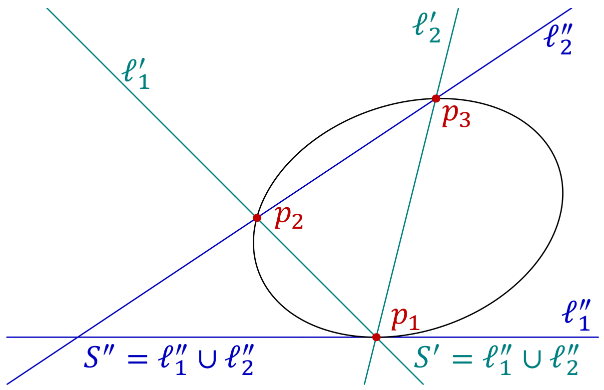

Рис. 2⋄4. Пучок с тремя базисными точками $p_1 = a = b$, $p_2 = c$, $p_3 = d$ и двумя вырожденными кониками S_1, S_2.

Упражнение 2.9. Убедитесь в этом и покажите, что множество всех коник $C \subset \mathbb{P}_2$, касающихся заданной прямой ℓ в заданной точке $p \in \ell$ и проходящих через две другие различные заданные точки $c, d \notin \ell$, составляют пучок, содержащий ровно две вырожденные коники: $(cd) \cup \ell$ и $(pc) \cup (pd)$.

Пример 2.8 (простой пучок коник)

Пучок коник, спектр которого состоит из трёх разных точек, называется *простым*. По лем. 2.1 все точки спектра простого пучка имеют кратность 1, и по предыдущему базисное множество такого пучка состоит из четырёх различных точек a, b, c, d, никакие 3 из которых не коллинеарны.

Упражнение 2.10. Покажите, что множество всех коник, проходящих через четыре различные точки a, b, c, d, никакие три из которых не коллинеарны, представляет собою простой пучок, три особые коники которого суть пары противоположных сторон четырёхвершинника $abcd$, как на рис. 2⋄5.

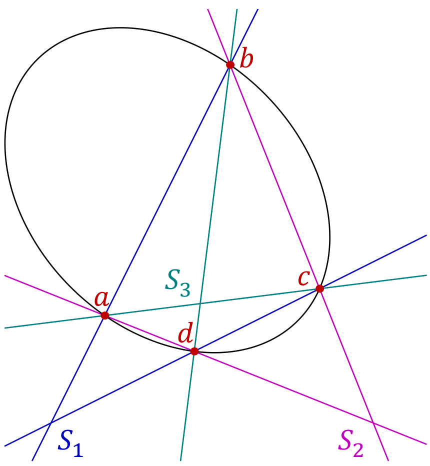

Рис. 2⋄5. Простой пучок.

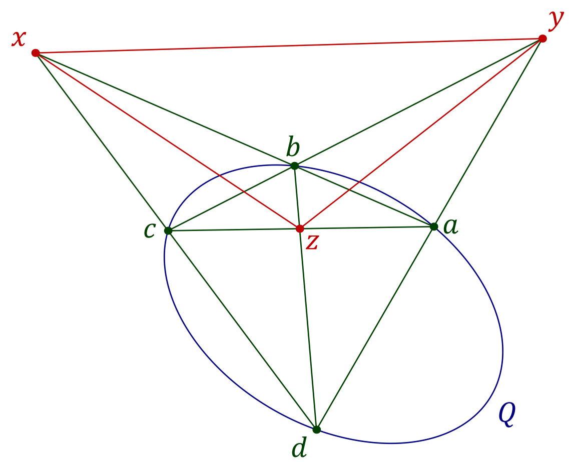

Рис. 2⋄6. Автополярный $\triangle xyz$.

Таким образом, простой пучок коник однозначно определяется своими базисными точками a, b, c, d. В однородных координатах $x = (x_0 : x_1 : x_2)$ на $\mathbb{P}_2$ уравнения его коник имеют вид

$$\frac{\det(x, a, b) \cdot \det(x, c, d)}{\det(x, a, d) \cdot \det(x, b, c)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1},$$

где $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1)$ пробегает $\mathbb{P}_1$. Все предыдущие примеры являются вырождениями простого пучка и получаются из него, когда некоторые из базисных точек слипаются друг с другом. А именно, пучок на рис. 2◇4 возникает при $a, b \to p_1$, $c = p_2$, $d = p_3$, пучок на рис. 2◇3 — когда $a, b \to p_1$, $c, d \to p_2$, пучок на рис. 2◇2 — если $a, b, c \to p_1$, $d = p_2$, а на рис. 2◇1 все четыре базисные точки схлопываются в одну.

