§1. Проективная геометрия

1.1. Соглашения об обозначениях. Всюду далее мы обозначаем через V векторное пространство над произвольным полем $\Bbbk$, а через V^* — двойственное пространство однородных линейных функций $V \to \Bbbk$. Значение ковектора $\varphi \in V^*$ на векторе $v \in V$ обозначается одним из трёх способов: $\varphi(v) = \langle \varphi , v \rangle = \mathrm{ev}_v(\xi)$. Через $e_0, e_1, \dots , e_n$ и $x_0, x_1, \dots , x_n$, где $n + 1 = \dim V$, по умолчанию обозначаются двойственные базисы пространств V и V^*, так что

$$\langle x_i , e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j\,. \end{cases}$$

Через $\mathbb{A}(V)$ мы обозначаем ассоциированное с V *аффинное пространство*[1]. Через

$$SV^* = \bigoplus_{d \geqslant 0} S^d V^* \simeq \Bbbk[x_0, x_1, \dots , x_n]$$

обозначается *симметрическая алгебра* пространства V^*, изоморфная алгебре *многочленов* от переменных x_i. Она градуирована подпространствами $S^d V^* \subset SV^*$ *однородных* многочленов степени d, которые являются конечными линейными произведений $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_d$ с $\varphi_i \in V^*$.

1.2. Проективное пространство. Со всяким $(n+1)$-мерным векторным пространством V, помимо $(n + 1)$-мерного аффинного пространства $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$, связано n-мерное *проективное пространство* $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, точками которого, по-определению, являются одномерные векторные подпространства в V, или, что то же самое, проходящие через начало координат аффинные прямые в $\mathbb{A}(V)$. Чтобы видеть их как «обычные» точки, внутрь $\mathbb{A}(V)$ следует поместить экран — не содержащую начала координат аффинную гиперплоскость $U_\xi \subset \mathbb{A}(V)$, задаваемую неоднородным линейным уравнением $\xi(x) = 1$, где $\xi \in V^*$ — любая ненулевая линейная форма на V (см. рис. 1◇1).

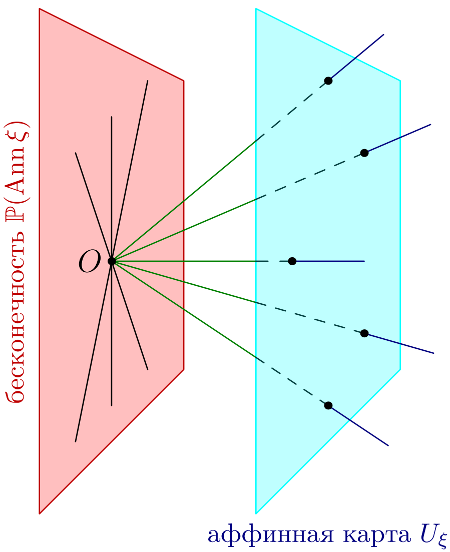

Рис. 1◇1. Проективный мир.

Упражнение 1.1. Убедитесь, что соответствие $\xi \mapsto U_\xi$ задаёт биекцию между ненулевыми ковекторами $\xi \in V^*$ и не проходящими через начало координат аффинными гиперплоскостями в $\mathbb{A}(V)$.

Всякий такого рода экран U_ξ называется *аффинной картой* на $\mathbb{P}(V)$. В карте U_ξ видны все одномерные подпространства, порождённые векторами $v \in V$ с $\xi(v) \neq 0$. Дополнение $\mathbb{P}_n \smallsetminus U_\xi$ состоит из одномерных подпространств n-мерного векторного подпространства $\mathrm{Ann}(\xi) = \{v \in V \mid \langle \xi , v \rangle = 0\}$ — проходящей через начало координат параллельной копии гиперплоскости U_ξ. Эти одномерные подпространства составляют $(n-1)$-мерное проективное пространство $\mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}\big(\mathrm{Ann}(\xi)\big)$, которое называется *бесконечно удалённой гиперплоскостью* карты U_ξ. Точки $\mathbb{P}(\mathrm{Ann}\,\xi)$ можно воспринимать как *направления* в аффинной карте U_ξ. Итак, n-мерное проективное пространство $\mathbb{P}_n$ раз-

[1] Его точки, по определению, взаимно однозначно соответствуют векторам из V, и их можно представлять себе как «концы» этих векторов, отложенных от отвечающей нулевому вектору точки $O \in \mathbb{A}(V)$

бивается в объединение непересекающихся аффинных пространств всех промежуточных размерностей:

$$\mathbb{P}_n = U_\xi \sqcup \mathbb{P}(\mathrm{Ann}\,\xi) = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}_{n-2} = \cdots = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{A}^0$$

(где $\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}_0$ это одна точка).

Упражнение 1.2. Какое соотношение на q получится, если независимо подсчитать количества точек, из которых состоят левая и правая части этого разбиения над конечным полем из q элементов?

1.2.1. Глобальные однородные координаты. Ненулевые векторы

$$v = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \quad \text{и} \quad w = (y_0, y_1, \ldots, y_n),$$

заданные строками своих координат в каком-нибудь базисе $e_0, e_1, \ldots, e_n$ пространства V, изображаются одной и той же точкой $p \in \mathbb{P}_n$, если и только если их координаты пропорциональны, что означает равенство отношений[1] $x_\mu : x_\nu = y_\mu : y_\nu$ для всех $0 \leqslant \mu \neq \nu \leqslant n$. Таким образом, точке $p \in \mathbb{P}_n$ корректно соответствует не набор из $n+1$ координат, а набор из n отношений $(x_0 : x_1 : \ \ldots \ : x_n)$ между ними. Эти отношения называется *однородными координатами* точки p в базисе $e_0, e_1, \ldots, e_n$.

1.2.2. Локальные аффинные координаты. Рассмотрим на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ аффинную карту $U_\xi = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}(V) \mid \xi(x) = 1\}$, отвечающую какому-нибудь ненулевому ковектору $\xi \in V^*$. Любые n ковекторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in V^*$, таких что $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ образуют базис в V^*, задают внутри карты U_ξ *локальные аффинные координаты*. А именно, если векторы $e_0, e_1, \ldots, e_m \in V$ составляют двойственный к $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ базис, то точка $e_0 \in U_\xi$ будет началом отсчёта аффинной координатной системы, а векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ будут базисными векторами в векторном пространстве $\mathrm{Ann}\,\xi$, с которым ассоциировано аффинное пространство U_ξ. Чтобы вычислить локальные аффинные координаты точки $p \in \mathbb{P}_n$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \ \ldots \ : x_n)$, следует сначала выбрать в одномерном подпространстве, отвечающем точке p, вектор $v = p / \xi(p) \in U_\xi$, такой что $\xi(v) = 1$, а затем вычислить значения n линейных форм ξ_ν на этом векторе. Отметим, что получающиеся таким образом значения локальных аффинных координат $x_i(p) = \xi_i(v) = \xi_i(p) / \xi(p)$ *нелинейно* зависят от однородных координат точки p.

Пример 1.1 (проективная прямая)
$\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ покрывается двумя аффинными картами $U_0 = U_{x_0}$ и $U_1 = U_{x_1}$, представляющими собою аффинные прямые с уравнениями $x_0 = 1$ и $x_1 = 1$ (см. рис. 1◇2). Карта U_0 покрывает все точки $\mathbb{P}_1$ кроме вертикальной координатной оси $(0 : 1)$, которая является единственной бесконечно удалённой точкой для карты U_0. Точка $(x_0 : x_1)$ с $x_0 \neq 0$ видна в карте U_1 как $\left(1 : \frac{x_1}{x_0}\right)$ и функция $t = x_1|_{U_0} = x_1 / x_0$ может использоваться в качестве локальной аффинной координаты в этой карте. Карта U_1 покрывает все точки $(x_0 : x_1) = (x_0 / x_1 : 1)$ с $x_1 \neq 0$, и функция $s = x_0|_{U_1} = x_0 / x_1$ годится в качестве локальной координаты в U_1. Единственной бесконечно удалённой точкой для карты U_1 является горизонтальная координатная ось $(1 : 0)$. Координаты s и t одной и той же точки $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}_1$, видимой сразу в обеих картах, связаны соотношением $s = 1/t$.

Упражнение 1.3. Убедитесь в этом.

[1] где равенства вида $0 : x = 0 : y$ и $x : 0 = y : 0$ также допускаются

Поэтому $\mathbb{P}_1$ можно воспринимать как результат склейки двух аффинных координатных прямых $\mathbb{A}^1$ (одна — с координатой s, другая — с координатой t) вдоль дополнения до начала координат по следующему правилу: точка с координатой s на одной прямой приклеивается к точке с координатой $t = 1/s$ на другой.

