## §3. Аффинная алгебраическая геометрия

**3.1. Порция коммутативной алгебры.** Всюду в этом параграфе слово «кольцо» означает по умолчанию *коммутативное кольцо с единицей*, а гомоморфизмы колец всегда предполагаются отображающими единицу в единицу.

**3.1.1. Образующие иделов.** Любое множество элементов $M \subset A$ коммутативного кольца $A$ порождает в $A$ идеал $(M)$, состоящий из всевозможных конечных сумм

$$g_1 f_1 + g_2 f_2 + \dots + g_m f_m ,$$

в которых $g_\nu \in A$, а $f_\nu \in M$. Как $A$-модуль, идеал $(M)$ представляет собою $A$-линейную оболочку элементов множества $M$. Элементы $f_1, f_2, \dots, f_m$ из какого-либо идеала $I \subset A$ называются *образующими* этого идеала, если $I = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, т. е. $f_1, f_2, \dots, f_m$ линейно порождают $I$ как $A$-модуль. Коммутативное кольцо $A$ называется *нётеровым*, если каждый его идеал допускает конечное множество образующих. Условие нётеровости имеет несколько эквивалентных переформулировок.

Лемма 3.1
Следующие свойства коммутативного кольца $A$ попарно эквивалентны:

(1) любое множество элементов $M \subset A$ содержит некоторое конечное подмножество, порождающее тот же идеал, что и $M$

(2) любой идеал в $A$ допускает конечное множество образующих

(3) для любой бесконечной цепочки вложенных идеалов $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $I_\nu = I_n$ для всех $\nu \geqslant n$.

Доказательство. Ясно, что (1) $\Rightarrow$ (2). Для доказательства импликации (2) $\Rightarrow$ (3) заметим, что объединение $I = \bigcup_\nu I_\nu$ всех идеалов возрастающей цепочки также является идеалом, и стало быть, линейно порождается над $A$ конечным числом элементов $f_1, f_2, \dots, f_m \in I$. Все эти элементы содержатся в некотором идеале $I_n$ из цепочки. Следовательно, $I_\nu = I_n = I$ для всех $\nu \geqslant n$. Чтобы вывести (1) из (3), рассмотрим цепочку идеалов $I_n = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, которая строится по индукции следующим образом: в качестве $f_1$ возьмём произвольный элемент множества $M$. При $i > 1$ и $(M) \neq (f_1, f_2, \dots, f_{i-1})$ в качестве $f_i$ возьмём любой элемент из $M$, не лежащий в $(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})$. Тогда идеалы $I_{i-1} \subsetneq I_i$ будут строго возрастать, что в силу (3) не может продолжаться бесконечно, т. е. на каком-то шагу мы придём к равенству $(M) = (f_1, f_2, \dots, f_i)$. □

Теорема 3.1 (теорема Гильберта о базисе)
Если $A$ нётерово, то кольцо многочленов $A[x]$ также нётерово.

Доказательство. Рассмотрим произвольный идеал $I \subset A[x]$ и обозначим через $L_d \subset A$ множество старших коэффициентов всех многочленов степени $\leqslant d$ из $I$, а через $L_\infty = \bigcup_d L_d$ — множество старших коэффициентов вообще всех многочленов из $I$.

Упражнение 3.1. Убедитесь, что все $L_d$ (включая $L_\infty$) являются идеалами в $A$.

Поскольку кольцо $A$ нётерово, все идеалы $L_d$ конечно порождены. Для каждого $d$ (включая $d = \infty$) обозначим через $f_1^{(d)}, f_2^{(d)}, \dots, f_{m_d}^{(d)} \in A[x]$ многочлены, старшие коэффициенты которых порождают соответствующий идеал $L_d$ в $A$. Пусть наибольшая из степеней многочленов $f_i^{(\infty)}$, старшие коэффициенты которых порождают идеал $L_\infty \subset A$, равна $D \in \mathbb{N}$. Покажем, что идеал $I$ порождается многочленами $f_i^\infty$ и многочленами $f_j^{(d)}$ с $0 \leqslant d < D$.

Произвольный многочлен $g \in I$ сравним по модулю многочленов $f_1^{(\infty)}, f_2^{(\infty)}, \dots, f_{m_\infty}^{(\infty)}$ с многочленом, степень которого строго меньше $D$. В самом деле, поскольку старший коэффициент многочлена $g$ лежит в идеале $L_\infty$, он имеет вид $\sum \lambda_i a_i$, где $\lambda_i \in A$, а $a_i$ — старшие коэффициенты многочленов $f_i^{(\infty)}$. При $\deg g \geqslant D$ все разности $m_i = \deg g - \deg f_i^{(\infty)}$ неотрицательны, и мы можем образовать многочлен $h = g - \sum \lambda_i \cdot f_i(x) \cdot x_i^{m_i}$, сравнимый с $g$ по модулю $I$ и имеющий строго меньшую, чем $g$ степень. Заменим $g$ на $h$ и повторим эту процедуру, пока не получим многочлен $h \equiv g \pmod{(f_1^{(\infty)}, f_2^{(\infty)}, \dots, f_{m_\infty}^{(\infty)})}$ степени $\deg h < D$ . Теперь старший коэффициент многочлена $h$ находится в идеале $L_d$ с $d < D$. Тем же способом вычитая из него подходящие комбинации многочленов $f_j^{(d)}$ с $0 \leqslant d < D$, мы сможем сокращать его старший член и строго уменьшать степень до тех пор, пока не получим нуль. □

Следствие 3.1
Если $A$ нётерово, то $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$ тоже нётерово.

Упражнение 3.2. Покажите, что фактор кольцо нётерова кольца нётерово.

Упражнение 3.3. Заменяя в доказательстве теор. 3.1 старшие члены на младшие, покажите, что кольцо формальных степенных рядов $A[[t]]$ с коэффициентами в нётеровом кольце $A$ тоже нётерово.

Замечание 3.1. Подкольцо нётерова кольца не обязательно является нётеровым. Например, кольцо $\mathbb{C}[[t]]$ нётерово по упр. 3.3, однако, его подкольцо, образованное рядами, сходящимися всюду в $\mathbb{C}$, нётеровым не является.

Упражнение 3.4. Покажите, что идеалы $I_k$, состоящие из аналитических функций $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, обращающихся в нуль на множествах $\mathbb{Z} \smallsetminus \{1, 2, \dots, k\}$, образуют бесконечную цепочку строго увеличивающихся идеалов.

**3.1.2. Целые элементы.** Рассмотрим пару вложенных колец $A \subset B$. Элемент $b \in B$ называется *целым* над $A$, если он удовлетворяет условиям лем. 3.2.

Лемма 3.2
Следующие три свойства элемента $b \in B$ попарно эквивалентны:

(1) $b^m = a_1 b^{m-1} + \dots + a_{m-1} b + a_m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и некоторых $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$

(2) $A$-линейная оболочка всех целых неотрицательных степеней $b^m$ , $m \geqslant 0$ , линейно порождается над $A$ конечным числом элементов

(3) существует конечно порождённый $A$-подмодуль $M \subset B$, такой что $bM \subset M$ и для каждого $b' \in B$ из $b'M = 0$ вытекает, что[1] $b' = 0$.

[1]Последнее условие в (3) иногда называют *B-точностью* подмодуля $M$.

Доказательство. Импликации (1) ⇒ (2) ⇒ (3) очевидны. Покажем, что (3) ⇒ (1). Пусть элементы $e_1, e_2, \dots, e_m$ порождают $M$ над $A$ и $A$-линейный оператор умножения $b : M \to M$, $m \mapsto bm$, имеет в этих образующих матрицу $Y \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(A)$, т. е.

$$(be_1, be_2, \dots, be_m) = (e_1, e_2, \dots, e_m) \cdot Y . \tag{3-1}$$

Матричное тождество $\det X \cdot E = X \cdot X^\vee$, где $X$ — любая квадратная матрица, $X^\vee$ — присоединённая к ней матрица[1], а $E$ — единичная матрица того же размера, показывает, что образ оператора умножения на $\det X$ содержится в линейной оболочке столбцов матрицы $X$. В частности, образ оператора умножения всех элементов модуля $M$ на число $\det(bE - Y) \in B$ лежит в линейной оболочке векторов $(e_1, e_2, \dots, e_m) \cdot (bE - Y)$, которая равна нулю в силу (3-1). Поэтому $\det(bE - Y) \cdot M = 0$, а значит, $\det(bE - Y) = 0$ в силу $B$-точности модуля $M$. Так как элементы матрицы $Y$ лежат в $A$, равенство $\det(bE - Y) = 0$ имеет вид, требуемый в условии (1). □

Определение 3.1
Множество всех элементов $b \in B$, целых над подкольцом $A \subset B$, называется *целым замыканием* $A$ в $B$ и обозначается $\overline{A}_B$. Если $\overline{A}_B = A$, кольцо $A$ называется *целозамкнутым* в $B$. Если $\overline{A}_B = B$, кольцо $B$ называется *целым расширением* кольца $A$ или *целой $A$-алгеброй*.

Предложение 3.1
Целое замыкание $\overline{A}_B \subset B$ любого подкольца $A \subset B$ является подкольцом в $B$. Для любого кольца $C \supset B$ всякий элемент $c \in C$, целый над $\overline{A}_B$, цел и над $A$.

Доказательство. Если элементы $p, q \in B$ таковы, что

$$p^m = x_{m-1}\, p^{m-1} + \dots + x_1\, p + x_0 , \quad q^n = y_{n-1}\, q^{n-1} + \dots + y_1\, q + y_0$$

для некоторых $x_\nu, y_\mu \in A$, то $A$-модуль, порождённый произведениями $p^i q^j$ с $0 \leqslant i < m$, $0 \leqslant j < n$, является $B$-точным (ибо содержит 1) и переходит в себя при умножении и на $p$, и на $q$, а значит, и при умножении на $p + q$ и $pq$. Аналогично, если

$$c^r = z_{r-1}\, c^{r-1} + \dots + z_1\, c + z_0 , \quad z_k^{m_k} = a_{k,m_k-1}\, z^{m_k-1} + \dots + a_{k,1}\, z_k + a_{k,0}$$

где $0 \leqslant k \leqslant (r-1)$ и все $a_{k,\ell} \in A$, то умножение на $c$ сохраняет $B$-точный $A$-подмодуль, порождённый произведениями $c^i z_1^{j_1} z_2^{j_2} \cdots z_r^{j_r}$ с $0 \leqslant i < r$ и $0 \leqslant j_k < m_k$. □

Следствие 3.2 (лемма Гаусса – Кронекера – Дедекинда)
Пусть $A \subset B$ — произвольное расширение коммутативных колец, и $f, g \in B[x]$ — приведённые[2] многочлены положительной степени. Тогда все коэффициенты произведения

$$h(x) = f(x)g(x)$$

целы над $A$ , если и только если все коэффициенты и у $f(x)$, и у $g(x)$ целы над $A$.

[1] Т. е. матрица из алгебраических дополнений к элементам транспонированной матрицы $X^t$.
[2] Т. е. со старшим коэффициентом единица.

Доказательство. Рассмотрим любое кольцо $C \supset B$, над которым $f$ и $g$ полностью разлагаются на линейные множители[1], т. е. в кольце $C[x]$ выполняются равенства

$$f(x) = \prod_{\nu}(x - \alpha_\nu), \quad g(x) = \prod_{\mu}(x - \beta_\mu), \quad h(x) = \prod_{\mu,\nu}(x - \alpha_\nu)(x - \beta_\mu).$$

Целость над $A$ всех коэффициентов многочлена $h$ равносильна тому, что все корни $\alpha_\nu, \beta_\mu \in C$ многочлена $h$ целы над целым замыканием $A$ в $C$, а значит, и над самим $A$. Это, в свою очередь, эквивалентно одновременной целости над $A$ всех коэффициентов как $f$, так и $g$. □

Пример 3.1 ($\mathbb{Z}$ целозамкнуто в $\mathbb{Q}$)
Если для дроби $p/q$ с взаимно простыми $p, q \in \mathbb{Z}$ найдутся такие $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$, что

$$\frac{p^m}{q^m} = a_1 \frac{p^{m-1}}{q^{m-1}} + \dots + a_{m-1}\frac{p}{q} + a_m,$$

то $p^m = a_1 q p^{m-1} + \dots + a_{m-1} q^{m-1} p + a_m q^m$ делится на $q$, что при взаимно простых $p$ и $q$ возможно только если $q = \pm 1$. Таким образом, целое замыкание $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Q}$ есть $\mathbb{Z}$.

Пример 3.2 (целые алгебраические числа)
Пусть $K \supset \mathbb{Q}$ — поле, конечномерное как векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Элементы $z \in K$ называются *алгебраическими числами*. Условие (3) из лем. 3.2 утверждает, что алгебраическое число $\zeta \in K$ является целым над $\mathbb{Z}$, если и только если существует инвариантное относительно умножения на $\zeta$ вектороное подпространство[2] $W \subset K$ и такой базис в нём, что оператор умножения $\zeta : W \to W$, $x \mapsto \zeta x$, записывается в этом базисе целочисленной матрицей. Именно таким образом *целые алгебраические числа* и были впервые определены в XIX веке Дедекиндом. Каждое алгебраическое число $\xi \in K$ можно сделать целым, умножив его на подходящее число из $\mathbb{Z}$. В самом деле, поскольку число $\xi$ алгебраично[3] над $\mathbb{Q}$, найдутся такие $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, что $a_0\xi^n + a_1\xi^{n-1} + \dots + a_{n-1}\xi + a_n = 0$. Тогда число $\zeta = a_0\xi$ удовлетворяет приведённому уравнению

$$\begin{aligned}\zeta^n = a_0^n\xi^n &= -a_0^n a_1 \xi^{n-1} - a_0^n a_2 \xi^{n-2} - \dots - a_0^n a_n = \\ &= -a_0 a_1 \cdot \zeta^{n-1} - a_0^2 a_2 \cdot \zeta^{n-2} - \dots - a_0^n a_n.\end{aligned}$$

В частности, у $K$ существует базис над $\mathbb{Q}$, состоящий из целых алгебраических чисел.