Пример 2.9 (В. С. Жгун)
Покажем, что треугольник xyz с вершинами в точках пересечения трёх пар противоположных сторон четырёхвершинника $abcd$ на рис. 2◇6 на стр. 32 автополярен относительно всех гладких коник, описанных около этого четырёхвершинника. Действительно, каждая такая коника $Q = V(q)$ лежит в простом пучке, порождённом любыми двумя из трёх распавшихся коник

$$\begin{aligned} S_x &= V(f_x) = (ab) \cup (cd) \\ S_y &= V(f_y) = (ad) \cup (bc) \\ S_z &= V(f_z) = (ac) \cup (bd) . \end{aligned}$$

Поскольку $x = \operatorname{Sing} S_x = \ker \hat{f}_x$, мы имеем равенства $\tilde{f}_x(y, x) = \tilde{f}_x(z, x) = 0$. Аналогично, $\tilde{f}_y(x, y) = \tilde{f}_y(z, y) = 0$ и $\tilde{f}_z(x, z) = \tilde{f}_z(y, z) = 0$. Так как билинейная форма $\tilde{q}$ является линейной комбинацией билинейных форм $\tilde{f}_x$ и $\tilde{f}_y$, из равенств $\tilde{f}_x(x, y) = \tilde{f}_y(x, y) = 0$ вытекает равенство $\tilde{q}(x, y) = 0$. Аналогично получаем равенства $\tilde{q}(x, z) = 0$ и $\tilde{q}(y, z) = 0$.

Упражнение 2.11 (построение Штейнера или задача Мишустина). Одной линейкой постройте поляру данной точки относительно данной гладкой коники.

2.5. Гиперповерхность особых квадрик. Множество всех особых квадрик на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ образует в пространстве квадрик $\mathbb{P}(S^2V^*)$ алгебраическую гиперповерхности степени $(n+1)$

$$\Sigma = V(\det) = \{q \in S^2V^* \mid \det(q) = 0\} . \tag{2-16}$$

Упражнение 2.12. Покажите, что частная производная $\partial \det A / \partial a_{ij}$ от определителя квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ по любому её элементу a_{ij} равна алгебраическому дополнению к этому элементу.

Предложение 2.7
Особая квадрика $S \in \Sigma$ является гладкой точкой гиперповерхности Σ если и только если сама квадрика $S \subset \mathbb{P}(V)$ имеет единственную особую точку $s \in S$, и в этом случае касательное пространство $T_S\Sigma \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$ состоит из всех квадрик $Q \subset \mathbb{P}(V)$, проходящих через точку s.

Доказательство. Пусть $S = V(f)$. Согласно упр. 2.12, для любой квадрики $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$ ограничение многочлена det на прямую $(SQ) \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$ имеет в аффинной окрестности точки S вид

$$0 = \det(f + tq) = \det(f) + t \cdot \sum_{ij} q_{ij} f_{ij}^{\vee} + \text{члены, делящиеся на } t^2 ,$$

где $f_{ij}^{\vee}$ означает алгебраическое дополнение к (ij)-тому элементу матрицы Грама квадратичной формы f. Квадрика S отвечает корню $t = 0$. Он кратный тогда и только тогда, когда

$$\sum_{ij} q_{ij} f_{ij}^{\vee} = 0 . \tag{2-17}$$

Это линейное уравнение на q нетривиально если и только если в матрице Грама $F = \left(f_{ij}\right)$ имеется хоть один ненулевой минор порядка n, т. е. когда $\dim\ker F = 1$. Каждый столбец и каждая строка присоединённой матрицы $F^\vee = (f^\vee_{ij})$ лежит в ядре матрицы F, поскольку $F\,F^\vee = F^\vee\,F = \det(F)\,E = 0$. Таким образом, $\operatorname{rk} F^\vee = 1$, и все строки и все столбцы симметричной матрицы $F^\vee$ пропорциональны однородным координатам особой точки

$$s = (s_0 : s_1 : \dots : s_n) = (f^\vee_{i0} : f^\vee_{i1} : \dots : f^\vee_{in}) = (f^\vee_{0j} : f^\vee_{1j} : \dots : f^\vee_{nj})$$

квадрики S. Это означает, что с точностью до умножения на независящую от i, j константу $f^\vee_{ij} = s_i s_j$, и условие касания (2-17) превращается в равенство $\sum_{ij} q_{ij} s_i s_j = q(s) = 0$, т. е. в условие прохождения квадрики Q через точку s. □

Следствие 2.3

Прямая $(PQ) \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$ касается гиперповерхности особых квадрик Σ в точке $Q \in \Sigma$ если и только если $P \cap \operatorname{Sing} Q \neq \varnothing$. Если же $\operatorname{Sing} P \cap \operatorname{Sing} Q \neq \varnothing$, то прямая (PQ) лежит на Σ.