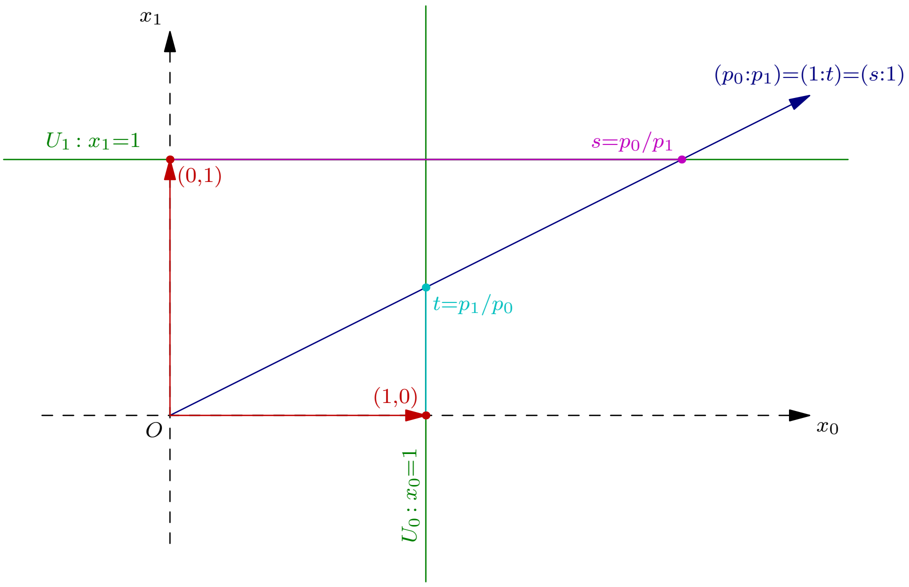

Рис. 1◇2. Стандартные карты на $\mathbb{P}_1$

Если основное поле $\Bbbk = \mathbb{R}$, то в результате такой склейки мы получим окружность диаметра 1, картами на которой служат две диаметрально противоположные касательные прямые (см. рис. 1◇3), а отображения окружности на карты суть центральные проекции из точек, диаметрально противоположных к точке касания этой карты с окружностью.

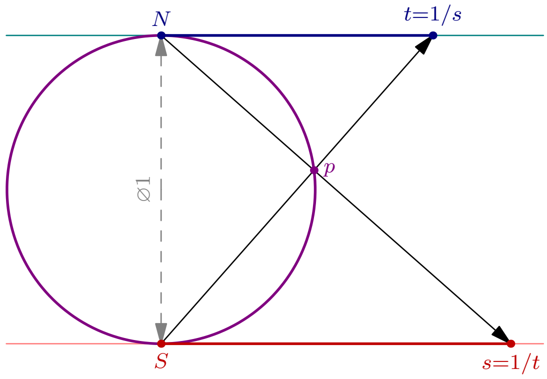

Рис. 1◇3. $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \simeq S^1$

Точно также при $\Bbbk = \mathbb{C}$ в результате склейки двух экземпляров комплексной аффинной прямой $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ по правилу $s \leftrightarrow t = 1/s$ мы получим сферу диаметра 1, для которой наши карты являются диаметрально противоположными касательными плоскостями, а сопоставление точке сферы точки на карте задаётся центральной проекцией из диаметрально противоположного к точке касания «полюса» сферы, как на рис. 1◇4: если ориентации касательных плоскостей выбраны согласованным образом, как на рис. 1◇4, комплексные числа s и t будут иметь противоположные аргументы и — согласно рис. 1◇3 — обратные модули.

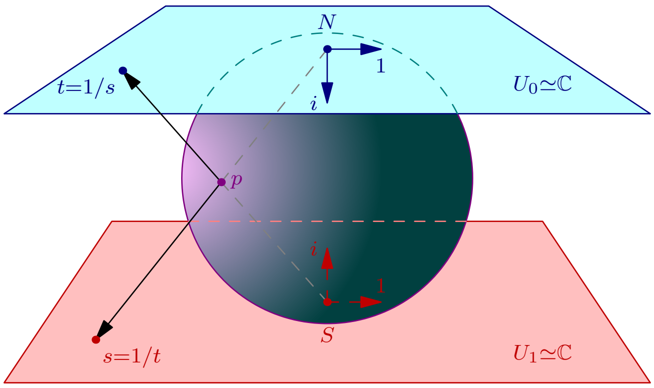

Рис. 1⋄4. $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq S^2$

Пример 1.2 (стандартное аффинное покрытие $\mathbb{P}_n$)
Набор из $(n+1)$ аффинных карт $U_\nu = U_{x_\nu}$, задаваемых в $\mathbb{A}^{n+1}$ уравнениями $\{x_\nu = 1\}$, называется *стандартным открытым покрытием* $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\Bbbk^{n+1})$. Для каждого $\nu = 0, 1, \dots, n$ в качестве стандартных локальных аффинных координат на U_ν берутся n форм

$$t_i^{(\nu)} = x_i|_{U_\nu} = \frac{x_i}{x_\nu} \quad \text{с} \quad 0 \leqslant i \leqslant n\,,\ i \neq \nu\,.$$

Таким образом, пространство $\mathbb{P}_n$ можно представлять себе как результат склейки $(n+1)$ различных копий $U_0, U_1, \dots, U_n$ аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ по их фактическим пересечениям внутри $\mathbb{P}_n$. В однородных координатах на $\mathbb{P}_n$ пересечение $U_\mu \cap U_\nu$ состоит из всех таких x, у которых обе координаты x_μ и x_ν не обращаются в 0. В локальных аффинных координатах на U_μ и U_ν это подмножество задаётся, соответственно, неравенствами $t_\nu^{(\mu)} \neq 0$ и $t_\mu^{(\nu)} \neq 0$. При этом точка $t^{(\mu)} \in U_\mu$ склеивается с точкой $t^{(\nu)} \in U_\nu$, если и только если $t_\nu^{(\mu)} = 1\,/\,t_\mu^{(\nu)}$ и $t_i^{(\mu)} = t_i^{(\nu)}\,/\,t_\mu^{(\nu)}$ для $i \neq \mu, \nu$. Правые части этих равенств называются *функциями перехода* от локальных координат $t^{(\nu)}$ к локальным координатам $t^{(\mu)}$.

Пример 1.3 (аффинные коники)
Посмотрим как выглядит в различных аффинных картах плоская проективная кривая C второй степени, заданная в однородных координатах на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ уравнением

$$x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 \tag{1-1}$$

В стандартной карте U_{x_1}, где $x_1 = 1$, в локальных координатах

$$t_0 = x_0|_{U_{x_1}} = x_0\,/\,x_1\,, \quad t_2 = x_2|_{U_{x_1}} = x_2\,/\,x_1$$

уравнение (1-1) превращается в уравнение гиперболы $t_2^2 - t_0^2 = 1$. В стандартной карте U_{x_2}, где $x_2 = 1$, с локальными координатами $t_0 = x_0|_{U_{x_2}} = x_0/x_2$, $t_1 = x_1|_{U_{x_2}} = x_1/x_2$ возникает уравнение окружности $t_0^2 + t_1^2 = 1$. В карте $U_{x_1+x_2}$, где $x_1 + x_2 = 1$, в локальных аффинных координатах $t = x_0|_{U_{x_1+x_2}} = x_0/(x_1+x_2)$, $u = (x_2 - x_1)|_{U_{x_1+x_2}} = (x_2 - x_1)/(x_2 + x_1)$ получается[1] уравнение параболы $t^2 = u$. Таким образом, аффинные эллипс, гипербола и парабола суть изображения одной и той же проективной кривой (1-1) в различных картах. Вид C в карте $U \subset \mathbb{P}_2$ определяется тем, как располагается по отношению к C бесконечно удалённая прямая этой карты: эллипс, парабола и гипербола возникают, соответственно, когда эта прямая не пересекается с C, касается C и пересекается с C в двух различных точках (см. рис. 1⋄5).

[1] Надо перенести x_1^2 в (1-1) слева направо и поделить обе части на $x_2 + x_1$.

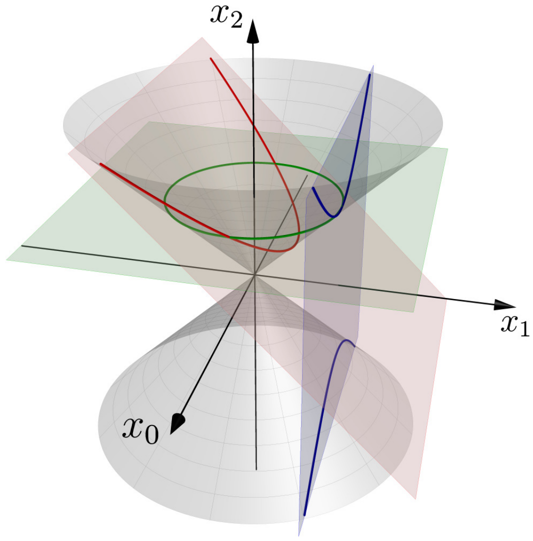

Рис. 1⋄5. Аффинные коники.

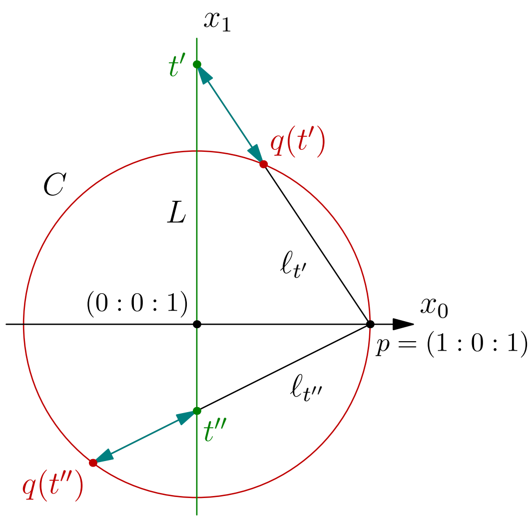

Рис. 1⋄6. Проекция коники на прямую.

1.2.3. Дополнительные подпространства и проекции. Проективные подпространства $K = \mathbb{P}(U)$ и $L = \mathbb{P}(W)$ пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ называются *дополнительными*, если $K \cap L = \varnothing$ и $\dim K + \dim L = n - 1$. Например, любые две непересекающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ дополнительны. На языке линейной алгебры дополнительность означает, что $U \cap W = 0$ и $\dim U + \dim W = \dim V$, т. е. $V = U \oplus W$. В этом случае любой вектор $v \in V$ имеет единственное разложение $v = u + w$ с $u \in U$ и $w \in W$, причём обе компоненты этого разложения отличны от нуля, если v не содержится ни в U, ни в W. Геометрически это означает, что для любой точки $p \notin K \sqcup L$ существует единственная прямая $\ell = (q, r)$, проходящая через p и пересекающая оба подпространства K, L.