Пример 3.3 (инварианты конечной группы)
Пусть конечная группа $G$ действует на кольце $B$ кольцевыми автоморфизмами

$$g : B \xrightarrow{\sim} B, \quad g \in G.$$

Подкольцо $B^G \overset{\text{def}}{=} \{a \in B \mid ga = a \ \forall g \in G\}$ называется *кольцом инвариантов* действия $G$ на $B$. Если $G$-орбита элемента $b \in B$ состоит из элементов $b_1 = b, b_2, b_3, \dots, b_n$, то элемент $b$ является корнем приведённого многочлена

$$B(t) = \prod(t - b_i) \in B^G[t].$$

Таким образом, $B$ цело над подкольцом инвариантов $B^G \subset B$.

[1]Такое кольцо $C$ можно построить индукцией по $\deg h$. Если $\deg h > 0$, то $B$ вкладывается в фактор кольцо $F = B[x]/(h)$ как подкольцо классов констант. Поскольку класс $\vartheta = x \pmod{h} \in F$ является корнем $h$, то $h(x) = (x - \vartheta) \cdot h_1(x)$ в $F[x]$. По индукции $h_1 = \prod(x - c_\nu)$ над некоторым кольцом $C \supset F \supset B$.

[2]Над полем $\mathbb{Q}$.

[3]Так как $K$ конечномерно над $\mathbb{Q}$.

Предложение 3.2
Пусть кольцо $B$ цело над подкольцом $A \subset B$. Если $B$ — поле, то $A$ также является полем. Наоборот, если $A$ — поле, и в $B$ нет делителей нуля, то $B$ — поле.

Доказательство. Если $B$ — поле, целое над $A$, то обратный элемент $a^{-1} \in B$ к произвольному ненулевому $a \in A$ удовлетворяет уравнению $a^{-m} = \alpha_1 a^{1-m} + \dots + \alpha_{m-1} a^{-1} + \alpha_0$, где все $\alpha_\nu \in A$. Умножая обе части на $a^{m-1}$, получаем $a^{-1} = \alpha_1 + \dots + \alpha_{m-1} a^{m-2} + \alpha_0 a^{m-1} \in A$.

Обратно, если $A$ — поле, и $B$ — целая $A$-алгебра, то все неотрицательные целые степени $b^i$ любого $b \in B$ порождают конечномерное векторное пространство $V$ над $A$. Если $b \neq 0$, и в $B$ нет делителей нуля, то линейный оператор умножения на $b : V \to V$, $x \mapsto bx$, имеет нулевое ядро и, тем самым, биективен. Прообраз $1 \in V$ относительно этого оператора и есть $b^{-1}$. □

Следствие 3.3
Если поле $\mathbb{F}$ является конечномерным векторным пространством над своим подполем $\Bbbk \subset \mathbb{F}$, то все элементы $\mathbb{F}$ алгебраичны над $\Bbbk$, и $\Bbbk$-подалгебра в $\mathbb{F}$, порождённая любым набором элементов $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{F}$, является полем.

**3.1.3. Конечно порождённные $\Bbbk$-алгебры.** Когда кольцо $A = \Bbbk$ является полем, всякое содержащее его кольцо $B \supset \Bbbk$ называется *коммутативной* $\Bbbk$*-алгеброй*. Такая $\Bbbk$-алгебра называется *конечно порождённой*, если она является фактором алгебры многочленов $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, т. е. когда имеется эпиморфизм $\Bbbk$-алгебр $\pi : \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_m] \twoheadrightarrow B$. Элементы $b_i = \pi(x_i) \in B$ называются в этом случае *образующими* алгебры $B$, а ядро $\ker \pi \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_m]$ называется *идеалом соотношений* между ними. Отметим, что по сл. 3.1 и упр. 3.2 все конечно порождённые $\Bbbk$-алгебры нётеровы.

Для каждого элемента $b \in B$ имеется *гомоморфизм вычисления*

$$\mathrm{ev}_b : \Bbbk[x] \to B, \quad f \mapsto f(b), \tag{3-2}$$

образ которого обозначается через $\Bbbk[b] \overset{\text{def}}{=} \operatorname{im} \mathrm{ev}_b$ и представляет собою наименьшую $\Bbbk$-подалгебру в $B$, содержащую 1 и $b$, т. е. множество всех элементов, которые можно получить из $b$ и элементов поля $\Bbbk$ конечным числом сложений и умножений.

Элемент $b$ называется *трансцендентным* над $\Bbbk$, если гомоморфизм вычисления (3-2) инъективен. В этом случае алгебра $\Bbbk[b] \simeq \Bbbk[x]$ не является полем и бесконечномерна как векторное пространство над $\Bbbk$.

Элемент $b$ называется *алгебраическим* над $\Bbbk$, если гомоморфизм вычисления (3-2) имеет ненулевое ядро $\ker(\mathrm{ev}_b) = (\mu_b) \subset \Bbbk[x]$, автоматически[1] являющееся главным идеалом. Его приведённая образующая $\mu_b \in \Bbbk[x]$ называется *минимальным многочленом* элемента $b$ над $\Bbbk$. Она однозначно определяется элементом $b$ как приведённый многочлен наименьшей степени, аннулирующий $b$. Таким образом, алгебраичность элемента $b \in B$ означает, что он цел над подполем $\Bbbk \subset B$. В этом случае подалгебра $\Bbbk[b] \simeq \Bbbk[x]/(\mu_b)$ имеет конечную размерность $\dim_{\Bbbk} \Bbbk[b] = \deg \mu_b$ как векторное пространство над $\Bbbk$, и если в ней нет делителей нуля, то по предл. 3.2 алгебра $\Bbbk[b]$ автоматически является полем.

Теорема 3.2
Конечно порождённая $\Bbbk$-алгебра $B$ может быть полем только при условии, что все её элементы алгебраичны над $\Bbbk$, и в этом случае она конечномерна как векторное пространство над $\Bbbk$.

[1] Поскольку $\Bbbk[x]$ это кольцо главных идеалов.

Доказательство. Пусть алгебра $B$ порождается над $\Bbbk$ элементами $b_1, b_2, \dots, b_m$ и является полем. Доказывать алгебраичность $B$ будем индукцией по $m$. Случай $m = 1$, $B = \Bbbk[b_1]$ уже был разобран выше. Пусть $m > 1$. Если $b_m$ алгебраичен над $\Bbbk$, то $\Bbbk[b_m]$ это поле, и поле $B$ алгебраично над $\Bbbk[b_m]$ по предположению индукции. Тогда по предл. 3.1 поле $B$ алгебраично и над $\Bbbk$. Поскольку $B$ получается последовательным присоединением к $\Bbbk$ конечного числа алгебраических элементов $b_1, b_2, \dots, b_m$, поле $B$ конечномерно как векторное пространство над $\Bbbk$.

Покажем теперь, что элемент $b_m$ не может быть трансцендентен. Допустим противное. Тогда по универсальному свойству поля частных инъективный гомоморфизм вычисления

$$\mathrm{ev}_{b_m} : \Bbbk[x] \to B, \quad f \mapsto f(b_m),$$

продолжается до изоморфизма поля рациональных функций $\Bbbk(x)$ с наименьшим содержащим элемент $b_m$ подполем $\Bbbk(b_m) \subset B$. По предположению индукции поле $B$ алгебраично над $\Bbbk(b_m)$. В частности, каждая из образующих $b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$ поля $B$ как алгебры над $\Bbbk$ удовлетворяет некоторому полиномиальному уравнению с коэффициентами из $\Bbbk(b_m)$. Умножая эти уравнения на подходящие многочлены от $b_m$, сделаем так, чтобы все их коэффициенты лежали в $\Bbbk[b_m]$, а все их старшие коэффициенты стали равны между собою. Обозначим этот общий для всех уравнений старший коэффициент через $p(b_m) \in \Bbbk[b_m]$. Таким образом, поле $B$ цело над подалгеброй $F = \Bbbk[b_m, 1/p(b_m)] \subset B$, порождённой над $\Bbbk$ элементами $b_m$ и $1/p(b_m)$. По предл. 3.2 эта подалгебра $F$ является полем. В частности, элемент $1 + p(b_m)$ обратим в $F$, т. е. существует такой многочлен $g \in \Bbbk[x_1, x_2]$, что $g(b_m, 1/p(b_m)) \cdot (1 + p(b_m)) = 1$. Записывая рациональную функцию $g(x, 1/p(x))$ в виде $h(x)/p^k(x)$, где $h \in \Bbbk[x]$ не делится на $p$, и умножая обе части предыдущего равенства на $p^k(b_m)$, мы получаем на $b_m$ полиномиальное уравнение $h(b_m) \cdot (p(b_m) + 1) = p^{k+1}(b_m)$. Оно нетривиально, поскольку $h(x)(1 + p(x))$ не делится на $p(x)$ в $\Bbbk[x]$. Тем самым, $b_m$ не трансцендентен. Противоречие. □

**3.1.4. Базисы трансцендентности.** Пусть $\Bbbk$-алгебра $A$ не имеет делителей нуля. Обозначим через $Q_A$ её поле частных. С каждым набором элементов $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ связан гомоморфизм вычисления

$$\mathrm{ev}_{a_1, a_2, \dots, a_m} : \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_m] \to A, \quad f \mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_m), \tag{3-3}$$

образ которого обозначается через $\Bbbk[a_1, a_2, \dots, a_m] \subset A$ и состоит из всех элементов, что можно получить из $a_1, a_2, \dots, a_m$ и элементов поля $\Bbbk$ при помощи конечного числа сложений и умножений. Это наименьшая по включению $\Bbbk$-подалгебра в $A$, содержащая поле $\Bbbk$ и все элементы $a_i$. Через $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m) \subset Q_A$ мы обозначим наименьшее подполе, содержащее поле $\Bbbk$ и заданные элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$.

Упражнение 3.5. Покажите, что $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m) \simeq Q_{\Bbbk[a_1, a_2, \dots, a_m]}$.

Элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ называются *алгебраически независимыми* над $\Bbbk$, если между ними нет никаких полиномиальных соотношений вида $f(a_1, a_2, \dots, a_m) = 0$, где $f \in A[x_1, x_2, \dots, x_m]$, т. е. гомоморфизм вычисления (3-3) инъективен. В этом случае вложение (3-3) продолжается до изоморфизма полей $\Bbbk(x_1, x_2, \dots, x_m) \xrightarrow{\sim} \Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m) \subset Q_A$, переводящего рациональную функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ в её значение $f(a_1, a_2, \dots, a_m)$ на элементах $a_i$.

Элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ называются *алгебраически порождающими* $Q_A$, если поле $Q_A$ алгебраично[1] над подполем $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m) \subset Q_A$.

Упражнение 3.6. Убедитесь, что если все элементы $a \in A \subset Q_A$ алгебраичны над полем $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m) \subset Q_A$, то элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ алгебраически порождают $Q_A$.

[1] Или, что то же самое, цело.

Алгебраически независимый набор элементов $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$, алгебраически порождающий $Q_A$, называется *базисом трансцендентности* алгебры $A$ над $\Bbbk$. Любое собственное подмножество базиса трансцендентности алгебраически независимо, однако, не является базисом трансцендентности. Поэтому базис трансцендентности можно иначе определить либо как минимальный по включению набор $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$, алгебраически порождающий $Q_A$, либо как максимальный по включению алгебраически независимый набор $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$.

Лемма 3.3 (лемма о замене)
Если $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ алгебраически порождают $Q_A$, а $u_1, u_2, \dots, u_k \in A$ алгебраически независимы, то $m \geqslant k$ и $a_i$ можно перенумеровать так, что набор элементов

$$u_1, u_2, \dots, u_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \dots\ ,\ a_m$$

(полученный заменой первых $k$ элементов $a_i$ на элементы $u_i$) также будет алгебраически порождать $Q_A$.

Доказательство. Так как элемент $u_1$ алгебраичен над $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m)$ имеется полиномиальное соотношение $f(u_1,\ a_1, a_2, \dots, a_m) = 0$, в которое входит $u_1$. Поскольку $u_1$ трансцендентен над $\Bbbk$, в это соотношение входит и какой-нибудь из элементов $a_i$. Перенумеруем их так, чтобы это был $a_1$. Тогда $a_1$ алгебраичен над $\Bbbk(u_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ ,\ a_m)$, и значит, $u_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ ,\ a_m$ алгебраически порождают $Q_A$. Далее действуем по индукции. Пусть для очередного $i$ в пределах $1 \leqslant i < k$ элементы $u_1, u_2, \dots, u_i,\ a_{i+1},\ a_{i+2},\ \dots\ ,\ a_m$ алгебраически порождают $Q_A$. Так как $u_{i+1}$ алгебраичен над $\Bbbk(u_1,\ \dots\ ,\ u_i,\ a_{i+1}, ,\ \dots\ ,\ a_m)$, имеется полиномиальное соотношение $f(u_1, u_2, \dots, u_{i+1},\ a_{i+1},\ a_{i+2},\ \dots\ ,\ a_m) = 0$, содержащее $u_{i+1}$. Поскольку $u_1, u_2, \dots, u_k$ алгебраически независимы, в этом соотношении присутствует и какой-нибудь $a_j$. Тем самым, $m > i$, и мы можем занумеровать оставшиеся $a_j$ так, что $a_{i+1}$ будет алгебраичен над

$$\Bbbk(u_1, u_2, \dots, u_{i+1}\,, a_{i+2},\ a_{i+3},\ \dots\ ,\ a_m)\,.$$

Следовательно $u_1, u_2, \dots, u_{i+1}\,, a_{i+2},\ a_{i+3},\ \dots\ ,\ a_m$ алгебраически порождают $Q_A$, что воспроизводит индуктивное предположение. ☐

Следствие 3.4
В конечно порождённой $\Bbbk$-алгебре $A$ без делителей нуля любой набор элементов, алгебраически порождающий $Q_A$, содержит в себе некоторый базис трансцендентности для $A$, а любой набор алгебраически независимых элементов можно дополнить до базиса трансцендентности, причём все базисы трансцендентности состоят из одинакового числа элементов. ☐

Определение 3.2 (степень трансцендентности)
Число элементов в базисе трансцендентности конечно порождённой $\Bbbk$-алгебры $A$ называется *степенью трансцендентности* алгебры $A$ над $\Bbbk$ и обозначается $\operatorname{tr}\deg_{\Bbbk} A$

Упражнение 3.7. Покажите, что следующие условия на конечно порождённую $\Bbbk$-алгебру $A$ без делителей нуля эквивалентны друг другу: а) $\operatorname{tr}\deg A = 0$ б) $A = Q_A$ в) $A$ — поле г) $\dim_{\Bbbk} A < \infty$ .