Доказательство. Если Q является гладкой точкой гиперповерхности Σ, то первое утверждение является переформулировкой предл. 2.7. Если точка $Q \in \Sigma$ особа, то $\dim \operatorname{Sing} Q \geqslant 1$, и любая лежащая в $\operatorname{Sing} Q$ прямая пересекает любую квадрику P, а любая прямая (PQ) касается гиперповерхности Σ в точке Q, т. е. первое утверждение является в этом случае тавтологией. Если $\operatorname{Sing} P \cap \operatorname{Sing} Q \neq \varnothing$, то все квадрики пучка (PQ) особы в точках пересечения $\operatorname{Sing} P \cap \operatorname{Sing} Q$, поскольку ненулевой вектор, лежащий в ядре корреляций, отвечающих квадрикам P и Q, лежит в ядре и любой линейной комбинации этих корреляций. □

Упражнение 2.13. Приведите пример пучка L особых коник, в котором $\operatorname{Sing} P \cap \operatorname{Sing} Q = \varnothing$ для всех $P, Q \in L$.

Пример 2.10 (ещё раз классификация невырожденных пучков коник)

При $n = 2$ особые коники на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ образуют кубическую гиперповерхность в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$

$$\Sigma = \{q \in \mathbb{P}_5 \mid \det q = 0\}\,.$$

Гладкими точками гиперповерхности Σ являются распавшиеся коники, а особыми точками гиперповерхности Σ являются двойные прямые. Прямая общего положения $L \subset \mathbb{P}_5$ трансверсально пересекает гиперповерхность Σ в трёх её гладких точках и представляет собою простой пучок коник, как на рис. 2◇5 на стр. 32. Если прямая L касается Σ в гладкой точке $S = \ell_1 \cup \ell_2$, то она либо больше нигде не пересекает Σ, и в этом случае кратность пересечения Σ с L в точке S равна 3, либо пересекает Σ с кратностью 1 ещё ровно в одной, автоматически гладкой точке. Эти случаи реализуются пучками коник, представленными на рис. 2◇2 на стр. 30 и рис. 2◇4 на стр. 32, причём точке касания L с Σ всегда отвечает распавшаяся коника с особенностью в базисной точке пучка. Если прямая L проходит через особую точку $S = 2\ell$ гиперповерхности Σ, возникает та же альтернатива: если кратность пересечения Σ и L в точке S равна 3, то L больше нигде не пересекает Σ и выгладит как на рис. 2◇1 на стр. 30, если же эта кратность 2, то L пересекает Σ ещё ровно в одной гладкой точке с кратностью 1, как на рис. 2◇3 на стр. 31.

2.6. Рабочий пример: регулярные пучки квадрик. Невырожденный пучок квадрик $(Q_0 Q_1)$ называется *регулярным*, если кратность каждой точки его спектра ровно на единицу больше размерности пространства особых точек отвечающей этой точке особой квадрики, т. е. когда

$$\dim \operatorname{Sing} Q_\lambda = \operatorname{mult} Q_\lambda - 1 \text{ для всех } \lambda = (\lambda_0 : \lambda_1) \in \mathbb{P}_1 .$$

Это означает, что коранг матрицы Грама формы $\lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1$ при каждом $\lambda \in \mathbb{P}_1$ равен кратности корня $t = \lambda$ характеристического многочлена $\chi_{q_0,q_1}(t_0, t_1) = \det(t_0 q_0 + t_1 q_1)$. Из всех рассмотренных в n° 2.4.2 невырожденных пучков коник регулярными являются только пучки, представленные на рис. 2◇5 и рис. 2◇3.

Теорема 2.2
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ для любого регулярного пучка квадрик в $\mathbb{P}(V)$ найдётся такой базис пространства V, в котором матрицы Грама всех квадрик из пучка одновременно диагональны.