Упражнение 1.4. Убедитесь в этом.

Для каждой пары дополнительных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ *проекция на L из K*

$$\pi_L^K : (\mathbb{P}_n \smallsetminus K) \to L\,,$$

тождественно действует на L и переводит каждую точку $p \in \mathbb{P}_n \smallsetminus (K \sqcup L)$ в точку пересечения с L единственной прямой, проходящей через p и пересекающей как K, так и L. В однородных координатах $(x_0 : x_1 : \;\dots\; : x_n)$, согласованных с разложением $V = U \oplus W$ так, что $(x_0 : x_1 : \;\dots\; : x_m)$ являются координатами в K, а $(x_{m+1} : x_{m+2} : \;\dots\; : x_n)$ — координатами в L, проекция π_L^K просто удаляет первые $(m+1)$ координат x_ν с $0 \leqslant \nu \leqslant m$.

Пример 1.4 (проектирование коники на прямую)
Спроектируем гладкую конику C из прим. 1.3 из точки $p = (1 : 0 : 1) \in C$ на прямую L, заданную уравнением $x_0 = 0$. В стандартной аффинной карте U_2, где $x_2 = 1$, эта проекция $\pi_L^p : C \to L$ выглядит как на рис. 1⋄6. Она является *бирациональной биекцией* между L и C, т. е. однородные координаты соответственных точек $q = (q_0 : q_1 : q_2) \in C$ и $t = (0 : t_1 : t_2) = \pi_L^p(q) \in L$ суть *рациональные* алгебраические функции друг друга:

$$\begin{gathered}(t_1 : t_2) = (\,q_1 : (q_2 - q_0))\\ (q_0 : q_1 : q_2) = (\,(t_1^2 - t_2^2) : 2\,t_1 t_2 : (t_1^2 + t_2^2))\end{gathered} \tag{1-2}$$

Упражнение 1.5. Проверьте эти формулы и убедитесь, что когда пара (t_1, t_2) пробегает $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, тройка $(q_0 : q_1 : q_2)$ пробегает все пифагоровы тройки[1] с точностью до пропорциональности.

а само отображение $\pi_L^p : C \to L$ взаимно однозначно, если доопределить его в точке p так, чтобы она переходила в точку пересечения прямой L и касательной к C в точке p прямой $x_0 = x_2$ (на рис. 1◇6 это пересечение происходит в бесконечной точке $t = (0 : 1 : 0)$). В самом деле, каждая проходящая через p прямая $\ell_t = (pt)$, за исключением касательной, пересекает C ещё ровно в одной точке $q = q(t)$, отличной от p, и координаты этой точки q рационально выражаются через коэффициенты уравнения прямой ℓ_t, являющиеся рациональными функциями от t, и координаты точки p.

1.2.4. Линейные проективные изоморфизмы. Всякий линейный изоморфизм векторных пространств $F : U \xrightarrow{\sim} W$ корректно определяет биекцию $\overline{F} : \mathbb{P}(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(W)$, которая называется *проективным линейным преобразованием* или *проективным изоморфизмом*.

Упражнение 1.6. Рассмотрим две гиперплоскости $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и точку $p \notin L_1 \cup L_2$. Убедитесь, что проекция из p задаёт проективный изоморфизм $\gamma_p : L_1 \xrightarrow{\sim} L_2$.

Лемма 1.1

Для любых двух упорядоченных наборов из $(n+2)$ точек

$$\{p_0, p_1, \dots, p_{n+1}\} \in \mathbb{P}(U), \quad \{q_0, q_1, \dots, q_{n+1}\} \in \mathbb{P}(W),$$

в каждом из которых никакие $(n+1)$ точек не лежат в одной гиперплоскости, существует единственный с точностью до пропорциональности линейный изоморфизм $F : U \xrightarrow{\sim} W$, такой что $\overline{F}(p_i) = q_i$ при всех i.

Доказательство. Зафиксируем некоторые векторы u_i и w_i, представляющие точки p_i и q_i, и возьмём $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ и $\{w_0, w_1, \dots, w_n\}$ в качестве базисов в U и W. Оператор $F : U \to W$ тогда и только тогда переводит точку p_i в точку q_i, когда $F(u_i) = \lambda_i w_i$ для некоторых ненулевых $\lambda_i \in \Bbbk$. В частности, для того, чтобы точки $p_0, p_1, \dots, p_n$ переводились преобразованием $\overline{F}$ в точки $q_0, q_1, \dots, q_n$, необходимо и достаточно, чтобы оператор F в выбранных нами базисах имел диагональную матрицу с произвольными ненулевыми константами $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ по главной диагонали. Заметим теперь, что в разложении

$$u_{n+1} = x_0 u_0 + x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$$

все координаты x_i отличны от нуля, поскольку в противном случае $n+1$ точка[2] оказались бы в одной гиперплоскости, заданной условием обращения этой координаты в нуль. Если аналогичным образом разложить вектор $w_{n+1} = y_0 w_0 + y_1 w_1 + \dots + y_n w_n$ и записать равенство $F(u_{n+1}) = \lambda_{n+1} w_{n+1}$ в виде системы равенств на координаты, мы получим на константы $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ соотношения $y_i = \lambda_{n+1}\lambda_i x_i$ (при всех $0 \leqslant i \leqslant n$), из которых $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_{n+1}^{-1} \cdot \big(y_1/x_1, y_2/x_2, \dots, y_n/x_n\big)$. Таким образом, матрица оператора F определена однозначно с точностью до постоянного множителя $\lambda_{n+1}^{-1} \neq 0$. □

Следствие 1.1

Две матрицы тогда и только тогда задают одинаковые проективные изоморфизмы, когда они пропорциональны. □

[1] Т. е. все целые решения уравнения Пифагора $q_0^2 + q_1^2 = q_2^2$

[2] а именно, p_{n+1} и все p_i с номерами, отличными от номера занулившейся координаты вектора u_{n+1}

1.2.5. Линейная проективная группа. Согласно лем. 1.1 линейные проективные автоморфизмы пространства $\mathbb{P}(V)$ образуют группу, изоморфную фактор группе полной линейной группы $\mathrm{GL}(V)$ по подгруппе гомотетий $H = \{\lambda \cdot \mathrm{Id} \mid \lambda \neq 0\} \subset \mathrm{GL}(V)$. Эта фактор группа обозначается $\mathrm{PGL}(V) = \mathrm{GL}(V)/H$ и называется *проективной линейной группой*. Если при помощи выбора базиса отождествить линейную группу $\mathrm{GL}(V)$ с группой невырожденных матриц GL_{n+1}, проективная группа $\mathrm{PGL}(V)$ отождествится с группой PGL_{n+1} невырожденных матриц, рассматриваемых с точностью до пропорциональности.

1.2.6. Дробно-линейные преобразования прямой и двойное отношение. Группа $\mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$ состоит из классов пропорциональности матриц $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с $ad - bc \neq 0$. Она действует на $\mathbb{P}_1$ по правилу $\overline{A} : (x_0 : x_1) \mapsto ((ax_0 + bx_1) : (cx_0 + dx_1))$. В стандартной аффинной карте $U_1 \simeq \mathbb{A}^1$ с аффинной координатой $t = x_0/x_1$, это действие имеет вид дробно линейного преобразования $t \mapsto (at+b)/(ct+d)$. Единственное дробно линейное преобразование, переводящее три заданных различных точки q, r, s в ∞, 0, 1, очевидно, таково:

$$t \mapsto \frac{t-r}{t-q} \cdot \frac{s-r}{s-q} \tag{1-3}$$

Отметим, что разность аффинных координат $a = a_0/a_1$ и $b = b_0/b_1$ пары точек $a = (a_0 : a_1)$ и $b = (b_0 : b_1)$ на $\mathbb{P}_1$ с точностью до множителя совпадает с определителем их однородных координат:

$$a - b = \frac{a_0}{a_1} - \frac{b_0}{b_1} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_1 b_1} = \frac{\det(a, b)}{a_1 b_1}\,.$$

Для четырёх различных точек $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_1$ величина

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = \frac{(p_1 - p_3)\,(p_2 - p_4)}{(p_1 - p_4)\,(p_2 - p_3)} = \frac{\det(p_1, p_3) \cdot \det(p_2, p_4)}{\det(p_1, p_4) \cdot \det(p_2, p_3)}\,. \tag{1-4}$$

называется *двойным отношением*[1] этих четырёх точек. Согласно (1-3), двойное отношение (1-4) представляет собою образ точки p_4 при единственном дробно линейном автоморфизме $\mathbb{P}_1$, переводящем точки p_1, p_2, p_3 в точки $\infty,\ 0,\ 1$ соответственно. Отсюда сразу следует, что двойное отношение четырёх различных точек может принимать любые значения кроме ∞, 0 и 1 и что две упорядоченных четвёрки точек тогда и только тогда переводятся одна в другую дробно линейным преобразованием прямой, когда их двойные отношения одинаковы.

Упражнение 1.7. Докажите последнее утверждение.

Поскольку замена однородных координат является именно таким преобразованием, мы заключаем, что правая часть равенства (1-4) не зависит от выбора однородных координат, а средняя часть (содержащая разности аффинных координат точек) не зависит ни от выбора аффинной карты, ни от выбора локальной аффинной координаты в ней (при условии, что карта содержит все четыре точки, т. е. значения p_1, p_2, p_3, p_4 конечны).

