Пучки модулей и семейства векторных пространств

АГ7◇1 (локализация). Пусть A — коммутативное кольцо с единицей, $S \subset A$ — мультипликативно замкнутое подмножество, содержащее 1, M — A-модуль.

а) Покажите, что наименьшее отношение эквивалентности на $M \times S$, содержащее все отождествления $(m, s) \sim (tm, ts)$ с произвольными $m \in M$ и $t, s \in S$, тогда и только тогда отождествляет (m_1, s_1) с (m_2, s_2), когда $ss_2m_1 = ss_1m_2$ для некоторого $s \in S$.

б) Обозначим через MS^{-1} фактор $M \times S$ по предыдущей эквивалентности. Покажите, что на AS^{-1} имеется естественная структура кольца, а на MS^{-1} — модуля над кольцами A и AS^{-1}, и для любого гомоморфизма A-модулей $\varphi : M \to N$ постройте естественный гомоморфизм AS^{-1}-модулей $\varphi_S : MS^{-1} \to NS^{-1}$.

в) Постройте гомоморфизмы: колец $A \to AS^{-1}$ и A-модулей $M \to MS^{-1}$ и опишите их ядра.

г) Пусть $\operatorname{im}\varphi = \ker\psi$ для A-линейных $\varphi : M' \to M$ и $\psi : M \to M''$. Покажите, что $\operatorname{im}\varphi_S = \ker\psi_S$.

д) Покажите, что $MS^{-1} = M \underset{A}{\otimes} AS^{-1}$.

АГ7◇2 (тензорное произведение). Пусть $M_1 = F_1/R_1$ и $M_2 = F_2/R_2$, где F_1, F_2 — свободные модули над коммутативным кольцом A. Покажите, что $F_1 \underset{A}{\otimes} F_2$ свободен ранга $\operatorname{rk} F_1 \cdot \operatorname{rk} F_2$ и

$$M_1 \underset{A}{\otimes} M_2 = F_1 \underset{A}{\otimes} F_2 / (R_1 \underset{A}{\otimes} F_2 + F_1 \underset{A}{\otimes} R_2)\,.$$

АГ7◇3 (лемма Накаямы). Пусть A — локальное[1] кольцо, $\mathfrak{a} \subsetneq A$ — идеал, M — конечно порождённый A-модуль. Покажите, что: **а)** $M = \mathfrak{a}M \Rightarrow M = 0$ **б)** если $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$ максимален, и классы $[m_i] = m_i \pmod{\mathfrak{m}M}$ образуют базис векторного пространства $M/\mathfrak{m}M$ над полем $A/\mathfrak{m}$, то элементы m_i линейно порождают M над A **в)** если M проективен, то M свободен.

АГ7◇4. Покажите, что конечно порождённый проективный модуль P над нётеровым кольцом A локально свободен, т. е. для любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ найдётся такая функция $f \in A \smallsetminus \mathfrak{p}$, что[2] P_f своден над A_f.

АГ7◇5. Обозначим через A кольцо непрерывных функций $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ с $f(0) = f(1)$, а через M — аддитивную группу непрерывных функций $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ с $f(0) = -f(1)$. Убедитесь, что M — несвободный проективный A-модуль.

АГ7◇6. Пусть A — конечно порождённая алгебра над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$, M — конечнопорождённый A-модуль, $B = S^*M$ — симметрическая алгебра модуля M. Положим $\mathbb{V}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} B$, $X = \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$. Покажите, что морфизм $\pi : \mathbb{V}(M) \to X$, двойственный к вложению $A \hookrightarrow B$ в качестве подалгебры констант, сюрьективен, и его слой над точкой $x \in X$ с максимальным идеалом $\mathfrak{m} = \ker \operatorname{ev}_x \subset A$, представляет собою векторное пространство над полем $\Bbbk = A/\mathfrak{m}$, канонически двойственное к векторному пространству[3] $M_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}M_{\mathfrak{m}}$ над $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} \simeq \Bbbk$.

АГ7◇7*. Если Вы знакомы с пучками, покажите, что в предыдущей задаче $M_{\mathfrak{m}}$ есть слой в точке x пучка локальных регулярных сечений когерентного пучка[4] $\widetilde{M}$ на X.

АГ7◇8. Пусть подмногообразие $Y = V(f_1, f_2, \dots, f_m) \subset X$ аффинного многообразия X задано регулярной последовательностью $f_1, f_2, \dots, f_m \in \Bbbk[X]$, и $I = (f_1, f_2, \dots, f_m)$. Покажите, что I/I^2 является свободным $\Bbbk[Y]$-модулем ранга m (семейство векторных пространств $N_{Y/X} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{V}(I/I^2)$ называется *нормальным расслоением* к Y в X).

АГ7◇9. Для аффинного $X = \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ покажите, что образ $\Delta_x \subset X \times X$ диагонального вложения $X \hookrightarrow X \times X$ замкнут и его идеал $I_X = I(\Delta_X)$ совпадает с ядром умножения $A \otimes A \to A$.

---

[1] т. е. обладающее единственным максимальным идеалом $\mathfrak{m} \subsetneq A$

[2] мы используем стандартное обозначение $M_f \stackrel{\text{def}}{=} MS^{-1}$ для $S = \{f^k \mid k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$

[3] мы используем стандартное обозначение $M_{\mathfrak{m}} \stackrel{\text{def}}{=} MS^{-1}$ для $S = A \smallsetminus \mathfrak{m}$

[4] модуль сечений этого пучка над открытым $U \subset X$ это $\mathcal{O}_X(U)$-модуль $M \underset{\Bbbk[X]}{\otimes} \mathcal{O}_X(U)$ (в частности для главного $U = \mathcal{D}(f)$ имеем $\widetilde{M}(U) = M_f = M \underset{A}{\otimes} A_f$)

Персональный табель ____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 7 (24.01.2014)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
г			
д			
2			
3а			
б			
в			
4			
5			
6			
7			
8			
9			