Доказательство. Пусть пучок порождается квадриками $V(g)$ и $V(f)$, где форма g неособа. Сопоставим форме f самосопряжённый относительно невырожденной формы $\widetilde{g}$ линейный оператор $\varphi = \widehat{g}^{-1}\hat{f} : V \to V$, однозначно задающийся тем, что $\widetilde{g}(u, \varphi w) = \tilde{f}(u, w)$ для всех $u, w \in V$. Поскольку матрица Φ оператора φ выражается через матрицы Грама G, F квадратичных форм g, f по формуле $\Phi = G^{-1}F$, характеристический многочлен

$$\chi_\varphi(t) = \det(tE - \Phi) = \det(tE - G^{-1}F) = \det G^{-1} \det(tG - F)$$

оператора φ связан с характеристическим многочленом $\chi_{(gf)}(t_0, t_1) = \det(t_0 G + t_1 F)$ пучка квадрик по формуле

$$\chi_\varphi(t) = \det G^{-1} \cdot \chi_{(fg)}(-t_0/t_1, 1) .$$

Поэтому квадратичная форма $F - \lambda G$ вырождена если и только если число $\lambda \in \Bbbk$ является собственным значением оператора φ. Так как ранг матрицы $\lambda G - F$ равен рангу матрицы $\lambda E - \Phi = G^{-1}(\lambda G - F)$, размерность собственного подпространства $V_\lambda = \ker(\lambda E - \Phi)$ оператора φ совпадает с размерностью ядра квадратичной формы $F - \lambda G$, которая по условию теоремы в точности равна кратности корня $(t_0 : t_1) = (-\lambda : 1)$ многочлена $\chi_{(gf)}(t_0, t_1)$. Таким образом, сумма размерностей собственных подпространств V_λ оператора φ равна $\dim V$. Поскольку по **??** на стр. **??** все собственные подпространства самосопряжённого оператора ортогональны друг другу относительно скалярного произведения $\widetilde{g}$, пространство V является $\widetilde{g}$-ортогональной прямой суммой собственных подпространств V_λ оператора φ. Выбирая в каждом подпространстве V_λ ортогональный базис квадратичной формы g, мы получаем в V базис, где обе формы g и f имеют диагональные матрицы Грама, причём на диагонали матрицы F будут стоять собственные значения оператора f или, что то же самое, взятые с обратным знаком характеристические числа t_0/t_1 пучка (GF). Все формы $\lambda g + \mu f$ также будут диагональны в этом базисе. □

Следствие 2.4 (из доказательства теор. 2.2)
Если квадратичная форма f на векторном пространстве V над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$ имеет диагональную матрицу Грама в ортонормальном базисе невырожденной квадратичной формы g, то диагональные элементы этой матрицы суть собственные числа линейного оператора $\varphi = \widehat{g}^{-1}\hat{f} : V \to V$, который однозначно задаётся тем, что

$\tilde{f}(u,w) = \widetilde{g}(u,\varphi w)$ для всех $u, w \in V$. При этом сам базис состоит из собственных векторов оператора φ, и количество появлений каждого собственного числа на диагонали матрицы Грама равно размерности соответствующего собственного подпространства. В частности, диагональная матрица Грама формы f с точностью до перестановки диагональных элементов не зависит от выбора базиса, одновременно ортонормального для g и ортогонального для f.

Теорема 2.3
Два регулярных пучка квадрик в $\mathbb{P}_n$ над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ переводятся один в другой линейным проективным автоморфизмом[1] $\mathbb{P}_n$ если и только если их спектры, понимаемые как неупорядоченные множества из n не обязательно различных точек на $\mathbb{P}_1$, переводятся друг в друга дробно линейным автоморфизмом $\mathbb{P}_1$.

Доказательство. Выберем в первом пучке гладкую квадрику $V(g')$ и рассмотрим в V базис $\boldsymbol{e}'$, в котором все квадрики первого пучка имеют диагональные матрицы Грама, причём нормируем его так, чтобы матрица Грама формы g' стала единичной. Рассмотрим любую отличную от g' форму f' из первого пучка и обозначим через F' её матрицу Грама в базисе $\boldsymbol{e}'$. В доказательстве теор. 2.2 мы видели, что диагональные элементы матрицы F' являются корнями многочлена $\det(tE - F')$, т. е. составляют в точности спектр первого пучка. Поскольку он совпадает со спектром второго пучка, во втором пучке квадратичных форм имеется базис из таких форм g'', f'', что корни многочлена $\chi_{g''f''}(t,1)$ совпадают с корнями многочлена $\det(tE - F')$. Из этого вытекает, что форма g'' невырождена, и в пространстве V существует базис $\boldsymbol{e}''$, в котором матрица Грама формы g'' единичная, а форма f'' имеет диагональную матрицу F'' с диагональными элементами, равными корням многочлена $\det(tE - F')$. Таким образом, матрица F'' в базисе $\boldsymbol{e}''$ совпадает с матрицей F' в базисе $\boldsymbol{e}'$. Проективный изоморфизм $\mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n$, переводящий базис $\boldsymbol{e}'$ в базис $\boldsymbol{e}''$, преобразует базисные квадратичные формы g', f' первого пучка в базисные квадратичные формы g'', f'' второго. Следовательно, он преобразует каждую форму $\lambda g' + \mu f'$ первого пучка в форму $\lambda g'' + \mu f''$ второго. □

