## Касательные и кокасательные расслоения

**АГ8⋄1.** Обозначим через $\mathcal{O}(-1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(-1)$ линейное расслоение на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, слой которого над точкой $v$ равен одномерному подпространству в $V$, натянутому на $v$. Положим $\mathcal{O}(1) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{O}(-1)^*$ и $\mathcal{O}(d) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{O}(1)^{\otimes d}$, $\mathcal{O}(-d) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{O}(-1)^{\otimes d}$ при $d \in \mathbb{N}$. Покажите, что пространство регулярных сечений расслоения $\mathcal{O}(d)$ над открытым множеством $U \subset \mathbb{P}_n$ изоморфно подпространству поля частных $\Bbbk(x_0, x_1, \dots, x_n)$, состоящему из дробей, допускающих для каждой точки $v \in U$ запись $p/q$, где $p, q \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ однородны с $\deg p - \deg q = d$ и $q(v) \neq 0$, и является локально свободным модулем ранга 1 над алгеброй локальных регулярных функций на $U$, которая в свою очередь изоморфна подалгебре поля частных $\Bbbk(x_0, x_1, \dots, x_n)$, возникающей при $d = 0$.

**АГ8⋄2.** Покажите, что касательное расслоение к проективной прямой $\mathcal{T}_{\mathbb{P}_1} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2)$.

**АГ8⋄3 (точная последовательность Эйлера).** Покажите, что пучки сечений касательного и кокасательного расслоений на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ включаются в точные последовательности $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}$-модулей:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n} \to V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1) \to \mathcal{T}_{\mathbb{P}_n} \to 0 \quad \text{и} \quad 0 \to \Omega^1_{\mathbb{P}_n} \to V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n} \to 0\,,$$

в которых стрелки $\mathcal{O} \to V \otimes \mathcal{O}(1)$ и $V^* \otimes \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}$ задаются тем же тензором из пространства

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}\big(\mathcal{O}, V \otimes \mathcal{O}(1)\big) \simeq V \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}\big(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1)\big) \simeq V \otimes V^* \simeq V \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}\big(\mathcal{O}(-1), \mathcal{O}\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}\big(V^* \otimes \mathcal{O}(-1), \mathcal{O}\big)$$

что и тождественное отображение $\mathrm{Id}_V \in V \otimes V^* \simeq \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V, V)$.

**АГ8⋄4.** Покажите, что пучки поливекторных полей[1] на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ включаются в точные последовательности $\mathcal{O}$-модулей $\quad 0 \to \Lambda^{k-1}\mathcal{T} \to \Lambda^k V \otimes \mathcal{O}(k) \to \Lambda^k \mathcal{T} \to 0$, в которых

$$\Lambda^k V \simeq \operatorname{Hom}\big(\mathcal{O}(k), \Lambda^k \mathcal{T}\big) \simeq \operatorname{Hom}^*\big(\Lambda^{k-1}\mathcal{T}, \mathcal{O}(k+1)\big)$$

и которые организуются в одну длинную точную последовательность $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}$-модулей

$$0 \to \mathcal{O} \to V \otimes \mathcal{O}(1) \to \Lambda^2 V \otimes \mathcal{O}(2) \to \cdots \to \Lambda^n V \otimes \mathcal{O}(n) \to \mathcal{O}(n+1) \to 0\,,$$

где стрелки суть однородные компоненты оператора умножения на сечение $s : \mathcal{O} \to V \otimes \mathcal{O}(1)$ из зад. АГ8⋄3 во внешней алгебре $\Lambda^*\big(V \otimes \mathcal{O}(1)\big) = \bigoplus_{k=0}^{n+1} \Lambda^k V \otimes \mathcal{O}(k)$ пучка сечений расслоения $V \otimes \mathcal{O}(1)$.

**АГ8⋄5.** Покажите, что касательное расслоение к грассманиану $\operatorname{Gr}(k, V)$ изоморфно $\operatorname{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{Q})$, где $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ — тавтологическое подрасслоение[2] тривиального расслоения $\mathcal{V} = V \times \operatorname{Gr}(k, V)$, а $\mathcal{Q} = \mathcal{V}/\mathcal{S}$ — тавтологическое фактор расслоение[3].

**АГ8⋄6.** Пусть $k + m < n$. Покажите, что многообразие пересекающихся $k$- и $m$-мерных плоскостей в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$: $\Omega(k, m, n) \overset{\text{def}}{=} \{(K, M) \mid K \cap M \neq \varnothing\} \subset \operatorname{Gr}(k+1, V) \times \operatorname{Gr}(m+1, V)$ гладко в точке $(K, M) = \big(\mathbb{P}(U), \mathbb{P}(W)\big)$ тогда и только тогда, когда $\dim U \cap W = 1$ и в этом случае

$$T_{(K,M)}\Omega(k, m, n) = \{(\varphi, \psi) \in \operatorname{Hom}(U, V/U) \times \operatorname{Hom}(W, V/W) \mid \varphi|_{U \cap W} \equiv \psi|_{U \cap W} \pmod{U + W}\}\,.$$

**АГ8⋄7.** Для замкнутого $m$-мерного подмногообразия $X \subset \operatorname{Gr}(k+1, V)$ покажите, что: **а)** объединение $\Pi_X = \bigcup_{\Pi \in X} \Pi \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ является замкнутым многообразием **б)** если точка $p \in \Pi_X$ лежит на единственной плоскости $\Pi = \mathbb{P}(U) \in X$, причём $X$ гладко в $\Pi$ и для любого ненулевого касательного к $X$ вектора $\varphi \in T_\Pi \operatorname{Gr}(k+1, V) = \operatorname{Hom}(U, V/U)$ значение $\varphi(p) \neq 0$, то $\Pi_X$ гладко в $p$, $\dim_p \Pi_X = k + m$ и $T_p \Pi_X$ как подпространство в $\mathbb{P}_n$ представляет собой проективизацию полного прообраза при факторизации $V \twoheadrightarrow V/U$ векторного подпространства в $V/U$, порождённого векторами $\varphi(p)$ со всевозможными $\varphi \in T_\Pi X \subset \operatorname{Hom}(U, V/U)$.

**АГ8⋄8 (вторая квадратичная форма).** Для каждой точки $p$ гладкого $k$-мерного многообразия $X \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ обозначим через $U_p \subset V$ подпространство, проективизация которого есть объединение всех проективных прямых, касающихся $X$ в $p$, так что $T_p X \simeq U_p / p$. Гауссово отображение $\gamma : X \to \operatorname{Gr}(k+1, V)$ переводит $p$ в $U_p$. Покажите, что его дифференциал $d_p \gamma : U_p/p \to \operatorname{Hom}(U_p, V/U_p)$ корректно задаёт симметричную билинейную форму на $T_p X$ со значениями в $N_p X = T_p(\mathbb{P}_n)/T_p X$.

---

[1] т. е. сечений внешних степеней $\Lambda^k \mathcal{T}_{\mathbb{P}_n}$ касательного расслоения

[2] слой $\mathcal{S}$ над точкой $U \in \operatorname{Gr}(k, V)$ равен подпространству $U \subset V$

[3] слой $\mathcal{Q}$ над точкой $U \in \operatorname{Gr}(k, V)$ равен фактор пространству $V/U$

Персональный табель ________________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 8 (14.02.2014)

| № | дата сдачи | имя и фамилия принявшего | подпись принявшего |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |
| 6 | | | |
| 7а | | | |
| б | | | |
| 8 | | | |