Упражнение 1.8. Убедитесь, при действии симметрической группы S_4 перестановками точек p_1, p_2, p_3, p_4, четвертная подгруппа Клейна $V_4 \subset S_4$ сохраняет двойное отношение этих

[1] по-английски *cross-ratio*

точек, и если $[p_1, p_2, p_3, p_4] = \vartheta$, то

$$\begin{aligned}
[p_1,p_2,p_3,p_4] = [p_2,p_1,p_4,p_3] = [p_3,p_4,p_2,p_1] = [p_4,p_3,p_2,p_1] &= \vartheta\\
[p_2,p_1,p_3,p_4] = [p_1,p_2,p_4,p_3] = [p_3,p_4,p_1,p_2] = [p_4,p_3,p_1,p_2] &= 1/\vartheta\\
[p_3,p_2,p_1,p_4] = [p_2,p_3,p_4,p_1] = [p_1,p_4,p_2,p_3] = [p_4,p_1,p_2,p_3] &= \vartheta/(\vartheta-1)\\
[p_4,p_2,p_3,p_1] = [p_2,p_4,p_1,p_3] = [p_3,p_1,p_2,p_4] = [p_1,p_3,p_2,p_4] &= 1-\vartheta\\
[p_2,p_3,p_1,p_4] = [p_3,p_2,p_4,p_1] = [p_1,p_4,p_3,p_2] = [p_4,p_1,p_3,p_2] &= (\vartheta-1)/\vartheta\\
[p_3,p_1,p_2,p_4] = [p_1,p_3,p_4,p_2] = [p_2,p_4,p_1,p_3] = [p_4,p_2,p_1,p_3] &= 1/(1-\vartheta)\,.
\end{aligned} \tag{1-5}$$

Пример 1.5 (гармонические пары точек)
Четыре точки $a, b, c, d \in \mathbb{P}_1$ называются *гармоническими*, если $[a, b, c, d] = -1$. Геометрически это условие означает, что в аффинной карте, для которой точка a является бесконечностью, точка b является центром тяжести точек c и d. Из формул (1-5) вытекает, что гармоничность равносильна тому, что двойное отношение не меняется при перестановке точек в одной пар $\{a, b\}$, $\{c, d\}$, или при перестановке этих пар между собою. Таким образом, *гармоничность* — это *симметричное* отношение на множестве *неупорядоченных* пар точек $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ на $\mathbb{P}_1$.

Пример 1.6 (четырёхвершинник)
С каждой четвёркой точек $a, b, c, d \in \mathbb{P}_2$, никакие 3 из которых не коллинеарны, связана конфигурация из трёх пар прямых, соединяющих пары данных точек (см. рис. 1◇7) и называемых *сторонами* четырёхвершинника $abcd$. Пусть эти прямые пересекаются в точках

$$x = (ab) \cap (cd)\,, \quad y = (ac) \cap (bd)\,, \quad z = (ab) \cap (cd)\,. \tag{1-6}$$

Покажем, что в каждом из трёх пучков прямых с центрами в точках x, y, z пара сторон четырёхвершинника гармонична паре сторон треугольника xyz. Для этого запараметризуем пучок всех проходящих через точку x прямых точками прямой (ad) или точками прямой (bc) и проверим, что прямая (xy) пересекает прямые (ad) и (bc) по таким точкам x', x'', что

$$[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = -1\,.$$

Поскольку центральные проекции из x и из y являются дробно линейными изоморфизмами между прямыми (ad) и (bc), мы имеем следующие равенства двойных отношений соответственных точек: $[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = [d, a, z, x']$. Коль скоро при перестановке первых двух точек двойное отношение не поменялось, оно равно -1, как и утверждалось.

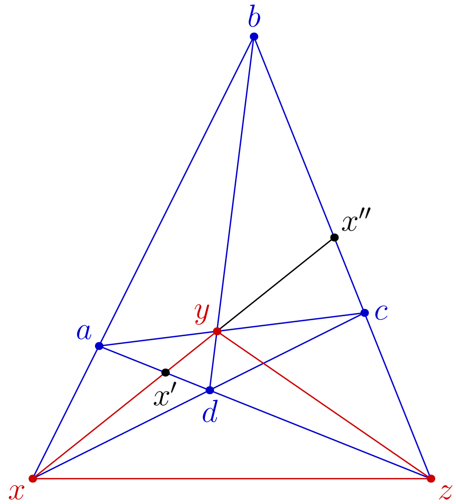

Рис. 1◇7. Четырёхвершинник.

1.3. Задание фигур полиномиальными уравнениями. С каждым вектором $v \in V$ связано отображение вычисления $\mathrm{ev}_v : SV^* \to \Bbbk$, $f \mapsto f(v)$, переводящее произведение линейных форм $f = \varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_m \in S^mV^*$ в произведение их значений $f(v) \overset{\text{def}}{=} \prod \varphi(v)$ на векторе v. В терминах координат, значение многочлена $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ на векторе v равно результату подстановки вместо каждой переменной x_i значения i-той координаты вектора v в базисе пространства V, двойственном к выбранному базису $x_0, x_1, \dots, x_n$ пространства V^*. Таким образом, каждый многочлен $f \in SV^*$ задаёт функцию $f : \mathbb{A}(V) \to \Bbbk$, $v \mapsto f(v)$, на аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$. Все такие функции называются *полиномиальными*.

Упражнение 1.9. Покажите, что над конечным полем $\Bbbk$ любая функция $\mathbb{A}(V) \to \Bbbk$ является полиномиальной, причём существуют ненулевые многочлены, задающие нулевую полиномиальную функцию. Напротив, над бесконечным полем имеются неполиномиальные функции $\mathbb{A}(V) \to \Bbbk$, а два многочлена задают одинаковые полиномиальные функции только когда они равны как многочлены.

1.3.1. Аффинные многообразия. Множество нулей многочлена f на аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ обозначается через $V(f) = \{p \in \mathbb{A}(V) \mid f(p) = 0\}$ и называется *аффинной алгебраической гиперповерхностью*. Пересечения аффинных алгебраических гиперповерхностей, т. е. множества решений систем полиномиальных уравнений на координаты, называются *аффинными алгебраическими многообразиями*. Например, аффинными многообразиями являются аффинные подпространства — они задаются системами линейных уравнений.

1.3.2. Проективные многообразия. На проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$ отличный от константы многочлен от однородных координат обычно *не задаёт* никакой функции, т. к. значение $f(\lambda v)$ зависит от λ. Тем не менее, для любого *однородного* многочлена f степени d множество его нулей $V(f) \overset{\text{def}}{=} \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$ является корректно определенным подмножеством в $\mathbb{P}(V)$, поскольку $f(v) = 0 \iff f(\lambda v) = \lambda^d f(v) = 0$. Иначе говоря, аффинная гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{A}(V)$, заданная однородным многочленом f, представляет собой конус, образованный проходящими через начало координат прямыми, которые являются точками проективного пространства. Множество этих точек $V(f) \subset \mathbb{P}(V)$ называется *проективной алгебраической гиперповерхностью* степени $\deg f$. Пересечения проективных гиперповерхностей, т. е. множества ненулевых решений[1] систем однородных полиномиальных уравнений, называются *проективными алгебраическими многообразиями*.

Простейшими примерами проективных многообразий являются *проективные подпространства* $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$, ассоциированные с векторными подпространствами $U \subset V$ — они задаются системами однородных линейных уравнений. Например, проективная прямая (ab) представляет собою проективизацию линейной оболочки векторов a и b, т. е. состоит из всевозможных точек вида $\lambda a + \mu b$ и может быть задана системой линейных уравнений $\xi(x) = 0$, где ξ пробегает подпространство $\mathrm{Ann}(a) \cap \mathrm{Ann}(b)$ (или любой базис в этом подпространстве). Отношение $(\lambda : \mu)$ коэффициентов из разложения вектора $\lambda a + \mu b \in (a, b)$ можно использовать в качестве внутренней однородной координаты на прямой (ab).

Упражнение 1.10. Покажите, что для любых двух проективных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ выполняется неравенство $\dim(K \cap L) \geqslant \dim K + \dim L - n$ (в частности, любые две прямые на $\mathbb{P}_2$ пересекаются).

1.3.3. Проективное замыкание аффинной гиперповерхности $S = V(f) \subset \mathbb{A}^n$ это проективная гиперповерхность $\overline{S} = V(\overline{f}) \subset \mathbb{P}_n$, задаваемая однородным многочленом $\overline{f}$ степени $d = \deg f$, пересечение которой со стандартной аффинной картой U_0 совпадает с X. Если

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_0 + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + f_d(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

[1] рассматриваемых с точностью до умножения на ненулевые константы

где каждый f_i однороден степени i, то

$$\overline{f}(x_0, x_1, \dots, x_n) = f_0 \cdot x_0^d + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot x_0^{d-1} + \dots + f_d(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

получается из f умножением каждого монома на подходящую степень x_0, дополняющую степень всего монома до d, и превращается в f при $x_0 = 1$. Дополнение $\overline{S} \smallsetminus S = \overline{S} \cap U_0^{(\infty)}$ задаётся в однородных координатах $(x_1 : x_2 : \dots : x_n)$ на бесконечно удалённой гиперплоскости $x_0 = 0$ уравнением $f_d(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Таким образом, лежащие на бесконечности точки гиперповерхности $\overline{S}$ — это в точности нули старшей однородной компоненты уравнения, задающего S. В аффинной геометрии их обычно называют *асимптотическими направлениями* гиперповерхности S.

Например проективным замыканием аффинной кубической кривой $x_1 = x_2^3$ является проективная кривая $x_0^2 x_1 = x_2^3$, которая имеет ровно одну бесконечно удалённую точку $(0 : 1 : 0)$ и выглядит в аффинной карте U_1 как полукубическая парабола $x_0^2 = x_2^3$ с остриём в этой точке.