Пример 2.11 (простые пучки)
Пучок квадрик на $\mathbb{P}_n$ называется *простым*, если его спектр состоит из $(n+1)$ различных точек на $\mathbb{P}_1$. Таким образом, каждая особая квадрика простого пучка имеет ровно одну особую точку и единичную кратность в спектре. В частности, каждый простой пучок регулярен, и все квадрики в нём одновременно диагонализуются в некотором базисе. Два простых пучка переводятся один в другой проективным преобразованием тогда и только тогда, когда $n+1$ точек на $\mathbb{P}_1$, отвечающих особым квадрикам первого пучка, переводятся дробно линейным автоморфизмом $\mathbb{P}_1$ в $n+1$ точек, отвечающих особым квадрикам второго.

Теорема 2.4
Пучок квадрик (PQ) над алгебраически замкнутым полем прост если и только если его базисные квадрики пересекаются трансверсально, т. е. $\operatorname{codim} T_aP \cap T_aQ = 2$ в каждой точке $a \in P \cap Q$.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве квадрик $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^2V^*)$ на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ гиперповерхность особых квадрик[2] $\Sigma = V(\det) \subset \mathbb{P}_N$. Прямая $(PQ) \subset \mathbb{P}_N$ пересекает гиперповерхность Σ меньше, чем по $n+1$ точкам, если и только если она касается Σ в одной из точек $S \in (PQ) \cap \Sigma$.

[1] Т. е. существует такой линейный проективный автоморфизм $\mathbb{P}_n$, который биективно отображает квадрики одного пучка на квадрики второго.

[2] См. формулу (2-16) на стр. 33.

Нетрансверсальность пересечения квадрик $P = V(f)$ и $Q = V(q)$ в точке $a \in P \cap Q$ означает, что ковекторы $\hat{f}(a)$ и $\hat{q}(a)$ пропорциональны[1]. В этом случае все ковекторы $\hat{h}(a)$ с $\hat{h} = \lambda\hat{p} + \mu\hat{q}$ пропорциональны друг другу, т. е. любые две квадрики из пучка (PQ) пересекаются в точке a не трансверсально, и пучок содержит квадрику $S = V(h)$ с $\hat{h}(a) = \lambda\hat{f}(a) + \mu\hat{q}(a) = 0$, т. е. с $a \in \operatorname{Sing} S$. Тогда $P \cap \operatorname{Sing} S \neq \varnothing$ и прямая (PQ) касается гиперповерхности Σ в точке S по сл. 2.3. Значит, пучок не прост. Наоборот, если прямая (PQ) касается гиперповерхности Σ в точке S, то $P \cap \operatorname{Sing} S \neq \varnothing$ и пересечение $P \cap S$ не трансверсально во всех точках из $P \cap \operatorname{Sing} S$. Но тогда и пересечение $P \cap Q$ тоже не трансверсально в этих же точках в силу сделанного выше замечания. □

[1] При этом один из них (но не оба) может обратится в нуль — это означает, что одна из квадрик особа в точке a.

Упр. 2.2. Для нульмерной квадрики на $\mathbb{P}_1$ утверждение очевидно. Пусть при $n \geqslant 2$ квадрика $Q \subset \mathbb{P}_n$ содержится в гиперплоскости $H \subset \mathbb{P}_n$ и имеет гладкую точку $a \in Q$. Тогда каждая проходящая через a и не содержащаяся в H прямая пересекает Q ровно в одной точке a, т. е. лежит в T_pQ. Поэтому $\mathbb{P}_n = H \cup T_pQ$. Если $H = V(\xi)$, $T_pQ = V(\eta)$ для каких-то ненулевых ковекторов $\xi, \eta \in V^*$, то квадратичная форма $q(v) = \xi(v)\eta(v)$ тождественно зануляется на векторном пространстве V. Но тогда и оба сомножителя ξ, η должны быть нулевыми. Противоречие.

