Торические многообразия

Обозначения. Рассмотрим аффинный алгебраический тор $T_n = (\Bbbk^*)^n$ с решёткой однопараметрических мультипликативных подгрупп $N = \mathrm{Hom}(\Bbbk^*, T_n) \simeq \mathbb{Z}^n$ и решёткой характеров $M = \mathrm{Hom}(T_n, \Bbbk^*) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$, канонически двойственных друг другу посредством спаривания, сопоставляющего характеру $\chi : T_n \to \Bbbk^*$ и и подгруппе $\gamma : \Bbbk^* \to T_n$ такое число $\langle \chi , \gamma \rangle \in \mathbb{Z}$, что $\chi \circ \gamma : \Bbbk^* \to \Bbbk^*$ переводит $z \in \Bbbk^*$ в $z^{\langle \chi , \gamma \rangle}$. Веер $\Sigma \subset V = N \bigotimes\limits_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ это такой конечный набор выпуклых полиэдральных конусов $\sigma = \sigma(v_1, v_2, \dots, v_k)$, порождённых векторами $v_i \in N$, что все грани каждого конуса $\sigma \in \Sigma$ лежат в Σ и пересечение любых двух конусов из Σ является гранью каждого из них. Торическое многообразие $X(\Sigma)$ задаётся атласом, состоящим из аффинных многообразий $U_\sigma = \mathrm{Spec_m}\, \Bbbk[\sigma^\vee]$, где $\sigma \in \Sigma$, $\sigma^\vee = \{w \in M \mid \langle w , v \rangle \geqslant 0\}$ — полугруппа характеров, лежащих в двойственном к σ конусе в пространстве $V^* = M \bigotimes\limits_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, $\Bbbk[\sigma^\vee]$ — полугрупповая алгебра, элементы которой суть линейные комбинации мономов $\chi \in \sigma^\vee$. Например, $\Bbbk[0^\vee] = \Bbbk[M] = \Bbbk[T_n] \simeq \Bbbk[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$ — это координатная алгебра самого тора T_n, так что $U_0 = T_n$. Тор T_n действует на $X(\Sigma)$ так, что для каждого $t \in n$ отображение поднятия $t^* : \Bbbk[\sigma^\vee] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[\sigma^\vee]$, отвечающее автоморфизму $t : U_\sigma \xrightarrow{\sim} U_\sigma$, умножает каждый характер $\chi \in \sigma^\vee$ на число $\chi(t) \in \Bbbk^*$, т. е. $t^*(\chi) = \chi \cdot \chi(t)$.

АГ10◇1. Для каждой грани $\tau \subset \sigma$ постройте открытое вложение $U_\tau \hookrightarrow U_\sigma$.

АГ10◇2. Обозначим через e_1, e_2 стандартный базис в $V = \mathbb{R}^2$. Опишите торические многообразия $X(\Sigma)$ следующих вееров в $\mathbb{R}^2$: **а)** Σ состоит из 1 конуса $\sigma(ne_1 - e_2, e_2)$ и его граней **б)** Σ состоит из 3 конусов $\sigma(e_1, e_2)$, $\sigma(e_2, -e_1 - e_2)$, $\sigma(-e_1 - e_2, e_1)$ и их граней **в)** Σ состоит из 4 конусов $\sigma(e_1, e_2)$, $\sigma(e_2, -e_1)$, $\sigma(-e_1, -e_2)$, $\sigma(-e_2, e_1)$ **г)** Σ состоит из 2 конусов $\sigma(e_1, e_1 + e_2)$, $\sigma(e_1 + e_2, e_2)$

АГ10◇3. Пусть $\dim N = n$, $\dim \sigma = k$ и σ как полугруппа порождается неприводимыми направляющими векторами своих рёбер. Покажите, что $U_\sigma = \mathbb{A}^k \times T_{n-k}$.

АГ10◇4. Покажите, что каждая аффинная торическая карта U_σ задаётся в аффинном пространстве *мономиальными* уравнениями вида $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_k^{m_k} = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$.