**3.1.5. Нормальность.** Коммутативное кольцо $A$ без делителей нуля называется *нормальным*, если оно целозамкнуто в своём поле частных $Q_A$. Отметим, что любое поле нормально. Дословно также, как в прим. 3.1, устанавливается, что любое факториальное[1] кольцо $A$ нормально.

Упражнение 3.8. Убедитесь, что приведённый многочлен $t^m + a_1 t^{m-1} + \dots + a_{m-1} t + a_m$ с коэффициентами в факториальном кольце $A$ не может аннулировать дробь $p/q \in Q_A$ с необратимым знаменателем $q$ и н.о.д.$(p, q) = 1$.

Прямо из определений и сл. 3.2 вытекают следующие полезные свойства, отчасти проясняющие эпитет «нормальный».

Предложение 3.3 (лемма Гаусса – 2)
Пусть $A$ — нормальное кольцо с полем частных $Q_A$. Если многочлен $f \in A[x]$ раскладывается в $Q_A[x]$ в произведение приведённых множителей, то эти множители лежат в $A[x]$. □

Следствие 3.5
Пусть $A$ — нормальное кольцо с полем частных $Q_A$, и $B$ — произвольная $Q_A$-алгебра. Если элемент $b \in B$ цел над $A$, то его минимальный многочлен над полем $Q_A$ лежит в $A[x]$.

Доказательство. Поскольку элемент $b$ цел над $A$, он является корнем приведённого многочлена $f \in A[x]$. Тогда $f = \mu_b \cdot q$ в кольце $Q_A[x]$. По предл. 3.3 все коэффициенты $\mu_b$ лежат в $A$. □

**3.1.6. Системы полиномиальных уравнений.** Любая система полиномиальных уравнений

$$f_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0\,, \quad f_\nu \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]\,, \tag{3-4}$$

эквивалентна системе, левые части которой образуют в $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ идеал $J = (f_\nu)$, порождённый многочленами $f_\nu$. Эта большая система получается добавлением к уравнениям (3-4) всех уравнений, которые можно получить умножая уравнения (3-4) на произвольные полиномы и складывая их друг с другом. В силу нётеровости кольца многочленов такая большая система, в свою очередь, эквивалентна конечной системе уравнений, левые части которых порождают идеал $J$, причём этот конечный набор уравнений может быть выбран из уравнений первоначальной системы (3-4). Таким образом, любая (в том числе бесконечная) система полиномиальных уравнений равносильна, с одной стороны, некоторой своей конечной подсистеме, а с другой стороны, системе, левые части которой образуют в кольце многочленов идеал.

Множество $V(J) \overset{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{A}^n \mid f(a) = 0 \quad \forall f \in J\ \}$ всех решений системы (3-4), левые части $f_\nu$ которой пробегают идеал $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, называется *аффинным алгебраическим многообразием*, задаваемым идеалом $J$. Отметим, что это множество может оказаться пустым: например, когда $J = (1) = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ содержит уравнение $1 = 0$.

Для произвольной фигуры $\Phi \subset \mathbb{A}^n$ множество всех многочленов, тождественно зануляющихся на $\Phi$, образует в кольце многочленов идеал, который обозначается

$$I(\Phi) = \{\, f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f(p) = 0 \ \ \forall p \in \Phi \,\}\,.$$

[1]Напомню, что кольцо $A$ называется *факториальным*, если в нём нет делителей нуля, и каждый необратимый элемент $a \in A$ является произведением конечного числа неприводимых, причём для любых двух разложений $a = p_1 p_2 \cdots p_n = q_1 q_2 \cdots q_m$ в произведение неприводимых множителей выполняются равенства $m = n$ и (после надлежащей перенумерации) $p_i = s_i q_i$ для некоторых обратимых $s_i \in A$. Например, факториальными являются любое кольцо главных идеалов и кольца многочленов $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ над факториальными кольцами $K$.

Множество нулей $V(I(\Phi))$ этого идеала это наименьшее аффинное алгебраическое многообразие, содержащее $\Phi$.

Для любого идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ имеется тавтологическое включение $J \subset I(V(J))$. Вообще говоря, это включение строгое. Например, при $n = 1$ для идеала $J = (x^2)$ многообразие $V(J) = \{0\}$, а идеал $I(V(J)) = (x) \supsetneq (x^2) = J$.

Теорема 3.3 (Nullstellensatz, или теорема Гильберта о нулях)
Для любого идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ над произвольным алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ справедливы следующие утверждения

(1) *слабая теорема о нулях*: $V(J) = \varnothing \iff 1 \in J$ ;

(2) *сильная теорема о нулях*: $f \in I(V(J)) \iff f^m \in J$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ .

Доказательство. Чтобы доказать первое утверждение, достаточно для каждого собственного[1] идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ указать точку $p \in \mathbb{A}^n$, в которой зануляются все многочлены из $J$. Поскольку увеличение идеала $J$ только усложняет эту задачу, мы без ограничения общности можем считать, что идеал $J$ *максимален*, т. е. любой многочлен $g \notin J$ обратим по модулю $J$. Действительно, если существует необратимый по модулю $J$ многочлен $g \notin J$, то уравнение $gh + f = 1$ неразрешимо относительно $h \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ и $f \in J$, а значит, идеал $J' = (J, g)$ не содержит 1, т. е. является собственным идеалом, строго большим, чем $J$, так что мы можем расширить $J$ до $J' \supsetneq J$. В силу нётеровости кольца многочленов после конечного числа таких расширений мы получим собственный идеал $J$, такой что $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/J$ является полем, что мы и будем далее предполагать.

Так как поле $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/J \supset \Bbbk$ конечно порождено как $\Bbbk$-алгебра, каждый элемент $\vartheta$ этого поля по теор. 3.2 алгебраичен над $\Bbbk$, т. е. является корнем некоторого неприводимого приведённого многочлена из $\Bbbk[x]$. Поскольку для алгебраически замкнутого поля $\Bbbk$ все такие многочлены линейны, $\vartheta \in \Bbbk$. Таким образом, $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/J = \Bbbk$, т. е. любой многочлен $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ сравним по модулю идеала $J$ с некоторой константой. Рассмотрим точку $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{A}^n$, координата $p_i \in \Bbbk$ которой это константа, сравнимая по модулю $J$ с одночленом $x_i$. Тогда произвольный многочлен $f(x) \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ сравним по модулю $J$ с константой $f(p) \in \Bbbk$. Тем самым, $f(p) = 0$ для всех $f \in J$, что и требовалось.

Докажем теперь второе утверждение. Поскольку при $J = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ и $V(J) = \varnothing$ оно тривиально, мы будем считать, что $V(J) \neq \varnothing$ и $J \neq (1)$. Вложим $\mathbb{A}^n$ в большее пространство $\mathbb{A}^{n+1}$ с координатами $(t,\ x_1, x_2, \dots, x_n)$ в качестве гиперплоскости $t = 0$. Если многочлен

$$f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \subset \Bbbk[t,\ x_1, x_2, \dots, x_n]$$

тождественно обращается в нуль на $V(J)$, то идеал $J' \subset \Bbbk[t,\ x_1, x_2, \dots, x_n]$, порождённый $J$ и многочленом $g(t, x) = 1 - t\, f(x)$, имеет пустое множество нулей в $\mathbb{A}^{n+1}$, поскольку $g(x, t) \equiv 1$ вдоль цилиндра $V(J) \subset \mathbb{A}^{n+1}$. Тем самым, по слабой теореме о нулях, идеал $J'$ содержит единицу, т. е. существуют $q_0, q_1, \dots, q_s \in \Bbbk[t,\ x_1, x_2, \dots, x_n]$ и $f_1, f_2, \dots, f_s \in J$, такие что

$$q_0(x, t) \cdot \big(1 - tf(x)\big) + q_1(t, x) \cdot f_1(x) + \dots + q_s(x, t) \cdot f_s(x) = 1\,.$$

[1] Т. е. отличного от всего кольца многочленов

Применим к этому равенству гомоморфизм $\Bbbk[t,\, x_1, x_2, \dots , x_n] \to \Bbbk(x_1, x_2, \dots , x_n)$, заданный правилами $t \mapsto 1/f(x)\,, \quad x_\nu \mapsto x_\nu$ . Получим равенство

$$q_1\big(1/f(x)\,,\,x\big)\cdot f_1(x) + \dots + q_s\big(1/f(x)\,,\,x\big)\cdot f_s(x) = 1$$

в поле рациональных функций $\Bbbk(x_1, x_2, \dots , x_n)$. Так как идеал $J$ не содержит единицы, среди рациональных функций $q_\nu\big(1/f(x), x\big)$ есть функции с нетривиальными знаменателями, причём все их можно сократить умножением на некоторую степень $f^m$. После умножения обеих частей равенства на эту степень получаем искомое выражение $f^m(x) = \tilde q_1(x)\cdot f_1(x) + \dots + \tilde q_s(x)\cdot f_s(x)$ с $\tilde q_\nu \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots , x_n]$. □

**3.1.7. Системы результантов.** Рассмотрим систему полиномиальных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_0, x_1, \dots , x_n) = 0 \\ f_2(x_0, x_1, \dots , x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_0, x_1, \dots , x_n) = 0 \end{cases} \tag{3-5}$$

в которой многочлены $f_1, f_2, \dots , f_m \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots , x_n]$ однородны и имеют степени $d_i = \deg f_i$. Множество ненулевых решений системы (3-5) в проективном пространстве $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \ \dots \ : x_n)$ представляет собою пересечение $m$ проективных гиперповерхностей $S_i = V(f_i) \subset \mathbb{P}(V)$. Фигура

$$\mathcal{R}(n;\, d_1, d_2, \dots , d_m) \subset \mathbb{P}(S^{d_1}V^*) \times \mathbb{P}(S^{d_2}V^*) \times \dots \times \mathbb{P}(S^{d_m}V^*)\,, \tag{3-6}$$

образованная всеми наборами гиперповерхностей

$$(S_1, S_2, \dots , S_m) \in \mathbb{P}(S^{d_1}V^*) \times \mathbb{P}(S^{d_2}V^*) \times \dots \times \mathbb{P}(S^{d_m}V^*)$$

с непустым пересечением $\bigcap\limits_i S_i \neq \varnothing$, называется *результантным многообразием* системы (3-5).

Например, если число уравнений равно числу переменных и все $d_i = 1$, система (3-5) превращается в систему однородных линейных уравнений с квадратной матрицей

$$\begin{cases} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \dots + a_{0n}x_n = 0 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

которая имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\det\left(a_{ij}\right) = 0$. Таким образом, при $m = (n+1)$ и $d_1 = d_2 = \dots = d_{n+1} = 1$ результантное многообразие

$$\mathcal{R}(n;\, 1,\, 1,\, \dots\,,\, 1) = V\left(\det(a_{ij})\right) \subset \mathbb{P}_n^* \times \mathbb{P}_n^* \times \dots \times \mathbb{P}_n^*$$

представляет собою гиперповерхность, заданную одним неприводимым полиномиальным уравнением степени $(n+1)$ на коэффициенты $a_{i,j}$ многочленов $f_1, f_2, \dots , f_{n+1}$.

Покажем, что и в общем случае результантное многообразие (3-6) является *алгебраическим*, т. е. задаётся конечной системой полиномиальных уравнений на коэффициенты многочленов $f_\nu$, однородных по коэффициентам каждого из многочленов и зависящих только от $n$, $m$ и $d_1, d_2, \dots, d_m$. Для этого рассмотрим идеал $I \subset \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$, порождённый многочленами $f_\nu$. Отсутствие у системы (3-5) ненулевых решений означает, что аффинное алгебраическое многообразие $V(I) \subset \mathbb{A}(V)$ либо пусто, либо совпадает с началом координат. В обоих случаях каждая из координатных функций $x_i$ тождественно зануляется на $V(I)$, и значит, существует $m$, такое что $x_i^m \in I$ для всех $i$. Наоборот, если $I$ содержит некоторую степень каждой из переменных, то система уравнений с левыми частями из идеала $I$ содержит уравнения $x_0^m = x_1^m = \dots = x_n^m = 0$, имеющие только нулевое решение. Таким образом, отсутствие ненулевых решений у системы (3-5) равносильно тому, что идеал $I$ содержит все мономы $x_i^m$ для некоторого $m$, а значит, и любой многочлен, степень которого больше $(n+1)(m-1)$, т. е.

$$S^d V^* \subset I \text{ при всех } d \gg 0\,. \tag{3-7}$$

Для каждого $d \in \mathbb{N}$ пересечение $I \cap S^d V^*$ является образом линейного отображения

$$\begin{gathered} \mu_d : S^{d-d_1}V^* \oplus S^{d-d_2}V^* \oplus \dots \oplus S^{d-d_m}V^* \to S^d V^*\,, \\ (g_0, g_1, \dots, g_n) \mapsto \sum g_\nu f_\nu\,. \end{gathered} \tag{3-8}$$

В стандартных базисах из мономов это отображение задаётся матрицей, элементы которой линейно зависят от коэффициентов многочленов $f_\nu$. При $d \gg 0$ размерность левого пространства в (3-8) ведёт себя как $\sum_\nu \binom{n+d-d_\nu}{n} \sim \frac{m}{n!}\,d^n$ и становится больше, чем размерность правого, которая ведёт себя как $\binom{n+d}{n} \sim \frac{1}{n!}\,d^n$. Поэтому невыполнение условия (3-7) равносильна тому, что при всех $d$, для которых размерность левого пространства (3-8) больше, чем размерность правого, все максимальные миноры матрицы $\mu_d$ зануляются. В силу нётеровости кольца многочленов, эта бесконечная система полиномиальных уравнений эквивалентна некоторой конечной подсистеме, которую и называют *системой результантов*.

