Напоминания из проективной геометрии

АГ1◇1. В стандартной карте $U_0 \subset \mathbb{P}_2$ даны кривые **а)** $y = x^2$ **б)** $y = x^3$ **в)** $y^2 + (x-1)^2 = 1$ **г)** $y^2 = x^2(x+1)$. Напишите их уравнения в картах U_1 и U_2 и нарисуйте все 12 кривых.

АГ1◇2 (рациональная нормальная кривая). Рассмотрим пространство U с базисом t_0, t_1, векторы которого интерпретируем как линейные формы от переменных (t_0, t_1). Однородные многочлены степени d от (t_0, t_1) будем записывать в виде $\sum\limits_{n=0}^{d} \binom{d}{n} a_n t_0^n t_1^{d-n}$ и использовать $(a_0 : a_1 : \ldots : a_n)$ как однородные координаты на $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U)$. Покажите, что кривые $C \subset \mathbb{P}_d$, являющиеся образами перечисленных ниже отображений $c_d, F, P : \mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(S^d U)$, переводятся друг в друга подходящими линейными автоморфизмами $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U)$: **а)** $c_d : \psi \mapsto \psi^d$

б) $F : a \mapsto \big(f_0(a) : f_1(a) : \ldots : f_d(a)\big)$, где $f_0, f_1, \ldots, f_m$ — любой линейно независимый набор однородных многочленов степени d от $a = (a_0, a_1)$

в) $P : a \mapsto \big(\det^{-1}(p_0, a) : \det^{-1}(p_1, a) : \cdots : \det^{-1}(p_d, a)\big)$, где $p_0, p_1, \ldots, p_d \in \mathbb{P}_1$ произвольно фиксированные разные точки и $\det(a, b) = a_0 b_1 - a_1 b_0$ для $a = (a_0 : a_1)$ и $b = (b_0 : b_1)$

АГ1◇3. Фиксируем $d+3$ точки $p_1, p_2, \ldots, p_d$, a, b, $c \in \mathbb{P}_d$ так, чтобы никакие $(d+1)$ из них не лежали в одной гиперплоскости, обозначим через $\ell_i \simeq \mathbb{P}_1$ пучок гиперплоскостей, проходящий через все точки p_ν, кроме p_i, и зададим проективные изоморфизмы $\psi_{ij} : \ell_j \xrightarrow{\sim} \ell_i$ так, чтобы 3 гиперплоскости пучка ℓ_j, проходящие через точки a, b, c, переходили в аналогичные 3 гиперплоскости пучка ℓ_i. Покажите что ГМТ $\bigcup\limits_{H \in \ell_1} H \cap \psi_{21}(H) \cap \ldots \cap \psi_{n1}(H)$ это кривая из зад. АГ1◇2.

АГ1◇4. Покажите, что: **а)** всякие $n+3$ точки в $\mathbb{P}_n$, любые $n+1$ из которых линейно независимы, лежат на единственной рациональной нормальной кривой **б)** над бесконечным полем любые $n+1$ разных точек рациональной нормальной кривой в $\mathbb{P}_n$ линейно независимы.

АГ1◇5. Покажите, что два упорядоченных набора из $n+3$ точек на $\mathbb{P}_n$, такие что в каждом из наборов никакие $n+1$ точек не лежат в одной гиперплоскости, тогда и только тогда переводятся друг в друга проективным автоморфизмом, когда на проведённых через эти наборы рациональных нормальных кривых совпадают двойные отношения любых четвёрок соответственных точек.

АГ1◇6. В проективизации пространства однородных кубических многочленов от (t_0, t_1) опишите проекции кубики Веронезе $C_3 = \{\varphi^3 \mid \varphi \in U\}$ **а)** из точки t_0^3 на плоскость $\big(3\,t_0^2 t_1,\ 3\,t_0 t_1^2,\ t_1^3\big)$ **б)** из точки $3\,t_0^2 t_1$ на плоскость $\big(t_0^3,\ 3\,t_0 t_1^2,\ t_1^3\big)$ **в)** из точки $t_0^3 + t_1^3$ на плоскость $\big(t_0^3,\ 3\,t_0^2 t_1,\ 3\,t_0 t_1^2\big)$ и убедитесь, что среди них нет гладкой[1] кубической кривой. Выведите отсюда, что гладкая кубическая кривая $C \subset \mathbb{P}_2$ не допускает рациональной параметризации[2].

АГ1◇7. Пусть в пучке коник на $\mathbb{P}_2$ есть гладкая коника. Может ли в нём быть ровно **а)** 0 **б)** 1 **в)** 2 **г)** 3 **д)** 4 вырожденных коники? **е)** Могут ли все коники пучка быть вырожденными?

АГ1◇8. Могут ли две гладкие коники пересекаться ровно по **а)** 1 **б)** 2 **в)** 3 различным точкам?

АГ1◇9. Покажите, что поляры данной точки $a \in \mathbb{P}_2$ относительно коник произвольного пучка пересекаются в одной точке.

АГ1◇10. Из скольких точек состоят над девятиэлементным полем[3] $\mathbb{F}_9$

а) коника $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ на $\mathbb{P}_2$ **б)** квадрика $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ в $\mathbb{P}_3$.

АГ1◇11. Сколько прямых пересекают 4 данные попарно скрещивающиеся прямые в пространствах **а)** $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ **б)** $\mathbb{A}(\mathbb{C}^4)$ **в)** $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ **г)** $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$? Найдите все возможные ответы и выясните, какие из них устойчивы к малым шевелениям четырёх данных прямых.

---

[1] без самопересечений и заострений, или, что то же самое, без таких точек $p \in C$, что любая проходящая через p прямая пересекает C с кратностью $\geqslant 2$

[2] подсказка: всякая допускающая рациональную параметризацию плоская кривая степени d получается проектированием кривой Веронезе $C_d \subset \mathbb{P}_d$ на подходящую плоскость $\mathbb{P}_2 \subset \mathbb{P}_d$

[3] элементы поля $\mathbb{F}_9 = \mathbb{Z}[x]/(3,\ x^2+1)$ суть $a + b\sqrt{-1}$, где $a, b \in \mathbb{Z}/(3)$ и $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1 \in \mathbb{Z}/(3)$

Персональный табель ____ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 1 (13.09.2013)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
г			
2а			
б			
в			
3			
4а			
б			
5			
6а			
б			
в			
7			
8а			
б			
в			
9			
10а			
б			
11а			
б			
в			
г			