АГ10◇5. Покажите, что каждое торическое многообразие нормально.

АГ10◇6 (орбиты тора). Сопоставим каждому $\sigma \in \Sigma$ точку $x_\sigma \in U_\sigma$, гомоморфизм вычисления в которой $\mathrm{ev}_{x_\sigma} : \Bbbk[\sigma^\vee] \to \Bbbk$ действует на базис $\sigma^\vee$ алгебры $\Bbbk[\sigma^\vee]$ по правилу $\chi \mapsto 0$, если $\chi \notin \sigma^\perp$, и $\chi \mapsto 1$, если $\chi \in \sigma^\perp$, где $\sigma^\perp = \mathrm{Ann}(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in M \mid \forall\, v \in \sigma \ \langle w , v \rangle = 0\}$. Обозначим через $O_\sigma = T_n \cdot x_\sigma$ орбиту точки x_σ, а через $V_\sigma = \overline{O}_\sigma \subset X(\Sigma)$ — её замыкание. Покажите, что **а)** сопоставление $\sigma \mapsto O_\sigma$ устанавливает биекцию между конусами $\sigma \in \Sigma$ и орбитами тора T_n на $X(\Sigma)$ **б)** $U_\sigma = \sqcup O_\eta$ по всем граням η конуса σ **в)** $O_\tau \subset V_\sigma \iff \sigma$ является гранью τ **г)** $\dim V_\sigma = n - \dim \sigma$ **д)** V_σ является торическим многообразием, заданном в пространстве V / W_σ веером, составленным из конусов $(\tau + W_\sigma) / W_\sigma$ по всем $\tau \in \Sigma$, для которых σ является гранью, где через $W_\sigma \subset V$ обозначена $\mathbb{R}$-линейная оболочка конуса σ.

АГ10◇7. Над полем $\Bbbk = \mathbb{C}$ покажите, что **а)** если в Σ есть n-мерный конус, то $X(\Sigma)$ односвязно **б)** если $\dim \sigma = n$, то U_σ стягиваемо **в)** если $\dim \sigma = n - k$, то $\pi_1(U_\sigma) = \mathbb{Z}^k$.

АГ10◇8. Пусть полный веер Σ в $\mathbb{R}^2$ состоит из трёх двумерных конусов с рёбрами $v_1 = 2e_1 - e_2$, $v_2 = -e_1 + 2e_2$, $v_3 = -e_1 - e_2$ и всех их граней. Вычислите группу классов дивизоров Вейля $A_1(X(\Sigma))$ и группу Пикара $\mathrm{Pic}(X(\Sigma))$.

АГ10◇9. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ правильный тетраэдр, проведём в трёх его боковых гранях средние линии, высекаемые параллельной основанию плоскостью, и в каждом из трёх примыкающих к основанию четырёхугольников нарисуем по диагонали так, чтобы они не пересекались в вершинах. В результате каждая боковая грань разобьётся на 3 треугольника. Рассмотрим веер Σ с вершиной в центре тетраэдра и десятью 3-мерными конусами, основаниями которых служат эти 9 треугольников и основание тетраэдра. Покажите, что **а)** Σ не двойственен никакому выпуклому многограннику **б)** $\mathrm{Pic}(X(\Sigma)) = 0$ **в)** $A_2(X(\Sigma)) = \mathbb{Z}^5 \oplus \mathbb{Z} / (2)$ **г*)** многообразие $X(\Sigma)$ не может быть регулярно вложено в проективное пространство, но при этом полно[1]

[1]т. е. для любого алгебраического многообразия Y проекция $X(\Sigma) \times Y \to Y$ замкнута

Персональный табель ____.
(напишите свои фамилию, имя и отчество)

Листок № 10 (14.04.2014)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2а			
б			
в			
г			
3			
4			
5			
6а			
б			
в			
г			
д			
7а			
б			
в			
8			
9а			
б			
в			
г			