**3.2. Аффинный алгебро-геометрический словарик.** Всюду далее мы по умолчанию считаем, что основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Аффинные алгебраические многообразия, определённые над полем $\Bbbk$, образуют категорию $\mathcal{A}\mathit{ff}_\Bbbk$, морфизмами в которой являются *регулярные отображения*. По определению, отображение множеств $\varphi : X \to Y$ из аффинного алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ в аффинное алгебраическое многообразие $Y \subset \mathbb{A}^m$ называется *регулярным*[1], если оно переводит точку $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ в точку $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in Y$, координаты которой $y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ являются многочленами от координат точки $x$, т. е. $\varphi_i \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ для всех $i$. В частности, функция $f : X \to \Bbbk$ называется *регулярной*, если она является ограничением на $X$ некоторого многочлена $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Регулярные функции на $X$ образуют конечно порождённую приведённую[2] $\Bbbk$-алгебру, которая обозначается

$$\Bbbk[X] \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}\mathit{ff}_\Bbbk}(X, \Bbbk) \simeq \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)\,, \tag{3-9}$$

[1] Или *полиномиальным*.

[2] Напомню, что ненулевой элемент $a$ в кольце называется *нильпотентом*, если $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Кольцо называется *приведённым*, если в нём нет ненулевых нильпотентных элементов. Поскольку любая степень ненулевой функции со значениями в поле также является ненулевой функцией, в алгебре регулярных функций на аффинном алгебраическом многообразии нет нильпотентов.

где $I(X) = \{f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f|_X \equiv 0\}$, как и выше, обозначает идеал всех многочленов, тождественно зануляющихся на $X$. Алгебры и кольца без нильпотентов называются *приведёнными*.

Лемма 3.4
Всякая конечно порождённая приведённая алгебра $A$ над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ является координатной алгеброй $A = \Bbbk[X]$ некоторого аффинного алгебраического многообразия $X$.

Доказательство. Зададим алгебру $A$ образующими и соотношениями, т. е. представим её в виде фактор алгебры $A = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$. Приведённость алгебры $A$ означает, что идеал соотношений $I$ *радикален*, т. е. $f^n \in I \Rightarrow f \in I$ для всех $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Так как $I = \sqrt{I}$, по сильной теореме о нулях $I = I(V(I))$ является идеалом аффинного алгебраического многообразия $X = V(I) \subset \mathbb{A}^n$. □

**3.2.1. Гомоморфизм поднятия.** Со всяким отображением множеств $\varphi : X \to Y$ связан *гомоморфизм поднятия*, который действует из алгебры $\Bbbk^Y$ *всех* функций на $Y$ со значениями в $\Bbbk$ в алгебру $\Bbbk^X$ *всех* функций $X$ со значениями в $\Bbbk$ и переводит функцию $f : Y \to \Bbbk$ в её композицию с отображением $\varphi$:

$$\varphi^* : \Bbbk^Y \to \Bbbk^X, \quad f \mapsto f \circ \varphi. \tag{3-10}$$

Если $X \subset \mathbb{A}^n$ и $Y \subset \mathbb{A}^m$ являются алгебраическими многообразиями, а отображение $\varphi : X \to Y$ действует на координаты точек по правилу

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

то его гомоморфизм поднятия переводит каждую образующую $y_i \pmod{I(Y)}$ координатной алгебры $\Bbbk[Y]$ в функцию $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)|_X : X \to \Bbbk$. Таким образом, регулярность теоретико множественного отображения $\varphi : X \to Y$ равносильна тому, что гомоморфизм поднятия $\varphi^* : \Bbbk^Y \to \Bbbk^X$ переводит подалгебру регулярных функций $\Bbbk[Y] \subset \Bbbk^Y$ в подалгебру регулярных функций $\Bbbk[X] \subset \Bbbk^X$, т. е. корректно задаёт гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$. Точно такая же характеризация регулярных отображений имеется и для других, не связанных с алгебраической геометрией геометрических структур.

Упражнение 3.9. Проверьте, что теоретико множественное отображение топологических пространств (соотв. гладких или аналитических многообразий) $X \to Y$ является непрерывным (соотв. гладким или аналитическим) тогда и только тогда, когда его гомоморфизм поднятия переводит подалгебру непрерывных функций $C^0(Y) \subset \mathbb{R}^Y$ (соотв. подалгебру гладких или аналитических функций на $Y$) в подалгебру непрерывных функций $C^0(X)$ (соотв. в подалгебру гладких или аналитических функций на $X$).

Обратите внимание, что вложение $\varphi(X) \subset Y$ влечёт вложение идеалов $\varphi^*\big(I(Y)\big) \subset I(X)$. Поэтому гомоморфизм алгебр многочленов

$$\Bbbk[y_1, y_2, \dots, y_m] \to \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n], \quad y_i \mapsto \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

автоматически корректно факторизуется до гомоморфизма координатных алгебр

$$\Bbbk[Y] = \Bbbk[y_1, y_2, \dots, y_m]/I(Y) \to \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X) = \Bbbk[X].$$

**3.2.2. Максимальный спектр.** С каждой точкой $p \in X$ аффинного алгебраического многообразия $X$ связан *гомоморфизм вычисления*[1] $\mathrm{ev}_p : \Bbbk[X] \to \Bbbk$, $f \mapsto f(p)$. Он эпиморфен, поскольку переводит единицу в единицу, и значит, является гомоморфизмом факторизации по модулю своего ядра

$$\mathfrak{m}_p \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ker \mathrm{ev}_p = I(\{p\}) = \{f \in \Bbbk[X] \mid f(p) = 0\}, \tag{3-11}$$

которое является максимальным идеалом в $\Bbbk[X]$, так как фактор $\Bbbk[X]/\mathfrak{m}_p \simeq \Bbbk$ это поле. Идеал (3-11) называется *максимальным идеалом точки* $p \in X$. Таким образом, значение каждого многочлена $f \in \Bbbk[X]$ в точке $p \in X$ совпадает с классом $f \pmod{\mathfrak{m}_p} \in \Bbbk[X]/\mathfrak{m}_p \simeq \Bbbk$.

Множество всех максимальных идеалов произвольной $\Bbbk$-алгебры $A$ называется её *максимальным спектром* и обозначается $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}(A)$. Каждой точке спектра $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$ отвечает гомоморфизм факторизации $\pi_{\mathfrak{m}} : A \to A/\mathfrak{m}$, $a \mapsto a \pmod{\mathfrak{m}}$, принимающий значения в поле $A/\mathfrak{m} \supset \Bbbk$, конечном порождённом как алгебра над $\Bbbk$. По теор. 3.2 на стр. 49 такое поле является конечным алгебраическим расширением поля $\Bbbk$, а значит, совпадает с $\Bbbk$, коль скоро поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Это позволяет интерпретировать элементы произвольной алгебры $A$ как функции на $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$ со значениями в поле $\Bbbk$.

Лемма 3.5
Для любого аффинного алгебраического многообразия $X$ над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ соответствия $p \longleftrightarrow \mathrm{ev}_p \longleftrightarrow \mathfrak{m}_p = \ker(\mathrm{ev}_p)$ устанавливают биекции между точками многообразия $X$, гомоморфизмами $\Bbbk$-алгебр $\Bbbk[X] \to \Bbbk$, и максимальными идеалами алгебры $\Bbbk[X]$.

Доказательство. Биективность второго соответствия мы уже проверили выше[2]. Сопоставление точке $p \in X \subset \mathbb{A}^n$ её максимального идеала $\mathfrak{m}_p = \ker \mathrm{ev}_p$ вкладывает множество точек в множество максимальных идеалов, поскольку для $p \neq q$ всегда можно указать аффинно линейную функцию $f : \mathbb{A}^n \to \Bbbk$ зануляющуюся в $p$ и отличную от нуля в $q$. Чтобы показать, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ любой максимальный идеал

$$\mathfrak{m} \subset \Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$$

имеет вид $\mathfrak{m}_p = \ker \mathrm{ev}_p$ для некоторой точки $p \in X$, обозначим через $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ полный прообраз идеала $\mathfrak{m}$ относительно отображения факторизации $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \twoheadrightarrow \Bbbk[X]$. Так как $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/\widetilde{\mathfrak{m}} = \Bbbk[X]/\mathfrak{m} = \Bbbk$, идеал $\widetilde{\mathfrak{m}}$ является собственным, максимальным и содержит $I(X)$. По слабой теореме о нулях все многочлены $f \in \widetilde{\mathfrak{m}}$ обращаются в нуль в некоторой точке $p \in \mathbb{A}^n$, лежащей на многообразии $X$, поскольку $I(X) \subset \widetilde{\mathfrak{m}}$. Следовательно, $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_p$, что в силу максимальности идеала $\mathfrak{m}$ означает равенство $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p$. □

Соглашение 3.1. Всюду далее обозначение $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$ используется как для множества гомоморфизмов $\Bbbk$-алгебр $A \to \Bbbk$, так и для множества максимальных идеалов в $A$, поскольку любой гомоморфизм факторизации $A \to \Bbbk$ однозначно задаётся своим ядром $\mathfrak{m} \subset A$.

[1] Это специальный случай гомоморфизма поднятия, отвечающий вложению $p \hookrightarrow X$ одноточечного множества $p$ в многообразие $X$.

[2] Отметим, что сопоставление $\varphi \mapsto \ker \varphi$ инъективно вкладывает множество гомоморфизмов $\Bbbk$-алгебр $\varphi : A \to \Bbbk$ в множество максимальных идеалов алгебры $A$ над любым, не обязательно алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$. Однако, над незамкнутым полем $\Bbbk$ не все максимальные идеалы являются ядрами гомоморфизмов вычисления со значениями в самом поле $\Bbbk$. Например, ядро гомоморфизма вычисления $\mathrm{ev}_{\sqrt{-1}} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f\left(\sqrt{-1}\right)$, является максимальным идеалом $\mathbb{R}$-алгебры $\mathbb{R}[x]$, но его нельзя реализовать как ядро вычисления $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, поскольку $\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} \ker \mathrm{ev}_{\sqrt{-1}} = 2$.

Пример 3.4 ($\mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \simeq \mathbb{A}^n = \mathbb{A}(\Bbbk^n)$)
Каждый гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\varphi : \mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \to \Bbbk$ однозначно определяется набором чисел $p_i = \varphi(x_i) \in \Bbbk$, образов свободных образующих полиномиальной алгебры. Сопоставление $\varphi \mapsto (p_1, p_2, \dots, p_n)$ устанавливает биекцию между такими гомоморфизмами и точками аффинного координатного пространства $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(\Bbbk^n)$. Ядро гомоморфизма

$$\mathrm{ev}_p : \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \to \Bbbk$$

порождается линейными двучленами $x_i - p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

**3.2.3. Нильрадикал и радикал Джекобсона.** Для произвольного коммутативного кольца $A$ радикал нулевого идеала[1] в $A$ называется *нильрадикалом* кольца $A$ и обозначается $\mathfrak{n}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{0} = \{a \in A \mid a^n = 0$ для некоторго $n \in \mathbb{N}\}$. Пересечение всех максимальных идеалов кольца $A$ называется *радикалом Джекобсона* и обозначается $\mathfrak{r}(A)$.

Упражнение 3.10. Убедитесь, что $\mathfrak{n}(A)$ является идеалом в $A$.

Предложение 3.4
Для любой конечно порождённой алгебры $A$ над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ ядро гомоморфизма $A \to \Bbbk^{\mathrm{Spec_m} A}$, сопоставляющего каждому элементу $a \in A$ функцию $a : \mathrm{Spec_m} A \to \Bbbk$, $\mathfrak{m} \mapsto a \pmod{\mathfrak{m}} \in A/\mathfrak{m} = \Bbbk$, совпадает с нильрадикалом алгебры $A$, т. е. $\mathfrak{n}(A) = \mathfrak{r}(A)$.

Доказательство. Поскольку для любого $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec_m} A$ фактор алгебра $A/\mathfrak{m}$ является полем и не содержит ненулевых нильпотентов, каждый нильпотентный элемент кольца задаёт нулевую функцию на спектре, ибо аннулируется всеми гомоморфизмами вычисления $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m}$. Тем самым, $\mathfrak{n}(A) \subset \mathfrak{r}(A)$. Чтобы доказать обратное включение, рассмотрим приведённую конечно порождённую $\Bbbk$-алгебру $A_{\mathrm{red}} \stackrel{\text{def}}{=} A/\mathfrak{n}(A)$ и существующее по лем. 3.4 на стр. 56 алгебраическое многообразие $X \subset \mathbb{A}^n$ с координатной алгеброй $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X) \simeq A_{\mathrm{red}}$. Если $a \in \mathfrak{r}(A)$, то класс элемента $a$ в $A_{\mathrm{red}}$ лежит в $\mathfrak{r}(A_{\mathrm{red}})$. Поэтому $a(p) = 0$ для всех точек $p \in X$, т. е. $a = 0$ в $\Bbbk[X] = A_{\mathrm{red}}$. Следовательно, $a \in \mathfrak{n}(A)$. □

Упражнение 3.11. Покажите, что для произвольного коммутативного кольца $A$ с единицей нильрадикал $\mathfrak{n}(A)$ совпадает с пересечением всех простых[2] идеалов кольца $A$.