Упр. 2.5. Особая квадрика в $\mathbb{P}_3$ это либо двойная плоскость (квадрика ранга 1), либо пара различных пересекающихся плоскостей (линейное соединение особой прямой с гладкой пустой квадрикой на дополнительной прямой), либо двойная прямая (линейное соединение особой прямой с гладкой пустой квадрикой на дополнительной прямой), либо одна двойная точка (линейное соединение особой точки с гладкой пустой коникой в дополнительной плоскости), либо простой конус (линейное соединение особой точки с гладкой непустой коникой в дополнительной плоскости). Убедитесь, что в последнем случае любая лежащая на квадрике прямая проходит через особую точку.

Упр. 2.7. Всякая прямая, лежащая на Q_s и проходящая через какую-нибудь точку $p \in Q_s$ содержится в плоской конике $Q_s \cap T_pQ_s$, где T_pQ — касательная плоскость к Q в точке p. Эта коника исчерпывается парой проходящих через p прямых из описанных выше двух семейств.

Упр. 2.8. Это вытекает из следующей формулы, справедливой в $\Bbbk[\alpha, \beta]$:

$$\det(\alpha A + \beta B) = \sum_{p=0}^{n} \operatorname{tr}(\Lambda^p A \cdot \Lambda^p B^\vee)\, \alpha^p \beta^{n-p}\,,$$

где $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ — квадратные матрицы размера $n\times n$, а $\Lambda^p A$ и $\Lambda^p B^\vee$ — квадратные матрицы размера $\binom{n}{p} \times \binom{n}{p}$, клетки которых занумерованы возрастающими p-элементными подмножествами $I, J \subset \{1, \dots, n\}$, и в IJ-той клетке у $\Lambda^p A$ находится IJ-тый $p \times p$ минор a_{IJ} матрицы A, а у $\Lambda^p B^\vee$ — алгебраическое дополнение $(-1)^{|I|+|J|} b_{\overline{JI}}$ к JI-му $p \times p$ минору матрицы B. Для доказательства обозначьте через $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ столбцы матриц A и B, рассматриваемые как векторы из координатного пространства $\Bbbk^n$, и вычислите коэффициент при $\alpha^p\beta^{n-p}$ в грассмановом произведении $(\alpha a_1 + \beta b_1) \wedge \ldots \wedge (\alpha a_n + \beta b_n) = \det(\alpha A + \beta B)\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, где $e_1, \dots, e_n$ — стандартный базис в $\Bbbk^n$.

Упр. 2.9. В доказательстве лем. 2.2 на стр. 30 мы видели, что коники, касающиеся прямой ℓ в точке $p \in \ell$, образуют в пространстве коник $\mathbb{P}_5$ подпространство коразмерности 2. Оно пересекается с двумя гиперплоскостями коник, проходящих через точки c, d по крайней мере по прямой. Если бы пересечение имело размерность хотя бы два, то через любые две точки на $\mathbb{P}_2$ проходила бы коника, одновременно содержащая точки c, d и касающаяся прямой ℓ в точке p, что не так: возьмём одну из точек на прямой (cd), а другую — вне $(cd) \cup \ell$. Описание особых коник в этом пучке очевидно.

Упр. 2.10. Условие прохождения через точку задаёт в пространстве коник гиперплоскость. Если никакие три из четырёх точек не коллинеарны, эти гиперплоскости линейно независимы, т. к. через любые три из точек можно провести распавшуюся конику, не проходящую через четвёртую точку. Следовательно, коники проходящие через точки a, b, c, d, никакие три из которых не коллинеарны, образуют пучок. Этот пучок содержит три распавшихся коники, образованные парами противоположных сторон четырёхвершинника $abcd$.

Упр. 2.11. Согласно прим. 2.9 на стр. 33, полярой точки x относительно коники на рис. 2◇6 на стр. 32 является прямая yz. Для её построения достаточно провести через x любые две прямые, пересекающие конику в точках a, b и c, d соответственно, и найти точки $y = (ad) \cap (bc)$ и $z = (ac) \cap (bd)$.

Упр. 2.12. Разложите определитель по i-той строке и продифференцируйте.

Упр. 2.13. Пучок распавшихся коник, являющихся объединением прямой, пробегающей пучок прямых, проходящих через некоторую точку p, и ещё одной прямой, не проходящей через p.