# Грассманианы

**АГ3◇1**. Можно ли обратимой линейной заменой переменных преобразовать многочлен

$$9\,x^3 - 15\,yx^2 - 6\,zx^2 + 9\,xy^2 + 18\,z^2x - 2\,y^3 + 3\,zy^2 - 15\,z^2y + 7\,z^3$$

в многочлен от $\leqslant 2$ переменных?

**АГ3◇2**. Покажите, что следующие три условия на грассманов многочлен

$$\omega = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$$

(коэффициенты $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$ кососимметричны по индексам $i_1, i_2, \dots, i_n$) эквивалентны друг другу:

а) $\omega = u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n$ для некоторых $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$

б) $u \wedge \omega = 0 \;\; \forall\, u \in \mathrm{Supp}(\omega)$, где $\mathrm{Supp}(\omega)$ это наименьшее подпространство $U \subset V \,:\, \omega \in \Lambda^n U$

в) для любых двух наборов неповторяющихся индексов $i_1, i_2, \dots, i_{m+1}$ и $j_1, j_2, \dots, j_{m-1}$ выполнено *соотношение Плюккера*[1] $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{m+1} (-1)^{\nu-1} a_{j_1 \dots j_{m-1} i_\nu} a_{i_1 \dots \hat{i}_\nu \dots i_{m+1}} = 0$.

**АГ3◇3**. Вложим грассманиан $\mathrm{Gr}(k, V)$ по Плюккеру в $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(\Lambda^k V)$. Покажите, что

а) всякая прямая, лежащая на нём, изображает семейство $k$-мерных подпространств, содержащихся в некотором общем для всех $(k+1)$-мерном подпространстве и содержащих некоторое общее для всех $(k-1)$-мерное подпространство

б) всякое максимальное по включению проективное подпространство $\Pi \subset \mathrm{Gr}(k, V)$ изображает семейство всех $k$-мерных подпространств, содержащих некоторое фиксированное подпространство в $V$ или семейство всех $k$-мерных подпространств, содержащихся в некотором фиксированном подпространстве в $V$.

**АГ3◇4**. Пусть $\dim U = 2$, $\dim V = k + 1$ и $W = U \otimes V$. Сопоставим точке $\alpha \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ точку $s(\alpha) \in \mathrm{Gr}(k+1, W)$, отвечающую подпространству $\alpha \otimes V \subset W$, и вложим $\mathrm{Gr}(k+1, W)$ в $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(\Lambda^{k+1} W)$ по Плюккеру. Покажите, что точки $s(\alpha)$ нарисуют в образе грассманиана рациональную нормальную кривую степени $k$, лежащую в некоем $\mathbb{P}_k \subset \mathbb{P}_N$.

**АГ3◇5**. Докажите, что для любого проективного многообразия $X \subset \mathbb{P}(V)$ множество $k$-мерных проективных подпространств $L \subset \mathbb{P}(V)$, которые пересекают $X$, составляет замкнутое подмногообразие в грассманиане $\mathrm{Gr}(k+1, V)$.

**АГ3◇6**. В условиях предыдущей задачи напишите явные уравнения, задающие на квадрике Плюккера $\mathrm{Gr}(2,4) \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ множество всех прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$, пересекающих

а) конику $x_3 = x_0 x_2 - x_1^2 = 0$

б) скрученную кубику $x_1^2 - x_0 x_2 = x_2^2 - x_1 x_3 = x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0$.

**АГ3◇7**. Пусть на 4-мерном пространстве $V$ задана невырожденная билинейная косая форма $\Omega$ и зафиксирован некоторый ненулевой 4-вектор $\delta \in \Lambda^4 V$. Покажите, что:

а) существует единственный бивектор $\omega \in \Lambda^2 V \,:\, \forall\, a, b \in V \quad \omega \wedge a \wedge b = \Omega(a, b) \cdot \delta$

б) сечение $\mathrm{Gr}(2,4) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ гиперплоскостью, ортогональной к $\omega$ относительно плюккеровой квадратичной формы на $\Lambda^2 V$, является гладкой квадрикой в этой гиперплоскости и плюккеровым образом лагранжева грассманиана $\mathrm{LGr}(2, V) = \{U \subset V \mid \dim U = 2 \;\&\; \Omega|_U \equiv 0\}$.

в) Покажите, что множество прямых на $\mathrm{LGr}(2, V)$ естественно изоморфно $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$.

[1] «крышка» в $a_{i_1 \dots \hat{i}_\nu \dots i_{m+1}}$ означает, что индекс $i_\nu$ следует пропустить

Персональный табель ________________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 3 (27.09.2013)

| № | дата сдачи | имя и фамилия принявшего | подпись принявшего |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2а | | | |
| б | | | |
| в | | | |
| 3а | | | |
| б | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |
| 6а | | | |
| б | | | |
| 7а | | | |
| б | | | |
| в | | | |