1.3.4. Пространство гиперповерхностей. Поскольку пропорциональные уравнения задают одну и ту же гиперповерхность, гиперповерхности степени d являются точками проективного пространства $\mathbb{P}(S^d V^*)$, которое мы будем называть *пространством гиперповерхностей* степени d в $\mathbb{P}(V)$.

Упражнение 1.11. Найдите размерность пространства гиперповерхностей d-той степени в $\mathbb{P}_n$.

Поскольку уравнение $f(p) = 0$ при фиксированном $p \in \mathbb{P}(V)$ является *линейным уравнением на* $f \in S^d V^*$, гиперповерхности степени d, проходящие через заданную точку p, образуют проективную гиперплоскость в пространстве всех гиперповерхностей.

Проективные подпространства в пространстве гиперповерхностей называются *линейными системами* гиперповерхностей. По определению, всякая гиперповерхность из линейной системы, порождённой гиперповерхностями $V(f_1)$, $V(f_2)$, …, $V(f_m)$, задаётся уравнением вида

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m = 0,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \Bbbk$ — некоторые константы. В частности, любая гиперповерхность из такой системы обязательно содержит пересечение $V(f_1) \cap V(f_2) \cap \dots \cap V(f_m)$. По старинной традиции, одномерные и двумерные линейные системы также называются *пучками* и *связками* соответственно. Поскольку любая прямая в проективном пространстве имеет непустое пересечение с любой гиперплоскостью, всякий пучок гиперповерхностей[1] всегда содержит гиперповерхность, проходящую через любую наперёд заданную точку.

Пример 1.7 (наборы точек на $\mathbb{P}_1$ и кривая Веронезе)

Фиксируем двумерное векторное пространство $U \simeq \Bbbk^2$ с координатами x_0, x_1 и рассмотрим проективную прямую $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$. Всякое конечное множество точек

$$p_1, p_2, \dots, p_d \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$$

(среди которых допускаются и совпадающие) является алгебраической гиперповерхностью, а именно, множеством нулей однородного многочлена d-той степени

$$f(x_0, x_1) = \prod_{\nu=1}^{d} \det(x, p_\nu) = \prod_{\nu=1}^{d} (p_{\nu,1} x_0 - p_{\nu,0} x_1), \quad \text{где } p_\nu = (p_{\nu,0} : p_{\nu,1}). \tag{1-7}$$

[1] над любым полем

По аналогии с (неоднородными) многочленами от одной переменной, задающими конфигурации точек на аффинной прямой $\mathbb{A}_1$, мы будем называть точки $p_\nu \in \mathbb{P}_1$ *корнями* однородного многочлена f от переменных x_0, x_1. В этом смысле разложение (1-7) аналогично разложению многочлена от одной переменной на линейные множители, отвечающие корням. В частности, у однородного многочлена степени d от двух переменных имеется не более d различных корней на $\mathbb{P}_1$, а если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то таковых корней, с учётом кратностей[1], будет ровно d. Таким образом, над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ всевозможные d-точечные конфигурации на $\mathbb{P}_1$ взаимно однозначно соответствуют точкам проективного пространства $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$, ассоциированного с $(d+1)$-мерным векторным пространством однородных многочленов степени d от x_0, x_1.

Конфигурации, в которых все d точек слипаются в одну, образуют алгебраическую кривую $C_d \subset \mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$, которая называется *кривой Веронезе* степени d или *рациональной нормальной кривой* d*-той степени*. Эта кривая является образом *отображения Веронезе*

$$\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*) \xrightarrow{v_d} \mathbb{P}_d = \mathbb{P}\left(S^d U^*\right) , \tag{1-8}$$

переводящего линейную форму $\varphi \in U^*$ (задающую одну точку $p \in \mathbb{P}(U)$) в её d-ю степень $\varphi^d \in S^d(U^*)$, задающую d-кратную точку p. Если записывать формы $\varphi \in U^*$ и $f \in S^d(U^*)$ в виде

$$\varphi(x) = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 \quad \text{и} \quad f(x) = \sum_\nu a_\nu \cdot \binom{d}{\nu} x_0^{d-\nu} x_1^\nu$$

и использовать отношения коэффициентов $(\alpha_0 : \alpha_1)$ и $(a_0 : a_1 : \ldots : a_d)$ в качестве однородных координат на $\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*)$ и $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$ соответственно, то при не делящейся на характеристику поля $\Bbbk$ степени d кривая Веронезе запишется параметрическим уравнением[2]

$$(\alpha_0 : \alpha_1) \mapsto (a_0 : a_1 : \ldots : a_d) = \left(\alpha_0^d : \alpha_0^{d-1}\alpha_1 : \alpha_0^{d-2}\alpha_1^2 : \cdots : \alpha_1^d\right) . \tag{1-9}$$

Таким образом, при $\operatorname{char}\Bbbk \nmid d$ кривая C_d состоит из всех точек $(a_0 : a_1 : \ldots : a_d) \in \mathbb{P}_d$, координаты которых составляют геометрическую прогрессию. Это условие равносильно тому, что

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{d-2} & a_{d-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{d-1} & a_d \end{pmatrix} = 1 ,$$

и может быть выражено системой однородных уравнений второй степени — обращением в нуль всех 2×2-миноров этой матрицы. Например, кривая $C_2 \subset \mathbb{P}_2$ образована всеми квадратными трёхчленами $a_0 x_0^2 + 2a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2$, которые являются полными квадратами. Она задаётся известным из школы уравнением

$$D/4 = -\det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = a_1^2 - a_0 a_2 = 0 \tag{1-10}$$

и допускает следующее параметрическое задание:

$$a_0 = \alpha_0^2 , \quad a_1 = \alpha_0 \alpha_1 , \quad a_2 = \alpha_1^2 . \tag{1-11}$$

[1]Под кратностью корня p понимается максимальная степень линейной формы $\det(t, p)$, на которую делится f.

[2]Если d кратно $p = \operatorname{char}\Bbbk$, то формула (1-9) превращается в $(\alpha_0 : \alpha_1) \mapsto \left(\alpha_0^d : 0 : 0 : \cdots : 0 : \alpha_1^d\right)$.

Пересечение кривой (1-9) с произвольной гиперплоскостью, заданной уравнением

$$A_0 a_0 + A_1 a_1 + \dots + A_d a_d = 0\,,$$

состоит из Веронезе-образов тех точек $(\alpha_0 : \alpha_1) \in \mathbb{P}_1$, в которых обращается в нуль однородный многочлен $\sum A_\nu \cdot \alpha_0^{d-\nu}\alpha_1^\nu$ степени d. Поскольку таких точек не более d, никакие $d+1$ точек кривой Веронезе не лежат в одной гиперплоскости. Отсюда вытекает, что при $2 \leqslant m \leqslant d$ никакие $m+1$ точек кривой C_d не лежат в одном $(m-1)$-мерном подпространстве. Над алгебраически замкнутым полем пересечение кривой C_d с любой гиперплоскостью состоит в точности из d точек[1] — именно поэтому мы и сказали выше, что *степень* кривой C_d равна d.

1.4. Проективные квадрики. Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$. Проективная гиперповерхность второй степени $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$, $q \in S^2V^*$, называется *проективной квадрикой*. В однородных координатах $x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ квадратичный многочлен q можно записать как

$$q(x) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i x_j = x \cdot A \cdot {}^t x\,,$$

где $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ — строка координат, ${}^t x$ — транспонированный ей столбец координат, а $A = (a_{ij})$ — *симметричная* матрица, которая при $i \neq j$ имеет в качестве $a_{ij} = a_{ji}$ половину[2] коэффициента при $x_i x_j$ в многочлене $q(x)$. Другими словами, для любого однородного многочлена $q(x)$ второй степени существует единственная симметричная билинейная форма $\widetilde{q} : V \times V \to \Bbbk$, такая что $q(x) = \widetilde{q}(x,x)$. Она называется *поляризацией* квадратичной формы q и выражается через q несколькими эквивалентными способами:

$$\widetilde{q}(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i y_j = x \cdot A \cdot {}^t y = \frac{1}{2} \sum_i y_i \frac{\partial q(x)}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\Big(q(x+y) - q(x) - q(y) \Big)\,. \tag{1-12}$$

Матрица A представляет собою *матрицу Грама* формы $\widetilde{q}$ в двойственном к x_i базисе e_i пространства V, т. е. $a_{ij} = \widetilde{q}(e_i, e_j)$. В любом другом базисе $(e_0', e_1', \dots, e_n') = (e_0, e_1, \dots, e_n) \cdot C$ новая матрица Грама A' выражается через A по известной из курса линейной алгебры формуле $A' = {}^tC \cdot A \cdot C$. В частности, при линейной замене координат *определитель Грама* $\det A$ умножается на *ненулевой квадрат* определителя матрицы перехода: $\det(A') = \det(A) \cdot \det^2(C)$. Таким образом, класс определителя Грама по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля $\Bbbk$, не зависит от выбора базиса и является инвариантом квадрики по отношению к линейным заменам координат. Мы будем называть этот класс *определителем* формы q и обозначать $\det(q)$. Если $\det q \neq 0$, квадрика $V(q)$ называется *невырожденной* (или *гладкой*), в противном случае — *вырожденной* (или *особой*).

1.4.1. Корреляция, ядро и ранг. Со всякой билинейной формой $\widetilde{q}$ на V связан линейный *оператор корреляции* $\hat{q} : V \to V^*$, переводящий вектор $v \in V$ в линейную форму «скалярного умножения» на v:

$$\hat{q}(v) : V \to \Bbbk\,, \quad w \mapsto \widetilde{q}(w,v)\,.$$

Упражнение 1.12. Проверьте, что матрица оператора корреляции, записанная в двойственных базисах $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ и $x_1, x_2, \dots, x_n \in V^*$ совпадает с матрицей Грама A квадратичной формы q.