**3.2.4. Эквивалентность категорий.** Обозначим через $\mathcal{A\ell g}_\Bbbk$ категорию конечно порождённых приведённых алгебр с единицей над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$. Сопоставление аффинному алгебраическому многообразию $X$ его координатной алгебры $\Bbbk[X]$, а регулярному морфизму аффинных многообразий $\varphi : X \to Y$ гомоморфизма поднятия $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ задаёт контравариантный функтор[3]

$$h_{\mathbb{A}^1} : \mathcal{A}ff_\Bbbk^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{A\ell g}_\Bbbk, \quad X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}ff_\Bbbk}(X, \mathbb{A}^1) = \Bbbk[X], \tag{3-12}$$

из категории аффинных алгебраических многообразий над полем $\Bbbk$ в категорию конечно порождённых приведённых $\Bbbk$-алгебр с единицей. Проверим, что этот функтор является оборачивающей стрелки эквивалентностью категорий, т. е.*по-существу сюрьективнен* и *вполне строг*[4].

---

[1] Т. е. множество всех нильпотентных элементов кольца, включая нуль.
[2] Напомню, что идеал $\mathfrak{p} \subset A$ называется *простым*, если в фактор кольце $A/\mathfrak{p}$ нет делителей нуля.
[3] Необходимые предварительные сведения о категориях и функторах можно почерпнуть из курса алгебры, см. например лекцию http://vyshka.math.ru/pspdf/1011/algebra-2/lec_10.pdf
[4] См. цитированную выше лекцию.

Первое означает, что каждая конечно порождённая приведённая $\Bbbk$-алгебра изоморфна координатной алгебре некоторого аффинного аффинного алгебраического многообразия, и было установлено нами в лем. 3.4 на стр. 56. Второе означает, что сопоставление регулярному морфизму многообразий его гомоморфизма подъёма задаёт биекцию

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Aff}_\Bbbk}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Alg}_\Bbbk}(\Bbbk[Y],\Bbbk[X])\,, \quad \varphi \mapsto \varphi^*\,. \tag{3-13}$$

Для построения обратного отображения рассмотрим функтор из категории конечно порождённых приведённых $\Bbbk$-алгебр с единицей в категорию множеств, сопоставляющй алгебре её максимальный спектр

$$h_\Bbbk : \mathcal{Alg}_\Bbbk \to \mathcal{Set}\,, \quad A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{Alg}_\Bbbk}(A\,,\Bbbk) = \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A\,, \tag{3-14}$$

а гомоморфизму $\Bbbk$-алгебр $\psi : A \to B$ — *отображение подъёма* $\psi^* : \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} B \to \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$, переводящее сюрьекцию $\mathrm{ev} : B \to \Bbbk$ с ядром $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} B$ в сюрьекцию $\psi^*(\mathrm{ev}) = \mathrm{ev} \circ \psi$ с ядром $\psi^{-1}(\mathfrak{m}) \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[X]$. Сравнение определений показывает, что отображения множеств

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Aff}_\Bbbk}(X,Y) \arrow[r, shift left, "\varphi\mapsto\varphi^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{Alg}_\Bbbk}(\Bbbk[Y],\Bbbk[X]) \arrow[l, shift left, "\psi^*\leftarrow\!\shortmid\psi"] \end{tikzcd}$$

обратны друг другу. В самом деле, если регулярный морфизм из алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ в алгебраическое многообразие $Y \subset \mathbb{A}^m$ действует по правилу $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x))$, где $\varphi_i(x) \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, то его гомоморфизм подъёма $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ действует на образующие по правилу $y_i \mapsto \varphi_i \,(\mathrm{mod}\, I(X))$. Подъём этого гомоморфизма подъёма, т. е. отображение $\varphi^{**} : \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[X] \to \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[Y]$, переводит вычисление

$$\mathrm{ev}_p : \Bbbk[X] \to \Bbbk\,, \quad f(x) \mapsto f(p)\,,$$

в произвольной точке $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in X$ в композицию $\mathrm{ev}_p \circ \varphi^*$, которая переводит каждую образующую $y_i \in \Bbbk[Y]$ в число $\varphi_i(p) \in \Bbbk$ и, таким образом, является вычислением в точке $\varphi(p) \in Y$. Стало быть, $\varphi^{**} = \varphi$.

Упражнение 3.12. Установите для любого гомоморфизма $\Bbbk$-алгебр $\psi : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ равенство $\psi^{**} = \psi$.

Тем самым, отображение (3-13) биективно, и значит, функтор (3-13) является оборачивающей стрелки эквивалентностью категорий. Функтор (3-14) не является квазиобратным[1] к функтору (3-12) лишь потому, что принимает значения не в категории аффинных алгебраических многообразий, а в категории множеств. Для любой конечно порождённой приведённой $\Bbbk$ алгебры $A$ с единицей, множество $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$ допускает много различных, но изоморфных друг другу структур аффинного алгебраического многообразия, если понимать под таковой структурой вложение множеств $\varphi : \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A \hookrightarrow \mathbb{A}^n$, биективно отображающее $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$ на аффинное алгебраическое многообразие $V(\ker \varphi^*) \subset \mathbb{A}^n$, где $\varphi^* : \Bbbk[\mathbb{A}^n] \twoheadrightarrow A$ это гомоморфизм подъёма вложения $\varphi$. Задание такой структуры равносильно выбору представления алгебры $A$ образующими и соотношениями, т. е. фиксации изоморфизма $A \simeq \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$.

[1] В смысле цитированной выше лекции.

Пример 3.5 (прямая и гипербола)
В прим. 3.4 на стр. 58 мы видели, что точки спектра $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[t]$ биективно соответствуют точкам аффинной прямой $\mathbb{A}^1 = \Bbbk$, ибо всякий гомоморфизм $\mathrm{ev} : \Bbbk[t] \to \Bbbk$ однозначно определяется своим значением $\mathrm{ev}(t) = \lambda \in \Bbbk$ на образующей алгебры $\Bbbk[t]$, и это значение может быть любым. Аналогично, спектр алгебры полиномов Лорана $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[t, t^{-1}]$ находится в естественной биекции с точками аффинной прямой с выколотым нулём, т. е. с открытым множеством $\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0\} = \Bbbk^*$, ибо значение $\lambda = \mathrm{ev}(t) = 1/(\mathrm{ev}(t^{-1})$ может быть любым *обратимым* элементом поля $\Bbbk$. Если же задать алгебру полиномов Лорана образующими и соотношениями, например, посредством изоморфизма $\varphi^* : \Bbbk[t, t^{-1}] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[x, y]/(xy - 1)$, переводящего $t$ в $x$, а $t^{-1}$ в $y$, то её спектр отождествится с множеством точек гиперболы $xy = 1$ в $\mathbb{A}^2$. При этом отображение поднятия $\varphi = \varphi^{**} : V(xy - 1) \to \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0\}$ будет проекцией гиперболы на координатную ось.

**3.2.5. Дизъюнктные объединения (копроизведения) многообразий.** Для аффинных алгебраических многообразий $X$ и $Y$ прямое произведение алгебр $\Bbbk[X] \times \Bbbk[Y]$ конечно порождено, приведено, содержит единицу и обладает следующим универсальным свойством: для любой пары гомоморфизмов $\varphi^* : B \to \Bbbk[X]$, $\psi^* : B \to \Bbbk[Y]$ из произвольной $\Bbbk$-алгебры $B$ существует единственный гомоморфизм $\eta^* : B \to \Bbbk[X] \times \Bbbk[Y]$, делающий коммутативной диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
& \Bbbk[X] \times \Bbbk[Y] \arrow[dl, "i_X^*"'] \arrow[dr, "i_Y^*"] & \\
\Bbbk[X] & & \Bbbk[Y] \\
& B \arrow[ul, "\varphi^*"] \arrow[ur, "\psi^*"'] \arrow[uu, dotted, "\eta^*"] &
\end{tikzcd}
$$

в которой $i_X^* : \Bbbk[X] \times \Bbbk[Y] \twoheadrightarrow \Bbbk[X]$ и $i_Y^* : \Bbbk[X] \times \Bbbk[Y] \twoheadrightarrow \Bbbk[Y]$ суть проекции произведения на сомножители, переводящие $(f, g) \in \Bbbk[X] \times \Bbbk[Y]$ в $f \in \Bbbk[X]$ и $g \in \Bbbk[Y]$ соответственно.

Упражнение 3.13. Проверьте это, и покажите любая алгебра $A$ с парой гомоморфизмов

$$i_X^* : A \to \Bbbk[X] \quad \text{и} \quad i_Y^* : A \to \Bbbk[Y],$$

удовлетворяющих предыдущему универсальному свойству, канонически изоморфна алгебре $\Bbbk[X] \times \Bbbk[Y]$ посредством единственного изоморфизма, перестановочного с гомоморфизмами $i_X^*$ и $i_Y^*$.

Из установленной в n° 3.2.4 эквивалентности категорий вытекает, что аффинное алгебраическое многообразие $X \sqcup Y \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}\big(\Bbbk[X] \times \Bbbk[Y]\big)$ обладает двойственным универсальным свойством: для любой пары регулярных морфизмов $\varphi : X \to Z$, $\psi : Y \to Z$ в любое аффинное алгебраическое многообразие $Z$ существует единственный регулярный морфизм $\eta : X \sqcup Y \to Z$, делающий коммутативной диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
& X \sqcup Y \arrow[dd, dotted, "\eta^*"] & \\
X \arrow[ur, "i_X"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[ul, "i_Y^*"'] \arrow[dl, "\psi^*"] \\
& Z &
\end{tikzcd}
$$

Упражнение 3.14. Проверьте, что для любых объектов $X, Y$ произвольной категории объект $X \sqcup Y$ и обладающие предыдущим универсальным свойством морфизмы

$$i_X : X \to X \sqcup Y, \quad i_Y : Y \to X \sqcup Y,$$

если существуют, то единственны точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с $i_X$ и $i_Y$. Убедитесь также, что в категории множеств таким объектом является дизъюнктное объединение множеств $X$ и $Y$.

Упражнение 3.15. Пусть аффинное алгебраическое многообразие $X$ является теоретико-множественным объединением двух непустых непересекающихся аффинных алгебраических многообразий $Y$ и $Z$. Покажите, что $\Bbbk[X] = \Bbbk[Y] \times \Bbbk[Z]$.

**3.2.6. Прямые произведения многообразий.** Для коммутативных $\Bbbk$-алгебр $A$ и $B$ и единицами тензорное произведение векторных пространств $A \otimes B$ имеет естественную структуру коммутативной $\Bbbk$-алгебры с единицей $1 \otimes 1$ и умножением, которое на разложимых тензорах задаётся формулой $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \overset{\text{def}}{=} (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$.

Упражнение 3.16. Убедитесь в этом.

Из универсального свойства тензорного произведения вытекает, что гомоморфизмы $\Bbbk$-алгебр

$$\begin{aligned} \alpha &: A \to A \otimes B \quad a \mapsto a \otimes 1\,, \\ \beta &: B \to A \otimes B \quad b \mapsto 1 \otimes b\,, \end{aligned} \tag{3-15}$$

обладают универсальными свойствами *копроизведения*, т. е. для любой пары гомоморфизмов $\varphi : A \to C, \psi : B \to C$ существует единственный гомоморфизм $\varphi \otimes \psi : A \otimes B \to C$ со свойствами $\varphi = (\varphi \otimes \psi) \circ \alpha$ и $\psi = (\varphi \otimes \psi) \circ \beta$, и этот гомоморфизм действует на разложимые тензоры по правилу $\varphi \otimes \psi : a \otimes b \mapsto \varphi(a)\psi(b)$.

Упражнение 3.17. Убедитесь в этом.

Например, тензорное произведение алгебр $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \otimes \Bbbk[y_1, y_2, \dots, y_m]$ изоморфно алгебре многочленов $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m]$ посредством отображения

$$x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdots x_n^{s_n} \otimes y_1^{r_1} y_2^{r_2} \cdots y_m^{r_m} \mapsto x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdots x_n^{s_n} y_1^{r_1} y_2^{r_2} \cdots y_m^{r_m}.$$

Эквивалентность категорий из n° 3.2.4 превращает этот изоморфизм в изоморфизм аффинных алгебраических многообразий $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \simeq \mathbb{A}^{n+m}$.

Предложение 3.5

Тензорное произведение конечно порождённых приведённых $\Bbbk$-алгебр $A \otimes B$ является конечно порождённой приведённой $\Bbbk$-алгеброй с максимальным спектром $\mathrm{Spec_m}(A \otimes B) = \mathrm{Spec_m}(A) \times \mathrm{Spec_m}(B)$. В частности, теоретико множественное произведение аффинных алгебраических многообразий тоже является аффинным алгебраическим многообразием.

Доказательство. Биекция $\mathrm{Spec_m}(A) \times \mathrm{Spec_m}(B) \simeq \mathrm{Spec_m}(A \otimes B)$ переводит точку $(p, q)$, представленную парой эпиморфизмов вычисления $\mathrm{ev}_p : A \to \Bbbk$, $\mathrm{ev}_q : B \to \Bbbk$ в эпиморфизм вычисления

$$A \otimes B \to \Bbbk, \quad a \otimes b \mapsto \mathrm{ev}_p(a)\,\mathrm{ev}_p(b),$$

существующий в силу универсального свойства тензорного произведения. Алгебра $A \otimes B$ порождается над $\Bbbk$ всевозможными попарными тензорными произведениями образующих алгебр $A$ и $B$, коих имеется конечное число. Чтобы показать, что $A \otimes B$ приведена, достаточно согласно предл. 3.4 на стр. 58 убедиться в том, что всякий элемент $h \in A \otimes B$, задающий нулевую функцию на $\mathrm{Spec}_\mathrm{m}(A \otimes B)$, равен нулю. Для этого запишем такой элемент $h$ в виде $\sum f_\nu \otimes g_\nu$ с линейно независимыми над $\Bbbk$ элементами $g_\nu \in B$. Из равенства $(\mathrm{ev}_p \otimes \mathrm{ev}_q)h = 0$, справедливого для всех $(p, q) \in \mathrm{Spec}_\mathrm{m}(A \otimes B)$, вытекает, что при произвольно зафиксированном $p \in \mathrm{Spec}_\mathrm{m} A$ линейная комбинация $\sum f_\nu(p) \cdot g_\nu \in B$ является тождественно нулевой функцией на $\mathrm{Spec}_\mathrm{m} B$, и значит, равна нулю в $B$, так как алгебра $B$ приведена. Это означает, что все константы $f_\nu(p)$ нулевые для любого $p \in \mathrm{Spec}_\mathrm{m} A$, т. е. элементы $f_\nu \in A$ задают тождественно нулевые функции $\mathrm{Spec}_\mathrm{m} A \to \Bbbk$. Поскольку алгебра $A$ приведена, все $f_\nu = 0$, а значит и $h = 0$. □

**3.3. Топология Зарисского.** На множестве $X = \mathrm{Spec}_\mathrm{m} A$ имеется каноническая топология, отражающая алгебраические свойства алгебры $A$. Она называется *топологией Зарисского* и имеет в качестве замкнутых подмножеств алгебраические подмногообразия в $X$, т. е. множества $V(I) = \{x \in X \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in I\} = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}_\mathrm{m} A \mid I \subset \mathfrak{m}\}$ для всевозможных идеалов $I \subset A$.

