Письменный экзамен за первый семестр (модули I, II)

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Во всех задачах основное поле $\Bbbk$ предполагается алгебраически замкнутым характеристики нуль.

Задача 1 (10 баллов). Обозначим через $G = \mathrm{Gr}(k+1, n+1)$ грассманиан $(k+1)$-мерных подпространств в $(n+1)$-мерном векторном пространстве V, а через $\mathcal{G} = \mathrm{Gr}\left(\binom{m+k}{k}, \binom{m+n}{n}\right)$ — грассманиан $\binom{m+k}{k}$-мерных подпространств в $\binom{m+n}{n}$-мерном векторном пространстве $S^m V$. Отображение Веронезе[1] $\nu_m : G \to \mathcal{G}$ сопоставляет подпространству $U \subset V$ подпространство $S^m U \subset S^m V$.

а) **(10 баллов)** Покажите, что ν_m — вложение и что его образ является замкнутым подмногообразием в $\mathcal{G}$.

б) **(10 баллов)** Обозначим через $I_m(U) \subset S^m V^*$ пространство однородных многочленов степени m, тождественно зануляющихся на заданном $(k+1)$-мерном векторном подпространстве $U \subset V$. Найдите $\dim I_m(U)$.

Задача 2 (10 баллов). Пусть две пары гладких коник на $\mathbb{P}_2$ имеют матрицы Грама A, B и A', B', и пусть корни[2] $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1$ уравнений $\det(\lambda A + \mu B) = 0$ и $\det(\lambda A' + \mu B') = 0$ переводятся друг в друга некоторым проективным линейным автоморфизмом $\mathbb{P}_1$. Верно ли, что первые две коники можно одновременно перевести во вторые две коники некоторым проективным линейным автоморфизмом $\mathbb{P}_2$?

Задача 3. Для двух проективных многообразий $X, Y \subset \mathbb{P}(V)$ обозначим через $\mathcal{J}(X,Y) \subset \mathrm{Gr}(2,V)$ замыкание множества 2-мерных подпространств в V, отвечающих всевозможным прямым (xy), соединяющим пары различных точек $x \in X$, $y \in Y$, а через $J(X,Y) \subset \mathbb{P}(V)$ — объединение прямых $\ell = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$ по всем $U \in \mathcal{J}(X,Y)$.

а) **(10 баллов)** Покажите, что $J(X,Y)$ — замкнутое подмногообразие[3] в $\mathbb{P}(V)$. Для неприводимых X, Y с $X \cap Y = \varnothing$ выясните, приводимы ли $\mathcal{J}(X,Y)$ и $J(X,Y)$, и найдите их размерности.

б) **(10 баллов)** При $Y = X$ линейное соединение $J(X,X)$ называется *многообразием секущих*. Покажите, что для каждой точки $p \in \mathbb{P}_3$, не лежащей на кубике Веронезе $C_3 \subset \mathbb{P}_3$, существует ровно одна секущая кривой C_3, проходящая через p.

Задача 4 (10 баллов). Покажите, что рациональные нормальные кривые в $\mathbb{P}_n$ образуют открытое по Зарисскому подмножество в некотором неприводимом проективном многообразии, и найдите размерность этого многообразия.

Задача 5. Обозначим через W линейную систему[4] кубических кривых на $\mathbb{P}_2$, проходящих через заданные 6 точек $p_1, p_2, \dots, p_6 \in \mathbb{P}_2$, которые не лежат ни на какой конике и никакие 3 из которых не коллинеарны. Обозначим замыкание образа отображения $\mathbb{P}_2 \smallsetminus \{p_1, p_2, \dots, p_6\} \to W^\times$, задаваемого линейной системой[5] W, через $S \subset W^\times$.

а) **(10 баллов)** Покажите, что S — кубическая поверхность в $\mathbb{P}_3 = W^\times$, и выясните, всегда ли она гладкая[6].

б) **(10 баллов)** Явно укажите 27 пучков кубик, проходящих через $\{p_1, p_2, \dots, p_6\}$, соответствующих двадцати семи прямым на S.

---

[1] обратите внимание, что при $k = 0$ получается вложение Веронезе $\mathbb{P}(V) \hookrightarrow \mathbb{P}(S^m V)$, переводящее $\varphi \in V$ в $\varphi^m \in S^m V$

[2] понимаемые как неупорядоченный набор точек на $\mathbb{P}_1$, в котором точки могут совпадать друг с другом

[3] оно называется *линейным соединением* многообразий X и Y

[4] т. е. проективное пространство

[5] напомню, что оно сопоставляет точке $p \in \mathbb{P}_2 \smallsetminus \{p_1, p_2, \dots, p_6\}$ аннулятор гиперплоскости в W, образованной всеми кривыми $C \in W$, проходящими через p

[6] с геометрической точки зрения оба вопроса — о пучках кубик, проходящих через $\{p_1, p_2, \dots, p_6\}$