[1] Некоторые из которых могут совпадать друг с другом.

[2] Для этого существенно, что $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$.

В частности, невырожденность квадратичной формы q равносильна тому, что $\hat{q}$ изоморфизм. Пространство
$$\ker \hat{q} = \{\, v \in V \mid \forall w \in V \ \widetilde{q}(w, v) = 0 \}$$
называется *ядром* квадратичной формы q. Поскольку $\dim \ker \hat{q} = \dim V - \operatorname{rk} A$, ранг матрицы Грама не зависит от выбора базиса. Он называется *рангом* квадрики q. Проективизация ядра $\operatorname{Sing} Q \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\ker \hat{q}) \subset \mathbb{P}(V)$ называется *множеством особых точек* или *вершинным пространством* квадрики Q. Обратите внимание, что $\operatorname{Sing} Q \subset Q$.

В курсе линейной алгебры обычно доказывают следующий факт.

Теорема 1.1 (теорема Лагранжа)
Для любой квадрики над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}(\Bbbk) \neq 2$ существует базис, в котором её матрица Грама диагональна.

Доказательство. Индукция по $\dim V$ (при $\dim V = 1$ доказывать нечего). Поскольку $q \not\equiv 0$, найдётся $e \in V$, такой что $q(e) = \widetilde{q}(e, e) \neq 0$. Примем его за первый базисный вектор и обозначим через $e^{\perp} = \{\, u \in V \mid \widetilde{q}(u, e) = 0 \,\}$ ортогональное относительно формы $\widetilde{q}$ дополнение к натянутому на e одномерному подпространству $\Bbbk \cdot e$. Пространство V является ортогональной прямой суммой $V = (\Bbbk \cdot e) \oplus e^{\perp}$, т. к. $(\Bbbk \cdot e) \cap e^{\perp} = 0$, и любой вектор $v \in V$ представляется в виде
$$v = \frac{\widetilde{q}(v, e)}{\widetilde{q}(e, e)} \cdot e + u\,,$$
где $u = v - e \cdot \widetilde{q}(v, e) / \widetilde{q}(e, e) \in e^{\perp}$ (обязательно убедитесь в этом!). Если $q|_{e^{\perp}} \equiv 0$, искомый базис состоит из e и произвольных базисных векторов пространства $e^{\perp}$. Если $q|_{e^{\perp}} \not\equiv 0$, то по индукции в $e^{\perp}$ есть базис $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ с диагональной матрицей Грама. Тогда матрица Грама базиса $e,\ e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ тоже диагональна. □

Следствие 1.2
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ всякая квадрика задаётся в подходящих однородных координатах уравнением $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 = 0$, где r — ранг квадрики. В частности, две квадрики переводятся друг в друга линейными проективными автоморфизмами , если и только если они имеют одинаковый ранг.

Доказательство. Ненулевые диагональные элементы матрицы Грама становятся единицами при замене базисных векторов e_i на $e_i / \sqrt{q(e_i)}$. □

Пример 1.8 (квадрики на $\mathbb{P}_1$)
По теор. 1.1 всякая квадратичная форма от двух переменных в подходящем базисе задаётся либо уравнением $x_0^2 + a x_1^2 = 0$ с $a \neq 0$, либо уравнением $x_0^2 = 0$. В первом случае определитель Грама $\det(q)$ с точностью до умножения на квадраты равен a, и форма невырождена. Во втором случае $\det(q) = 0$ и форма вырождена. Вырожденная квадрика $x_0^2 = 0$ называется *двойной точкой*, поскольку её уравнение — это квадрат линейной формы x_0, задающей точку $(0 : 1)$. Неособая квадрика $x_0^2 + a x_1^2 = 0$ либо пуста, либо состоит из двух точек. Первое равносильно тому, что $-a$ не является квадратом в $\Bbbk$, и над алгебраически замкнутым полем невозможно. Если же $-a = \delta^2$, то $x_0^2 + a x_1^2 = (x_0 - \delta x_1)(x_0 + \delta x_1)$ имеет на $\mathbb{P}_1$ два разных корня $(\pm\delta : 1)$.

Таким образом, строение квадрики, задаваемой на $\mathbb{P}_1$ произвольной ненулевой квадратичной формой $q(x) = a_0 x_0^2 + 2 a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2$, полностью определяется классом её *дискриминанта*

$D/4 \overset{\text{def}}{=} -\det(q) = a_1^2 - a_0a_2$ по модулю умножения на ненулевые квадраты: если он нулевой, то квадрика является двойной точкой, если он единичный — парой различных точек, если он не квадрат — квадрика пуста (что бывает только над незамкнутыми полями).

В качестве следствия мы получаем, что для пересечения произвольных квадрики Q и прямой ℓ имеется ровно 4 взаимоисключающие возможности: или $\ell \subset Q$, или $\ell \cap Q$ это одна двойная точка, или $\ell \cap Q$ состоит из 2 различных точек, или $\ell \cap Q = \varnothing$, причём над алгебраически замкнутым последний случай невозможен.

Теорема 1.2
Пересечение $Q' = L \cap Q$ особой квадрики Q с любым дополнительным к $\operatorname{Sing} Q$ проективным подпространством $L \subset \mathbb{P}(V)$ представляет собой невырожденную квадрику в L, и исходная квадрика Q является *линейным соединением*[1] Q' и $\operatorname{Sing} Q$.

Доказательство. Пусть $K = \ker \hat{q}$ и $L = \mathbb{P}(U)$. Тогда $V = U \oplus K$. Если вектор $u \in U$ лежит в ядре ограничения $\hat{q}|_U$, то $q(u, u') = 0$ для всех $u' \in U$. Записывая произвольный вектор $v \in V$ как $v = u' + u''$ с $u' \in U$ и $u'' \in K$, получаем $\widetilde{q}(u, v) = \widetilde{q}(u, u'') + \widetilde{q}(u, u') = 0$ для всех $v \in V$, откуда $u \in U \cap \ker \hat{q} = 0$. Таким образом, ограничение $q|_U$ невырождено.

Если прямая ℓ проходит через точку $p \in \operatorname{Sing} Q$ и не лежит на квадрике Q, то ограничение формы q на ℓ является ненулевой особой квадратичной формой, а значит, $Q \cap \ell$ — это двойная точка p. Тем самым, каждая прямая, пересекающая $\operatorname{Sing} Q$, либо целиком лежит на Q, либо больше нигде не пересекает квадрику. □

1.4.2. Касательное пространство. Прямая ℓ, проходящая через точку $p \in Q$, называется *касательной* к квадрике Q в точке $p \in \ell \cap Q$, если $\ell \subset Q$ или $\ell \cap Q$ это двойная точка p. Объединение всех прямых, касающихся Q в точке p, называется *касательным пространством* к квадрике Q в точке $p \in Q$ и обозначается T_pQ.

Лемма 1.2
Прямая $\ell = (ab)$ касается квадрики $Q = V(q)$ в точке $a \in Q$, если и только если $\widetilde{q}(a, b) = 0$.

Доказательство. Ограничение формы q на прямую ℓ имеет в базисе $\{a, b\}$ матрицу Грама

$$\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{q}(a,b) \\ \widetilde{q}(b,a) & \widetilde{q}(b,b) \end{pmatrix},$$

которая имеет нулевой определитель , если и только если $\widetilde{q}(a, b) = \widetilde{q}(b, a) = 0$. □

Следствие 1.3
Видимый из точки $b \notin Q$ контур[2] квадрики Q высекается из неё гиперплоскостью

$$\operatorname{Ann} \hat{q}(b) = \{x \mid \widetilde{q}(b, x) = 0\}.$$

Доказательство. Поскольку $\widetilde{q}(b, b) = q(b) \neq 0$, линейная форма $\hat{q}(b) : x \mapsto \widetilde{q}(b, x)$ ненулевая и задаёт гиперплоскость. □

[1] Т. е. объединением всех прямых, пересекающих как Q', так и $\operatorname{Sing} Q$.
[2] ГМТ касания с квадрикой Q всевозможных касательных, опущенных на неё из точки b.

Следствие 1.4
Следующие условия на точку $a \in Q \subset \mathbb{P}(V)$ эквиваленты друг другу:

1) $p \in \operatorname{Sing} Q$ 2) $T_pQ = \mathbb{P}(V)$ это всё пространство 3) $\dfrac{\partial q}{\partial x_i}(p) = 0$ для всех i.

Следствие 1.5
Если точка $p \in Q$ неособа, то $T_pQ = \{x \in \mathbb{P}_n \mid \tilde{q}(p,x) = 0\}$ является гиперплоскостью коразмерности 1. □

1.4.3. Коники. Кривые второй степени на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ называются *проективными кониками*. Они являются точками пятимерного проективного пространства $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Над алгебраически замкнутым полем имеются ровно три проективно неэквивалентных коники:

- *двойная прямая* $x_0^2 = 0$ имеет ранг 1, и все её точки особы
- *распавшаяся коника* $x_0^2 + x_1^2 = 0$ имеет ранг 2 и является объединением двух различных прямых $x_0 = \pm\sqrt{-1}\cdot x_1$, точка пересечения которых $(0 : 0 : 1)$ является единственной особой точкой распавшейся коники
- *гладкая коника* $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ имеет максимальный ранг 3

что согласуется[1] с теор. 1.2.