Упражнение 3.18. Убедитесь, что[1]

$$\varnothing = V(1)\,, \quad X = V(0)\,, \quad \bigcap_\nu V(I_\nu) = V\Big(\sum_\nu I_\nu\Big)\,, \quad V(I) \cup V(J) = V(I \cap J) = V(IJ)\,, \tag{3-16}$$

где идеал $\sum_\nu I_\nu$ состоит из всех конечных сумм $\sum_\nu f_\nu$ с $f_\nu \in I_\nu$, а идеал $IJ$ является $\Bbbk$-линейной оболочкой всевозможных произведений $ab$ с $a \in I$, $b \in J$.

В топологии Зарисского вложение открытых окрестностей друг в друга выражает связано, скорее, с делимостью в алгебре функций, чем с «близостью» или «удалённостью» точек, составляющих эти окрестности. Поэтому многие свойства топологии Зарисского выглядят экзотическими с точки зрения интуиции, основанной на опыте работы с метрическими пространствами.

Например, топология Зарисского на произведении $X \times Y$ обычно тоньше произведения топологий Зарисского на $X$ и $Y$, поскольку замкнутые подмножества $Z \subset X \times Y$ не исчерпываются пересечениями произведений замкнутых подмножеств в $X$, $Y$. Скажем, для $X = Y = \mathbb{A}^1$ любая плоская алгебраическая кривая замкнута в топологии Зарисского на $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$, в то время как произведения замкнутых множеств на $\mathbb{A}^1$ это конечные объединения изолированных точек и координатных прямых.

Лемма 3.6
Всякий регулярный морфизм алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ непрерывен в топологии Зарисского.

Доказательство. Прообраз $\varphi^{-1}(Z)$ замкнутого $Z = V(I) \subset Y$ состоит из всех $x \in X$, для которых $0 = f(\varphi(x)) = \varphi^* f(x) \quad \forall f \in I$, т. е. является множеством нулей идеала, порождённого в $\Bbbk[X]$ образом $\varphi^*(I)$ идеала $I$ при гомоморфизме поднятия $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$. □

**3.3.1. База и компактность.** Поскольку всякий идеал $I \subset \Bbbk[X]$ конечно порождён, каждое замкнутое множество является пересечением конечного набора гиперповерхностей:

$$V(I) = V(f_1, f_2, \dots, f_m) = \bigcap_\nu V(f_\nu)$$

для идеала $I = (f_1, f_2, \dots, f_m)$. Поэтому любое открытое множество

$$X \smallsetminus V(I) = \bigcup_\nu \big(X \smallsetminus V(f_\nu)\big)$$

[1] Обратите внимание, что последнее равенство в (3-16) равносильно равенству $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{IJ}$.

является *конечным* объединением *главных* открытых множеств

$$\mathcal{D}(f) \overset{\text{def}}{=} X \smallsetminus V(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}\,.$$

Таким образом, главные открытые множества составляют базу топологии Зарисского, и любое открытое подмножество $U \subset X$, включая само $X$, *компактно* в том смысле, что в каждом его открытом покрытии содержится конечное подпокрытие.

Упражнение 3.19. Докажите это.

**3.3.2. Неприводимые компоненты.** Топологическое пространство $X$, представимое в виде объединения $X = X_1 \cup X_2$ собственных замкнутых подмножеств $X_1, X_2 \subsetneq X$, называется *приводимым*. В метрической топологии это понятие бессодержательно, поскольку любое пространство, содержащее более одной точки, приводимо. В топологии Зарисского неприводимые алгебраические многообразия играют примерно такую же роль, какую степени простых чисел играют в арифметике.

Предложение 3.6
Аффинное алгебраическое многообразие неприводимо тогда и только тогда, когда в его координатной алгебре $\Bbbk[X]$ нет делителей нуля.

Доказательство. Разложение $X = X_1 \cup X_2$, в котором каждое $X_i$ замкнуто, непусто и отлично от $X$, означает наличие ненулевых регулярных функций $f_1 \in I(X_1)$ и $f_2 \in I(X_2)$, произведение которых $f_1 f_2$ тождественно зануляется на всём $X$, и значит, равно нулю $\Bbbk[X]$. Наоборот, если $f_1 f_2 = 0$ в $\Bbbk[X]$ каких-либо ненулевых функций $f_i \in \Bbbk[X]$, то обе они необратимы в $\Bbbk[X]$, а значит, замкнутые подмножества $V(f_1), V(f_2) \subset X$ оба непусты, отличны от $X$, и при этом $X = V(f_1) \cup V(f_2)$. □

Упражнение 3.20. Убедитесь, что $V(f)$ непусто и отлично от $X$ для всякого ненулевого необратимого многочлена $f \in \Bbbk[X]$.

Следствие 3.6
Аффинная гиперповерхность $\{g(x) = 0\} \subset \mathbb{A}^n$ неприводима тогда и только тогда, когда $g$ является степенью неприводимого многочлена.

Доказательство. Поскольку алгебра $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ факториальна, радикал любого главного идеала $\sqrt{(f)}$ также является главным идеалом, порождённым произведением всех попарно неассоциированных неприводимых делителей многочлена $f$. Следовательно координатная алгебра $\Bbbk[V(f)] = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/\sqrt{(f)}$ не имеет делителей нуля , если и только если у $f$ имеется единственный с точностью до умножения на константы неприводимый делитель. □

Теорема 3.4
Каждое аффинное алгебраическое многообразие имеет единственное разложение в конечное объединение $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k$ таких неприводимых замкнутых подмножеств $X_i \subset X$, что $X_i \not\subset X_j$ при $i \neq j$.

Доказательство. Разложение строится рекурсивно. Если $X$ приводимо, мы представляем его в виде $X = Z_1 \cup Z_2$, где $Z_{1,2}$ являются собственными замкнутыми подмножествами в $X$, и далее повторяем эту процедуру с каждым $Z_i$, пока не придём к конечному разложению $X = \bigcup Z_\nu$, в котором все $Z_\nu$ неприводимы. Выкидывая те $Z_\nu$, которые содержатся в других $Z_\mu$, получаем требуемое разложение. Если рекурсивная процедура никогда не остановится, возникнет бесконечная цепочка строго вложенных замкнутых подмножеств $X \supsetneq Y_1 \supsetneq Y_2 \supsetneq \dots$, идеалы которых образуют бесконечную строго возрастающую цепочку $(0) \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$, а это противоречит нётеровости алгебры $\Bbbk[X]$.

Единственность разложения доказывается индукцией по числу неприводимых компонент. Пусть $X$ раскладывается на $k$ компонент и для всех многообразий, раскладывающихся на меньшее число компонент, разложение единственно. Для неприводимого $Y$ включение $Y \subset Z_1 \cup Z_2$ означает разложение $Y = (Y \cap Z_1) \cup (Y \cap Z_2)$ и влечёт включение $Y \subset Z_1$ или включение $Y \subset Z_2$. Поэтому равенство двух разложений на неприводимые компоненты

$$X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_m$$

означает, что $X_1 \subset Y_\alpha \subset X_\beta$ для некоторых $\alpha$, $\beta$, откуда $X_1 = Y_\alpha = X_\beta$ и $\beta = 1$. Перенумеруем $Y_i$ так, чтобы $\alpha = 1$. Тогда из упр. 3.21 ниже вытекает равенство

$$\begin{aligned} X_2 \cup \ldots \cup X_k = \overline{X_2 \smallsetminus X_1} \cup \ldots \cup \overline{X_k \smallsetminus X_1} = \overline{X \smallsetminus X_1} = \\ = \overline{X \smallsetminus Y_1} = \overline{Y_2 \smallsetminus X_1} \cup \ldots \cup \overline{Y_m \smallsetminus Y_1} = Y_2 \cup \ldots \cup Y_m, \end{aligned}$$

к которому применимо предположение индукции. □

Упражнение 3.21. Пусть $Z \subsetneq Y \subset X$ замкнуты и $Y$ неприводимо. Убедитесь, что $Y = \overline{Y \smallsetminus Z}$ (замыкание берётся в $X$) и что неприводимость $Y$ для этого существенна.

Определение 3.3
Неприводимые замкнутые подмножества $X_i \subset X$, о которых идёт речь в теор. 3.4, называются *неприводимыми компонентами* многообразия $X$.

Предложение 3.7
Элемент $f \in \Bbbk[X]$ делит нуль , если и только если он обращается в нуль на какой-нибудь неприводимой компоненте многообразия $X$.

Доказательство. Пусть $fg = 0$ и $g \neq 0$. Обозначим ограничения функций $f$, $g$ на неприводимые компоненты $X_i \subset X$ через $f_i, g_i \in \Bbbk[X_i]$. Поскольку $g \neq 0$ в $\Bbbk[X]$, хотя бы при одном $i$ ограничение $g_i \neq 0$ в $\Bbbk[X_i]$. Так как в $\Bbbk[X_i]$ нет делителей нуля, мы заключаем, что $f_i = 0$ в $\Bbbk[X_i]$. Наоборот, если $f_i = 0$ для какого-нибудь $i$, то $fg = 0$ для любой ненулевой функции $g \in I\left(\bigcup_{\nu \neq i} X_\nu\right)$. □

**3.3.3. Большие открытые множества.** Топология Зарисского нехаусдорфова. Если $X$ неприводимо, любые два непустых открытых подмножества $U_1, U_2 \subset X$ имеют непустое пересечение, т. к. в противном случае возникает разложение $X = (X \smallsetminus U_1) \cup (X \smallsetminus U_2)$ в объединение собственных замкнутых подмножеств. Таким образом, каждое непустое открытое подмножество неприводимого многообразия всюду плотно в нём. Поскольку регулярные функции непрерывны в топологии Зарисского, из плотности непустых открытых множеств вытекает, что две регулярных функции $f, g$ на неприводимом многообразии $X$, принимающие равные значения во всех точках какого-нибудь непустого открытого подмножества в $X$, совпадают как элементы алгебры $\Bbbk[X]$.

**3.4. Рациональные функции.** Все элементы координатной алгебры $\Bbbk[X]$, которые не являются делителями нуля, образуют *мультипликативную систему*[1] $S_X \subset \Bbbk[X]$. Кольцо частных[2] $\Bbbk[X]S_X^{-1}$ называется *кольцом рациональных функций* на $X$ и обозначается $\Bbbk(X)$.

Если многообразие $X$ неприводимо, то $S_X = \Bbbk[X]^* = \Bbbk[X] \smallsetminus 0$ и $\Bbbk(X) = Q_{\Bbbk[X]}$ является полем частных целостного кольца $\Bbbk[X]$.

Скажем, что рациональная функция $f \in \Bbbk(X)$ *определена* в точке $x \in X$, если существует такое её представление в виде дроби $f = p/q$, в котором $p, q \in \Bbbk[X]$, $q$ не делит нуль, и $q(x) \neq 0$. Число $f(x) = p(x)/q(x) \in \Bbbk$ называется *значением* функции $f$ в точке $x$.

Упражнение 3.22. Убедитесь, что $f(x)$ не зависит от выбора представления $f = p/q$ оговорённого выше вида.

Множество точек $x$, в которых определена рациональная функция $f$, называется *областью определения* функции $f$ и обозначается $\mathrm{Dom}(f)$. Из предл. 3.7 и n° 3.3.3 вытекает, что $\mathrm{Dom}(f)$ является плотным открытым подмножеством в $X$.

Упражнение 3.23. Убедитесь, что для совпадения двух рациональных функций как элементов кольца $\Bbbk(X)$ достаточно поточечного совпадения их значений на каком-нибудь плотном открытом подмножестве в $X$.

Для открытого $U \subset X$ положим $\Bbbk[U] \overset{\text{def}}{=} \{f \in \Bbbk(X) \mid \mathrm{Dom}(f) \supset U\}$ и будем называть эту алгебру *алгеброй рациональных функций*, регулярных в $U$.

Лемма 3.7
Если $h \in \Bbbk[X]$ не делит нуль, то $\Bbbk\big[\mathcal{D}(h)\big] = \Bbbk[X][h^{-1}]$ является кольцом частных $\Bbbk[X]$ со знаменателями из мультипликативной системы $\{h^k\}_{k\geqslant 0}$.

Доказательство. Для рациональной функции $f \in \Bbbk(X)$ положим

$$\left(f^{-1}\right) \overset{\text{def}}{=} \{g \in \Bbbk[X] \mid gf \in \Bbbk[X]\}. \tag{3-17}$$

Это идеал в $\Bbbk[X]$, и лежащие в нём неделители нуля исчерпывают все знаменатели, встречающиеся во всевозможных представлениях функции $f$ в виде дроби.

Упражнение 3.24. Покажите, что они линейно порождают идеал $\left(f^{-1}\right)$ как векторное пространство над $\Bbbk$.

Таким образом, $X \smallsetminus \mathrm{Dom}(f) = V\big(\left(f^{-1}\right)\big)$. Включение $\mathcal{D}(h) \subset \mathrm{Dom}(f)$ равносильно включению $V(h) \supset V\big(\left(f^{-1}\right)\big)$, т. е. занулению функции $h$ на общих нулях всех знаменателей функции $f$. По теоремам Гильберта о нулях $h^d \in \left(f^{-1}\right)$ для некоторого $d \in \mathbb{N}$. Тем самым, $f = p/h^d$, где $p = h^d \cdot f \in \Bbbk[X]$. □

[1] Напомню, что подмножество $S$ в коммутативном кольце $A$ с единицей называется *мультипликативной системой*, если $1 \in S$, $0 \notin S$ и $s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1 s_2 \in S$.

[2] Напомню, что кольцо частных $AS^{-1}$ со знаменателями в мультипликативной системе $S$ коммутативного кольца $A$ с единицей называется фактор декартова произведения $A \times S$ по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему равенства $a/s = (at)/(st)$ со всевозможными $a \in A$ и $s, t \in S$. Классы эквивалентности пар $(a, s)$ по модулю этого отношения называются *дробями*, обозначаются $a/s$ и образуют коммутативное кольцо. Подробности см. в курсе алгебры, например, в лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-04.pdf.

**3.4.1. Аффинность главных открытых множеств.** Если $h \in \Bbbk[X]$ не делит нуль, то главное открытое подмножество $\mathcal{D}(h) = \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[X][h^{-1}] \simeq \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[X][t]/(1-ht)$ всюду плотно в $X$ и является аффинным алгебраическим многообразием, реализуемым, например, замкнутой гиперповерхностью $V(1-ht) \subset X \times \mathbb{A}^1$. Вложение $i : \mathcal{D} \hookrightarrow X$ является регулярным морфизмом аффинных многообразий. Его гомоморфизм подъёма задаёт каноническое вложение $i^* : \Bbbk[X] \hookrightarrow \Bbbk[X][h^{-1}] \simeq \Bbbk[\mathcal{D}(h)]$ и продолжается до изоморфизма колец частных $i^* : \Bbbk(X) \xrightarrow{\sim} \Bbbk\big(\mathcal{D}(h)\big)$. Обратите внимание, что два *разных* толкования записи $\Bbbk\big[\mathcal{D}(h)\big]$ — как координатной алгебры замкнутого аффинного многообразия $\mathcal{D}(h) = \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[X][h^{-1}]$ и как алгебры рациональных функций, регулярных на открытом множестве $\mathcal{D}(h) \subset X$, вполне *согласованы* друг с другом.

Теорема 3.5
Пусть $X = X_1 \cup X_2 \cup \ \dots\ \cup X_k$ — разложение аффинного алгебраического многообразия $X$ на неприводимые компоненты. Тогда $\Bbbk(X) = \Bbbk(X_1) \times \Bbbk(X_2) \times \ \dots\ \times \Bbbk(X_k)$.

Доказательство. Выберем в идеале $I = I\big(\bigcup_{i \neq j}(X_i \cap X_j)\big) \subset \Bbbk[X]$, который состоит из всех функций, зануляющихся на всех попарных пересечениях различных неприводимых компонент многообразия $X$, функцию $f \in I$, не делящую нуль в $\Bbbk[X]$.

Упражнение 3.25. Убедитесь, что идеал $I$ в действительности линейно порождается такими функциями как векторное пространство над $\Bbbk$.

Главное открытое подмножество $W = \mathcal{D}(f) = \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[X][f^{-1}] \subset X$ аффинно и является дизъюнктным объединением подмножеств $W_i = W \cap X_i \subset X_i$. Каждое $W_i$ является главным открытым подмножеством многообразия $X_i$ и тоже аффинно:

$$W_i = \mathcal{D}(f_i) = \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[X_i][f_i^{-1}] \subset X_i\,, \quad \text{где} \quad f_i = f\ (\operatorname{mod} I(X_i)) \in \Bbbk[X_i]\,.$$

Согласно упр. 3.15, $\Bbbk[W] \simeq \Bbbk[W_1] \times \Bbbk[W_2] \times \dots \times \Bbbk[W_k]$.

Упражнение 3.26. Проверьте, что кольцо частных прямого произведения коммутативных колец с единицами изоморфно прямому произведению колец частных сомножителей

$$(K_1 \times K_2 \times \dots \times K_k) S^{-1}_{K_1 \times K_2 \times \dots \times K_k} \simeq K_1 S^{-1}_{K_1} \times K_2 S^{-1}_{K_2} \times \dots \times K_k S^{-1}_{K_k}\,.$$

Таким образом, $\Bbbk(X) \simeq \Bbbk(W) \simeq \prod \Bbbk(W_i) \simeq \prod \Bbbk(X_i)$. □

Предостережение 3.1. Хотя главные открытые множества $\mathcal{D}(f)$, задаваемые не делящими нуль регулярными функциями $f \in \Bbbk[X]$, и являются аффинными алгебраическими многообразиями, произвольное открытое подмножество $U \subset X$ аффинным алгебраическим многообразием, вообще говоря, *не является*, и вложение $U \hookrightarrow \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[U]$, сопоставляющее точке $u \in U$ её максимальный идеал $\mathfrak{m}_u = \ker \operatorname{ev}_u \subset \Bbbk[U]$, может не быть биективным.

Упражнение 3.27. Пусть $n \geqslant 2$ и $U = \mathbb{A}^n \smallsetminus O$ — дополнение к началу координат в аффинном пространстве. Покажите, что $\Bbbk[U] = \Bbbk[\mathbb{A}^n]$, и тем самым, $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[U] = \mathbb{A}^n \neq U$.

**3.5. Геометрические свойства гомоморфизмов алгебр.** Любой гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр

$$\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$$

канонически разлагается в композицию эпиморфизма и вложения:

$$\Bbbk[Y] \twoheadrightarrow \Bbbk[Y]/\ker(\varphi^*) = \operatorname{im}(\varphi^*) \hookrightarrow \Bbbk[X]\,. \tag{3-18}$$

Поскольку алгебра $\Bbbk[Y]$ конечно порождена, а алгебра $\Bbbk[X]$ приведена, алгебра

$$\Bbbk[Y]/\ker(\varphi^*) = \operatorname{im}(\varphi^*) \subset \Bbbk[X]$$

тоже является конечно порождённой приведённой $\Bbbk$-алгеброй, отвечающей аффинному многообразию $Z = \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(\operatorname{im}(\varphi^*)) \simeq V(\ker(\varphi^*)) \subset Y$. Инъективность гомоморфизма

$$\varphi_1^* : \Bbbk[Z] \to \Bbbk[X]$$

означает отсутствие ненулевых функций $f \in \Bbbk[Z]$, зануляющихся на образе $\varphi_1(X) \subset Z$, т. е. *плотность* множества $\varphi_1(X)$ в $Z$. Тем самым, $Z = \overline{\varphi(X)} \subset Y$ является замыканием образа $\varphi(X)$ в многообразии $Y$. Оно вложено в $Y$ как замкнутое подмногообразие $V(\ker\varphi^*)$ нулей идеала $\ker\varphi^* \subset \Bbbk[Y]$. Мы заключаем, что алгебраическому разложению (3-18) на геометрическом языке отвечает разложение регулярного морфизма многообразий $\varphi : X \to Y$ в композицию

$$X \xrightarrow{\varphi_1} Z = \overline{\varphi(X)} \xhookrightarrow{\varphi_2} Y$$

регулярного морфизма $X \to Z$ с плотным образом и регулярного вложения $Z$ в $Y$ в качестве замкнутого подмногообразия.

**3.5.1. Замкнутые вложения.** Морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *замкнутым вложением*, если его гомоморфизм поднятия $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to k[X]$ сюрьективен. Это означает, что $\varphi$ является изоморфизмом между $X$ и замкнутым подмногообразием $V(\ker\varphi^*) \subset Y$. Если замкнутое подмножество $Z \subset X$ неприводимо, замкнутое вложение $i : Z \hookrightarrow X$ имеет сюрьективный гомоморфизм подъёма $i^* : \Bbbk[X] \twoheadrightarrow \Bbbk[Z]$, принимающий значения в целостном кольце $\Bbbk[Z]$, которое канонически вложено в своё поле частных $\Bbbk(Z)$. По универсальному свойству кольца частных $\Bbbk(X)$ эпиморфизм $i^*$ однозначно продолжается до эпиморфизма

$$\operatorname{ev}_Z : \Bbbk(X) \twoheadrightarrow \Bbbk(Z)\,, \tag{3-19}$$

который ограничивает рациональные функции с $X$ на $Z$. Сюрьекцию (3-19) можно воспринимать как гомоморфизм вычисления рациональных функций на $X$ в «общей точке» неприводимого подмногообразия $Z \subset X$, где всякая рациональная функция определена. Результатом такого вычисления является рациональная функция на подмногообразии $Z$, т. е. элемент поля $\Bbbk(Z)$, который в дальнейшем может быть вычислен в некоторых «конкретных» точках $z \in Z$. В частности, когда $Z \subset X$ является неприводимой компонентой приводимого аффинного многообразия $X$, сюрьективность гомоморфизма (3-19) даёт возможность представить любую рациональную функцию на компоненте $Z \subset X$ в виде ограничения некоторой рациональной функции на $X$, т. е. в виде дроби $p/q$, знаменатель $q$ которой не зануляется тождественно ни на одной из неприводимых компонент многообразия $X$.

Упражнение 3.28. Укажите такое представление для рациональной функции $1/x$ на компоненте $Z = V(y)$ координатного креста $X = V(xy)$ на аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$.

**3.5.2. Доминантные морфизмы.** Если многообразие $X$ неприводимо, то регулярное отображение $\varphi : X \to Y$ называется *доминантным*, если его гомоморфизм поднятия $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ инъективен. Как мы видели выше, это означает, что $\overline{\varphi(X)} = Y$. Регулярный морфизм $\varphi : X \to Y$ приводимого многообразия $X$ называется *доминантным*, если доминантно его ограничение $\varphi_i = \varphi|_{X_i} : X_i \to Y$ на каждую неприводимую компоненту $X_i \subset X$. В этом случае все гомоморфизмы подъёма $\varphi_i^* : \Bbbk[Y] \hookrightarrow \Bbbk[X_i] \subset \Bbbk(X_i)$ инъективны, и по универсальному свойству кольца частных их прямое произведение однозначно продолжается до вложения колец рациональных функций $\Bbbk(Y) \hookrightarrow \prod \Bbbk(X_i) = \Bbbk(X)$.

Упражнение 3.29. Покажите, что любой доминантный морфизм неприводимых аффинных многообразий $\varphi : X \to Y$ является композицией замкнутого вложения $\psi : X \hookrightarrow Y \times \mathbb{A}^m$ с последующей проекцией $\pi : Y \times \mathbb{A}^m \twoheadrightarrow Y$ вдоль $\mathbb{A}^m$.

**3.5.3. Конечные морфизмы.** Регулярный морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *конечным*, если расширение алгебр $\varphi^*(k[Y]) \subset \Bbbk[X]$ является целым, т. е. когда координатная алгебра $\Bbbk[X]$ является конечно порождённым модулем над своей подалгеброй $\varphi^*(\Bbbk[Y])$.

Упражнение 3.30. Убедитесь, что конечность морфизма $\varphi : X \to Y$ равносильна конечности индуцированного им морфизма $X \to \overline{\varphi(X)}$.

Предложение 3.8
Любой конечный морфизм аффинных алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ переводит каждое замкнутое подмножество $Z \subset X$ в замкнутое подмножество $\varphi(Z) \subset Y$, и ограничение

$$\varphi_Z : Z \to \varphi(Z)$$

тоже является конечным морфизмом. Если многообразие $X$ неприводимо, собственные замкнутые подмножества в $X$ переходят в собственные замкнутые подмножества в $Y$.

Доказательство. Если замкнутое множество $Z \subset X$ имеет идеал $I = I(Z) \subset \Bbbk[X]$, гомоморфизм подъёма для регулярного отображения $\varphi_Z : Z \to \overline{\varphi(Z)}$ является композицией гомоморфизма $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ с последующей факторизацией $\Bbbk[X] \twoheadrightarrow \Bbbk[X]/I = \Bbbk[Z]$. Поскольку алгебра $\Bbbk[X]$ конечно порождена как модуль над $\varphi^*(\Bbbk[Y])$, её фактор алгебра $\Bbbk[Z] = \Bbbk[X]/I$ тоже конечно порождена как модуль над $\varphi_Z^*(\Bbbk[Y]) = \varphi^*(\Bbbk[Y])/(I \cap \varphi^*(\Bbbk[Y]))$. Поэтому морфизм $\varphi_Z : Z \to \overline{\varphi(Z)}$ конечен. Замкнутость множества $\varphi(Z)$ равносильна тому, что он сюрьективен. Проверять это можно отдельно для каждой неприводимой компоненты множества $Z$. Таким образом, для доказательства первого утверждения леммы достаточно проверить, что каждый конечный доминантный морфизм неприводимых аффинных многообразий $\varphi : X \to Y$ сюрьективен. Так как гомоморфизм подъёма $\varphi^* : \Bbbk[Y] \hookrightarrow \Bbbk[X]$ в этой ситуации инъективен, мы можем отождествить алгебру $\Bbbk[Y]$ с её образом $\varphi^*(\Bbbk[Y]) \subset \Bbbk[X]$. При таком отождествлении морфизм $\varphi = \varphi^{**} : \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X] \to \operatorname{Spec_m} \Bbbk[Y]$ переводит каждый максимальный идеал из $\Bbbk[X]$ в его пересечение с подалгеброй $\Bbbk[Y] \subset \Bbbk[X]$, и сюрьективность $\varphi$ означает, что любой максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[Y]$ является пересечением подалгебры $\Bbbk[Y] \subset \Bbbk[X]$ с каким-нибудь максимальным идеалом $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \Bbbk[X]$. Если идеал $\mathfrak{m}\Bbbk[X]$, порождённый элементами идеала $\mathfrak{m}$ в объемлющей алгебре $\Bbbk[X]$, является собственным, то нужное равенство $\mathfrak{m} = \widetilde{\mathfrak{m}} \cap \Bbbk[Y]$ выполняется для любого максимального идеала $\widetilde{\mathfrak{m}} \supset \mathfrak{m}\Bbbk[X]$. Проверим, для любого собственного идеала $J \subset \Bbbk[Y]$, идеал $J\Bbbk[X] \subsetneq \Bbbk[X]$ тоже собственный.