Над произвольным полем $\Bbbk$ с $\operatorname{char}(\Bbbk) \neq 2$ каждая непустая гладкая коника $C \subset \mathbb{P}_2$ допускает квадратичную *рациональную параметризацию*, т. е. отображение $\varphi : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_2$ задаваемое в однородных координатах тройкой взаимно простых однородных многочленов второй степени $\varphi(t_0,t_1) = \big(\varphi_0(t_0,t_1) : \varphi_1(t_0,t_1) : \varphi_2(t_0,t_1)\big) \in \mathbb{P}_2$ и биективно отображающее прямую $\mathbb{P}_1$ на конику $C \subset \mathbb{P}_2$. Такая параметризация задаётся проекцией $p : C \xrightarrow{\sim} \ell$ коники C из любой её точки $p \in C$ на любую не проходящую через p прямую ℓ. В самом деле, каждая отличная от касательной прямой T_pC прямая (px) с $x \in \ell$ пересекает конику C по двум различным точкам: точке p и ещё одной точке $p'(x) \in C$, однородные координаты которой $(\lambda_0 : \lambda_1)$ в базисе p, x на прямой (px) доставляют отличный от $p = (1 : 0)$ корень уравнения

$$(\lambda_0,\lambda_1)\cdot\begin{pmatrix} q(p,p) & q(p,x) \\ q(x,p) & q(x,x)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\end{pmatrix} = 0 \iff 2q(p,x)\cdot\lambda_0\lambda_1 + q(x,x)\cdot\lambda_1^2 = 0\,,$$

равный $(\lambda_0 : \lambda_1) = \big(q(x,x) : -2q(p,x)\big)$. Отображение

$$\ell \ni x \mapsto q(x,x)\cdot p - 2q(p,x)\cdot x \in C \subset \mathbb{P}_2 \tag{1-13}$$

и задаёт искомую квадратичную параметризацию коники C точками $x \in \ell$.

Упражнение 1.13. Убедитесь, что все три однородных координаты точки

$$q(x,x)\cdot p - 2q(p,x)\cdot x \in \mathbb{P}_2$$

являются однородными полиномами степени 2 от однородных координат $(t_0 : t_1)$ точки $x \in \ell$ относительно произвольного базиса на прямой ℓ, и что формула (1-13) корректно сопоставляет точке $x = T_pC \cap \ell$ точку $p \in C$.

[1] Распавшаяся коника является линейным соединением особой точки и гладкой квадрики — пары различных точек — на любой прямой, не проходящей через особую точку. Двойная прямая это линейное соединение прямой особых точек и пустого множества — гладкой квадрики на $\mathbb{P}_0$.

Упражнение 1.14. Убедитесь, что проекция коники Веронезе $a_0a_2 - a_1^2 = 0$ из точки $(1 : 1 : 1)$ на прямую $a_1 = 0$, переводит точку $(\alpha_0^2 : \alpha_0\alpha_1 : \alpha_1^2)$ в точку $(\alpha_0 : 0 : \alpha_1)$.

Предложение 1.1
Гладкая коника пересекает произвольную кривую, заданную на $\mathbb{P}_2$ однородным уравнением степени d, не более, чем по $2d$ точкам, либо целиком содержится в этой кривой.

Доказательство. Запараметризуем конику однородными полиномами степени 2 от параметра $t = (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_1$. Значения t, при которых коника пересекает кривую с уравнением $f(x) = 0$, являются корнями однородного уравнения $f\big(q(t)\big) = 0$, левая часть которого либо тождественно равна нулю, либо имеет степень $2d$. В первом случае вся коника содержится в кривой, во втором случае имеется не более $2d$ различных корней. □

Предложение 1.2
Каждые 5 точек в $\mathbb{P}_2$ лежат на некоторой конике. Если никакие 4 из пяти точек не коллинеарны, то такая коника единственна, а если никакие 3 не коллинеарны, то она ещё и невырождена.

Доказательство. При фиксированном $p \in V$ уравнение $q(p) = 0$ линейно по $q \in S^2V^*$. Поэтому коники, проходящие через $p \in \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ образуют гиперплоскость в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Поскольку любые 5 гиперплоскостей в $\mathbb{P}_5$ имеют непустое пересечение, требуемая коника существует. Если какие-то три из точек коллинеарны, а никакие четыре — нет, коника содержит прямую, проходящую через три коллинеарные точки, и стало быть, распадается в объединение этой прямой и прямой, проходящей через две оставшиеся точки. Тем самым, такая коника единственна. Если никакие три из точек не коллинеарны, любая проходящая через них коника автоматически неособа, и значит, единственна по предл. 1.1. □

Следствие 1.6
Любые пять прямых без тройных пересечений на $\mathbb{P}_2$ касаются единственной невырожденной коники.

Доказательство. Это утверждение проективно двойственно предыдущему: 5 точек на $\mathbb{P}_2^\times = \mathbb{P}(V^*)$, двойственные к данным пяти прямым на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$, лежат на единственной гладкой конике $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$, и двойственная ей коника[1] $C \subset \mathbb{P}_2$ есть единственная гладкая коника, касающаяся пяти данных прямых. □

1.4.4. Квадратичные поверхности в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ образуют проективное пространство

$$\mathbb{P}_9 = \mathbb{P}(S^2V^*).$$

Поэтому любые 9 точек в $\mathbb{P}_3$ лежат на некоторой квадрике. В частности, любые три прямые в $\mathbb{P}_3$ лежат на некоторой квадрике — достаточно взять по 3 точки на каждой прямой и провести квадрику через эти 9 точек.

Упражнение 1.15. Покажите, что вырожденная квадрика в $\mathbb{P}_3$ (над произвольным полем) не может содержать трёх попарно непересекающихся прямых.

[1]Т. е. коника, образованная касательными к конике $C^\times$, см. сл. 1.7 на стр. 21 ниже.

Таким образом, любые три попарно скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ лежат на гладкой квадрике. Удобной геометрической моделью такой квадрики является *квадрика Сегре*, состоящая из ненулевых матриц ранга 1 в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\left(\mathrm{Mat}_{2\times2}(\Bbbk)\right)$:

$$Q_s \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \neq 0 \,\middle|\, \det \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} = \alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10} = 0 \right\}. \tag{1-14}$$

Упражнение 1.16. Убедитесь, что всякий ненулевой линейный оператор $F : U \to V$ ранга один имеет вид $v \otimes \xi : u \mapsto v \cdot \langle \xi , u \rangle$ для некоторых ненулевых $v \in V$, $\xi \in U^*$, определяемых по оператору однозначно с точностью до пропорциональности

В ситуации, когда $U = V = \Bbbk^2$, а v и ξ имеют в стандартных двойственных базисах пространств $\Bbbk^2$ и $\Bbbk^{2*}$ координаты $v = (x_0 : x_1)$ и $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$, матрица оператора $v \otimes \xi$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 x_0 & \xi_1 x_0 \\ \xi_0 x_1 & \xi_1 x_1 \end{pmatrix} \tag{1-15}$$

Сопоставляя паре точек $(\xi, v) \in \mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\Bbbk^{2*}) \times \mathbb{P}(\Bbbk^2)$ одномерное подпространство в $\mathrm{Hom}(\Bbbk^2, \Bbbk^2)$, порождённое оператором $v \otimes \xi$ с матрицей (1-15), мы получаем *вложение Сегре*

$$s : \mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\Big(\mathrm{End}\left(\Bbbk^2\right)\Big),$$

биективно отображающее $\mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1$ на квадрику Сегре $Q_S \subset \mathbb{P}_3$. При этом два семейства координатных прямых на $\mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1$ переходят в два семейства прямых на Q_S. А именно, координатная прямая $\xi = \mathrm{const}$ изобразится на квадрике Сегре проективизацией двумерного пространства матриц ранга 1 с фиксированным отношением $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$ между столбцами, а прямая $v = \mathrm{const}$ — матрицами с фиксированным отношением $x = (x_0 : x_1)$ между строками. В каждом из этих семейств все прямые попарно скрещиваются, а любые две прямые из разных семейств пересекаются, причём каждая точка Q_S является точкой пересечения пары прямых из различных семейств.

Упражнение 1.17. Убедитесь, что никаких других прямых на квадрике Сегре нет.

Предложение 1.3
Через любые три попарно непересекающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ проходит единственная (и автоматически неособая) квадрика. Эта квадрика представляет собою объединение всех прямых, пересекающих все три заданных.

Доказательство. Всякая квадрика, проходящая через три скрещивающихся прямые, является неособой квадрикой Сегре, заметаемой двумя семействами прямолинейных образующих. Все три заданные прямые должны лежать в одном из них. Но тогда любая прямая из другого семейства пересекают каждую из них, и наоборот, всякая прямая пересекающая каждую из них, лежит на квадрике (ибо пересекает её по трём точкам), причём в другом по отношению к трём заданным прямым семействе. □

1.5. Проективная двойственность. Пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}_n^\times \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(V^*)$ называются *двойственными* проективными пространствами. Геометрически, каждое из них есть пространство гиперплоскостей в другом: однородное линейное уравнение $\langle \xi , v \rangle = 0$ на $\xi \in V^*$ и $v \in V$

при фиксированном $\xi \in \mathbb{P}^\times$ задаёт гиперплоскость в $\mathbb{P}_n$, а при фиксированном $v \in \mathbb{P}_n$ — гиперплоскость в $\mathbb{P}_n^\times$, состоящую из всех гиперплоскостей в $\mathbb{P}_n$, проходящих через точку $v \in \mathbb{P}_n$. Из курса линейной алгебры известно, что соответствие $U \leftrightarrows \mathrm{Ann}(U)$ устанавливает обращающую включения биекцию между векторными подпространствами дополнительных размерностей в двойственных пространствах V и V^*. При переходе к проективизациям для каждого $m = 0, 1, \dots, (n-1)$ возникает биекция между m-мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n$ и $(n-1-m)$-мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n^\times$, переводящая проективное подпространство $L = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}_n$ в проективное подпространство $L^\times = \mathbb{P}(\mathrm{Ann}(U)) \subset \mathbb{P}_n^\times$, образованное всеми гиперплоскостями, содержащими L. Такая *проективная двойственность* позволяет переговаривать геометрические утверждения в двойственные геометрические утверждения. Например, условие коллинеарности трёх точек двойственно условию наличия у трёх гиперплоскостей общего подпространства коразмерности 2. Другой пример уже встречался нам в сл. 1.6 на стр. 18. Он тесно связан со следующей геометрической конструкцией.