Пусть функции $f_1, f_2, \dots, f_m$ порождают $\Bbbk[X]$ как модуль над $\Bbbk[Y]$. Если $J\Bbbk[X] = \Bbbk[X]$, то каждую из них можно записать в виде $f_i = \sum\limits_\nu f_\nu c_{\nu i}$, где все $c_{\nu i} \in J$. Как и в доказательстве

лем. 3.2 на стр. 46 это приводит к матричному равенству $(f_1, f_2, \dots, f_m) \cdot (E - C) = 0$, где матрица $C = \left(c_{\nu i}\right) \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(J)$, а $E$ — единичная матрица. Поэтому умножение на $\det(E - C)$ аннулирует алгебру $\Bbbk[X]$, откуда $\det(E - C) = 0$. Раскрывая этот определитель, заключаем, что $1 \in J$, т. е. идеал $J$ не является собственным.

Для доказательства последнего утверждения леммы рассмотрим произвольное собственное замкнутое подмножество $Z \subsetneq X$ и любую ненулевую функцию $f \in \Bbbk[X]$, тождественно зануляющуюся вдоль $Z$. Поскольку функция $f$ цела над подалгеброй $\varphi^*(k[Y])$, она удовлетворяет уравнению $f^m + \varphi^*(g_1)f^{m-1} + \dots + \varphi^*(g_{m-1})f + \varphi^*(g_m) = 0$, в котором $g_i \in \Bbbk[Y]$. Если $X$ неприводимо, функция $f$ не является делителем нуля, и сокращая, при необходимости, это уравнение на $f$, мы можем считать, что его свободный член $\varphi^*(g_m) \neq 0$, а значит, и $g_m \neq 0$. Вычисляя левую часть уравнения в точках $z \in Z$, заключаем, что функция $g_m$ тождественно зануляется на $\varphi(Z) \subset Y$. Стало быть $\varphi(Z) \neq Y$. □

**3.5.4. Нормальные многообразия.** Аффинное алгебраическое многообразие $Y$ называется *нормальным*, если оно неприводимо и его координатная алгебра $\Bbbk[Y]$ целозамкнута в поле рациональных функций $\Bbbk(Y) = Q_{\Bbbk[Y]}$, т. е. является *нормальным кольцом* в смысле n° 3.1.5. Например, любое аффинное многообразие с факториальной координатной алгеброй нормально. В частности, нормальны все аффинные пространства[1] $\mathbb{A}^n$.

Предложение 3.9
Всякий сюрьективный конечный морфизм $\varphi : X \to Y$ в нормальное многообразие $Y$ открыт[2] и сюрьективно отображает каждую неприводимую компоненту многообразия $X$ на всё $Y$.

Доказательство. Отождествим $\Bbbk[Y]$ с подалгеброй в $\Bbbk[X]$ при помощи инъективного гомоморфизма $\varphi^*$. Открытость $\varphi$ означает, что образ любого главного открытого множества $\mathcal{D}(f) \subset X$ содержит некоторую главную открытую окрестность каждой своей точки, т. е. для любой функции $f \in \Bbbk[X]$ и любой точки $p \in X$, в которой $f(p) \neq 0$, существует такая функция $a \in \Bbbk[Y]$, что $\varphi(p) \in \mathcal{D}(a) \subset \varphi(\mathcal{D}(f))$ на многообразии $Y$. Чтобы предъявить такую функцию $a$, рассмотрим отображение $\psi = \varphi \times f : X \to Y \times \mathbb{A}^1$, $p \mapsto \big(\varphi(p), f(p)\big)$. Его гомоморфизм поднятия

$$\psi^* : \Bbbk[Y \times \mathbb{A}^1] = \Bbbk[Y][t] \to \Bbbk[X]$$

является гомоморфизмом вычисления полиномов от $t$ с коэффициентами из подалгебры $\Bbbk[Y] \subset \Bbbk[X]$ на элементе $f \in \Bbbk[X]$. Будучи целой над подалгеброй $\Bbbk[Y]$, алгебра $\Bbbk[X]$ тем более цела над образом гомоморфизма $\psi^*$. По сл. 3.5 на стр. 52 минимальный многочлен $\mu_f$ элемента $f$ над полем $\Bbbk(Y)$ лежит в $\Bbbk[Y]$. Поэтому ядром гомоморфизма $\psi^*$ является главный идеал $(\mu_f) \subset \Bbbk[Y][t]$. Таким образом, морфизм $\psi$ конечен и сюрьективно отображает многообразие $X$ на гиперповерхность в $Y \times \mathbb{A}^1$, образованную нулями функции

$$\mu_f(y;t) = t^m + a_1(y)t^{m-1} + \dots + a_m(y). \tag{3-20}$$

Ограничение этой функции на аффинную прямую $y \times \mathbb{A}^1$ над точкой $y \in Y$ является полиномом от $t$, корни которого суть значения функции $f : X \to \Bbbk$ во всех точках многообразия $X$, которые переводятся в точку $y$ отображением $\varphi$. В частности, образ $\varphi(\mathcal{D}(f))$ состоит из таких точек $y \in Y$, над которыми у многочлена $\mu(y;t)$ имеется ненулевой корень. Поскольку поле $\Bbbk$

[1] Включая одноточечное пространство $\mathbb{A}^0 = \mathrm{Spec}_\mathrm{m}\,\Bbbk$.
[2] Т. е. $\varphi(U)$ открыто в $Y$ для любого открытого $U \subset X$

алгебраически замкнуто, наличие ненулевого корня равносильно тому, что хоть один из коэффициентов $a_i(y)$ не равен в точке $y$ нулю. По нашему предположению, в точке $y = \varphi(p)$ такой коэффициент $a_i$ имеется. Тогда $\varphi(p) \in \mathcal{D}(a_i) \subset \varphi(\mathcal{D}(f))$, поскольку многочлен $\mu_f(q;t) \in \Bbbk[t]$ имеет ненулевой корень над всеми точками $q \in \mathcal{D}(a_i) \subset Y$.

Что касается ограничения $\varphi$ на неприводимые компоненты $X_i \subset X$, то для каждого $i$ множество $U_i = X \smallsetminus \bigcup\limits_{\nu \neq i} X_\nu = X_i \smallsetminus \bigcup\limits_{\nu \neq i} (X_i \cap X_\nu)$ открыто в $X$ и плотно в $X_i$. Поскольку $\varphi(U_i)$ открыто, а $Y$ неприводимо, $\varphi(U_i)$ плотно в $Y$, откуда $\varphi(X_i) = \overline{\varphi(U_i)} = Y$. □

## Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 3.1. Если $a$ и $b$ являются старшими коэффициентами многочленов $f(x)$ и $g(x)$ из идеала $I$, причём $\deg f = m$ и $\deg g = n$, где $m \geqslant n$, то $a + b$ либо равно нулю, либо является старшим коэффициентом многочлена $f(x) + x^{m-n} \cdot g(x) \in I$ степени $m$. Аналогично, для любого $\alpha \in A$ произведение $\alpha a$ является старшим коэффициентом многочлена $\alpha f(x) \in I$ степени $m$.

Упр. 3.2. Пусть $\pi : A \twoheadrightarrow B$ — гомоморфизм факторизации. Полный прообраз $\pi^{-1}(I)$ любого идеала $I \subset B$ является конечно порождённым идеалом в $A$. Образы его образующих в $B$ продят идеал $I$.

Упр. 3.5. В силу универсального свойства поля частных, любой ненулевой гомоморфизм алгебры $A$ без делителей нуля в любое поле однозначно продолжается до вложения в это поле поля частных алгебры $A$.

Упр. 3.6. По предл. 3.2 целое замыкание $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m)$ в $Q_A$ является полем. Если оно содержит $A$, то содержит и $Q_A$.

Упр. 3.10. Если $a^n = 0$ и $b^m = 0$, то $(a + b)^{m+n-1} = 0$ и $(ca)^n = 0$ для любого $c \in A$.

Упр. 3.11. Так как для простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ фактор кольцо $A/\mathfrak{p}$ не имеет делителей нуля, гомоморфизм факторизации $A \twoheadrightarrow A\mathfrak{p}$ аннулирует все нильпотенты. Поэтому $\mathfrak{n}(A) \subset \bigcap \mathfrak{p}$. Если элемент $a \in A$ не является нильпотентом, его неотрицательные целые степени $a^m$ образуют содержащее единицу и не содержащее нуля мультипликативно замкнутое подмножество в $A$. Локализация $A[a^{-1}]$ кольца $A$ по этому мультипликативно замкнутому подмножеству[1] является ненулевым коммутативным кольцом с единицей. Полный прообраз любого простого идеала $\mathfrak{m} \subset A[a^{-1}]$ относительно канонического гомоморфизма $A \to A[a^{-1}]$ является не содержащим элемента $a$ простым идеалом в кольце $A$.

Упр. 3.15. Это геометрическая версия китайской теоремы об остатках. Отображение $\varphi : \Bbbk[X] \hookrightarrow \Bbbk[Y] \times \Bbbk[Z]$, переводящее $f \in \Bbbk[X]$ в пару $(f|_Y, f|_Z)$, инъективно, т. к. $Y \cup Z = X$. По теореме Гильберта нулях идеал $I(Y) + I(Z) \subset \Bbbk[X]$, задающий в $X$ пересечение $Y \cap Z = \varnothing$, содержит единицу, т. е. существуют такие $s \in I(Y)$ и $t \in I(Z)$, что $1 = s + t$. Тогда $\varphi(s) = \varphi(1-t) = (0, 1)$ и $\varphi(t) = \varphi(1 - s) = (1, 0)$, а произвольная пара классов $(f \pmod{I(Y)}, g \pmod{I(Z)}) \in \Bbbk[Y] \times \Bbbk[Z]$ равна $\varphi(ft + gs)$, что означает сюрьективность $\varphi$.

Упр. 3.18. Первые три равенства и включения $V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J) \subset V(IJ) \subset V(I) \cup V(J)$ очевидны.

Упр. 3.19. Объединение любого семейства главных открытых множеств $\mathcal{D}(f_\nu)$ является дополнением к множеству нулей идеала $I$, порождённого функциями $f_\nu$. Но этот идеал порождается конечным числом функций $f_1, f_2, \dots, f_k$ из числа $f_\nu$. Поэтому, $V(I) = V(f_1) \cap V(f_2) \cap \ldots \cap V(f_k)$, а значит $X \smallsetminus V(I) = V(f_1) \cup V(f_2) \cup \ldots \cup V(f_k)$.

Упр. 3.20. Если $V(f) = X$, то $f \in I(X)$, и значит, $f = 0$ в $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$. Если $V(f) = \varnothing$, то множество нулей идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, порождённого идеалом $I(X)$ и многочленом $f$ пусто, и из слабой теоремы о нулях вытекает, что $1 \equiv sf \pmod{I(X)}$ для некоторого $s \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, т. е. $f$ обратим в $\Bbbk[X]$.

Упр. 3.21. $Y = (Y \cap Z) \cup \overline{Y \smallsetminus Z}$, где по условию $Y \cap Z \neq Y$.

Упр. 3.24. Делители нуля в $\left(f^{-1}\right)$ исчерпываются пересечениями этого идеала с идеалами $I(X_i)$ неприводимых компонент $X_i$ многообразия $X$. Так как неделители нуля в $\left(f^{-1}\right)$ по определению имеются, каждое из пересечений $\left(f^{-1}\right) \cup I(X_i) \subsetneq \left(f^{-1}\right)$ является собственным векторным

[1] Т. е. кольцо дробей вида $b/a^m$ с $b \in A$, $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

подпространством в $(f^{-1})$. Если бы все неделители нуля тоже содержались в каком-нибудь собственном подпространстве, всё пространство $(f^{-1})$ оказалось бы объединением конечного набора собственных подпространств, что невозможно над бесконечным полем.

Упр. 3.25. Как и в упр. 3.24 каждое пересечение $I \cap I(X_i)$ является собственным векторным подпространством в $I$, поскольку включение $I \subset I(X_\nu)$ означало бы, что $X_\nu \subset \bigcup\limits_{i \neq j}(X_i \cap X_j)$, а это в силу непроводимости $X_\nu$ влечёт включение $X_\nu \subset X_i \cap X_j$ для некоторых $i \neq j$, что невозможно, т. к. ни одна из неприводимых компонент не содержится в другой. Если все неделители нуля в $I$ лежат в собственном подространстве, то $I$ оказывается объединением конечного числа собственных подпространств.

Упр. 3.26. Элемент прямого произведения не делит нуль тогда и только тогда, когда каждая из его компонент не делит нуль: $S^{-1}_{K_1 \times K_2 \times \dots \times K_k} = S^{-1}_{K_1} \times S^{-1}_{K_2} \times \dots \times S^{-1}_{K_k}$.

Упр. 3.27. Используйте покрытие $U = \bigcup \mathcal{D}(x_i)$ и лем. 3.7.

Упр. 3.29. Пусть $A = \Bbbk[X]$, $B = \Bbbk[Y]$. Вложение $\varphi^* : B \hookrightarrow A$ задаёт на $A$ структуру конечно порождённой $B$-алгебры, т. е. представляет $A$ в виде $A \simeq B[x_1, x_2, \dots, x_m]/J$, что и утверждается.

Упр. 3.30. $\varphi^*(\Bbbk[Y]) = \Bbbk[\overline{\varphi(X)}]$.