1.5.1. Полярное преобразование. Корреляция $\hat{q} : V \xrightarrow{\sim} V^*$, ассоциированная с невырожденной квадратичной формой q, индуцирует линейный проективный изоморфизм

$$\overline{q} : \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(V^*)$$

который называется *полярным преобразованием* или *поляритетом* квадрики Q. Поляритет переводит точку $p \in \mathbb{P}_n$ в гиперплоскость $L \subset \mathbb{P}_n$, заданную уравнением $\widetilde{q}(p, x) = 0$. Точка p и гиперплоскость L в этом случае называются *полюсом* и *полярой* друг друга относительно квадрики Q. Поляра точки, не лежащей на квадрике, это гиперплоскость, высекающая видимый из этой точки контур квадрики, а поляра точки, лежащей на квадрике, — это гиперплоскость, касающаяся квадрики в этой точке. Таким образом, всякую квадрику Q можно охарактеризовать как ГМТ, лежащих на своих полярах.

Поскольку условие $\widetilde{q}(a, b) = 0$ симметрично по a и b, точка a лежит на поляре точки b, если и только если точка b лежит на поляре точки a. Такие точки называются *сопряжёнными* относительно квадрики Q.

Предложение 1.4
Пусть $a, b \notin Q$ и прямая (ab) пересекает Q в двух различных точках c, d. Точки a, b сопряжены относительно квадрики Q, если и только если они гармоничны[1] точкам c, d.

Доказательство. Ограничение квадрики Q на прямую (cd) задаётся в однородных координатах $(x_0 : x_1)$ относительно базиса c, d квадратичной формой $q(x) = \det(x, c) \cdot \det(x, d)$, поляризация которой есть $\widetilde{q}(x, y) = \frac{1}{2}\big(\det(x, c) \cdot \det(y, d) + \det(y, c) \cdot \det(x, d)\big)$. Условие сопряжённости $\widetilde{q}(a, b) = 0$ означает, что $\det(a, c) \cdot \det(b, d) = -\det(b, c) \cdot \det(a, d)$ или $[a, b, c, d] = -1$. □

Предложение 1.5
Для неособой квадрики G и произвольной квадрики Q в $\mathbb{P}_n$ гиперплоскости, полярные относительно квадрики G точкам $p \in Q$, образуют в двойственном проективном пространстве $\mathbb{P}_n^\times$ квадрику в $Q_G^\times$ того же ранга, что и квадрика Q. Если Q и G имеют в некоторых однородных координатах на $\mathbb{P}_n$ матрицы Грама A и Γ соответственно, то квадрика $Q_G^\times$ имеет в двойственных однородных координатах на $\mathbb{P}_n^\times$ матрицу $\Gamma^{-1} A \Gamma^{-1}$.

[1] Т. е. $[a, b, c, d] = -1$, см. прим. 1.5 на стр. 10.

Доказательство. Поляритет $\hat{g} : \mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n^\times$ гладкой квадрики $G \subset \mathbb{P}_n$ переводит точку из $\mathbb{P}_n$ со столбцом координат x в точку двойственного пространства $\mathbb{P}_n^\times$ со строкой координат $\xi = x^t \Gamma$ и является проективным изоморфизмом. Таким образом, полярная точке $x \in Q$ гиперплоскость ξ удовлетворяет уравнению, которое получается из уравнения $x^t \cdot A \cdot x = 0$ квадрики Q подстановкой $x = \Gamma^{-1}\xi^t$, т. е. уравнению $\xi \cdot \Gamma^{-1} A \Gamma^{-1} \cdot \xi^t = 0$. □

Следствие 1.7
Касательные пространства гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ образуют в $\mathbb{P}_n^\times$ гладкую квадрику $Q^\times$. Матрицы Грама квадрик Q и $Q^\times$ в двойственных базисах пространств $\mathbb{P}_n$ и $\mathbb{P}_n^\times$ обратны друг другу.

Доказательство. Положим в предыдущей теореме $G = Q$ и $\Gamma = A$, и заметим, что гиперплоскости, полярные точкам $p \in Q$ относительно самой же квадрики Q, это в точности касательные пространства $T_p Q$. □

Упр. 1.2. В правой части стоит геометрическая прогрессия $q^n + q^{n-1} + \dots + q + 1$, а слева — количество ненулевых векторов в $(n+1)$-мерном пространстве, делённое на количество ненулевых векторов в одномерном пространстве, т. е. $(q^{n+1} - 1)/(q - 1)$.

Упр. 1.3. Это очевидно из подобия прямоугольных треугольников на рис. 1◇2 на стр. 5, а также из соотношения $(s : 1) = (x_0 : x_1) = (1 : t)$.

Упр. 1.4. В качестве точек q и r, задающих такую прямую, можно взять компоненты u, w разложения любого вектора $v \in V$, отвечающего точке $p \in \mathbb{P}(V)$. Наоборот, если v лежит в двумерном векторном подпространстве с базисом u, v, где $u \in U$ и $w \in W$, то компоненты разложения вектора v по U и W пропорциональны u и w в силу единственности такого разложения.

Упр. 1.6. Пусть $L_1 = \mathbb{P}(U)$, $L_2 = \mathbb{P}(W)$, $p = \mathbb{P}(\Bbbk \cdot e)$. Поскольку $p \notin L_2$, $V = W \oplus \Bbbk \cdot e$. Центральная проекция из p индуцирована линейной проекцией V на W вдоль $\Bbbk \cdot e$. Так как $p \notin L_1$, ограничение этой проекции на подпространство U имеет нулевое ядро и, стало быть, является линейным изоморфизмом.

Упр. 1.7. Пусть $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ и дробно линейные автоморфизмы

$$\varphi_p : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1 \quad \text{и} \quad \varphi_q : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$$

таковы, что прообразами точек $\infty,\ 0,\ 1$ являются, соответственно, p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3. Тогда $\varphi_p(p_4) = \varphi_q(q_4)$ и $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p$ переводит p_1, p_2, p_3, p_4 в q_1, q_2, q_3, q_4. Наоборот, если $\varphi_p : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ переводит p_1, p_2, p_3 в $\infty,\ 0,\ 1$, а φ_{qp} переводит переводит p_1, p_2, p_3, p_4 в q_1, q_2, q_3, q_4, то $\varphi_p \circ \varphi_{qp}^{-1}$ переводит q_1, q_2, q_3, q_4, соответственно, в $\infty,\ 0,\ 1,\ [p_1, p_2, p_3, p_4]$, откуда

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]\,.$$

Упр. 1.9. Если поле $\Bbbk$ конечно и состоит из q элементов, пространство функций $\mathbb{A}(V) \to \Bbbk$ тоже конечно и состоит из $q^{q^{\dim V}}$ элементов. Так как алгебра многочленов бесконечна, гомоморфизм из алгебры многочленов в алгебру функций имеет ненулевое ядро. Его сюрьективность следует из того, что для любого конечного набора точек существует многочлен, принимающий в этих точках любые наперёд заданные значения. Над бесконечным полем $\Bbbk$ инъективность гомоморфизма алгебры многочленов $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ в алгебру функций $\mathbb{A}(V) \to \Bbbk$ доказывается индукцией по $n = \dim V$. Так как ненулевой многочлен $f(x)$ от одной переменной не может иметь $\geqslant \deg f$ корней, тождественно нулевая на бесконечном множестве $\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}(\Bbbk)$ функция может получиться только из нулевого многочлена. Многочлен от n переменных является многочленом от x_n с коэффициентами из $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$: $\quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum\limits_{\nu=0}^{d} \varphi_\nu(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \cdot x_n^{d-\nu}$. Вычисляя коэффициенты φ_ν в произвольной точке $(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) \in \Bbbk^{n-1}$, мы получаем многочлен от x_n с постоянными коэффициентами, задающий тождественно нулевую функцию на прямой $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$, и потому нулевой. Тем самым, все многочлены φ_ν являются тождественно нулевыми функциями на $\mathbb{A}^{n-1}$. По предположению индукции, они являются нулевыми многочленами.

Упр. 1.15. Особая квадрика в $\mathbb{P}_3$ это либо двойная плоскость (квадрика ранга 1), либо пара различных пересекающихся плоскостей (линейное соединение особой прямой с гладкой пустой квадрикой на дополнительной прямой), либо двойная прямая (линейное соединение особой прямой с гладкой пустой квадрикой на дополнительной прямой), либо одна двойная точка (линейное соединение особой точки с гладкой пустой коникой в дополнительной плоскости), либо простой конус (линейное соединение особой точки с гладкой непустой коникой в дополнительной плоскости). Убедитесь, что в последнем случае любая лежащая на квадрике прямая проходит через особую точку.

Упр. 1.17. Всякая прямая, лежащая на Q_S и проходящая через какую-нибудь точку $p \in Q_S$ содержится в плоской конике $Q_S \cap T_p Q_S$, где $T_p Q$ — касательная плоскость к Q в точке p. Эта коника исчерпывается парой проходящих через p прямых из описанных выше двух семейств.