

Аффинные и проективные квадрики

Терминология. Пусть аффинная квадрика $Q \subset \mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ задаётся неоднородным квадратичным уравнением $b_2(x_1, \dots, x_n) + b_1(x_1, \dots, x_n) + b_0 = 0$, где

$$b_2(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij} x_i x_j \in S^2 V^*, \quad b_1(x_1, \dots, x_n) = 2 \sum_{j=1}^n \beta_{0j} x_j \in V^*, \quad b_0 = \beta_{00} \in \mathbb{k}.$$

Положим $W = \mathbb{k} \cdot e_0 \oplus V$, $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$, отождествим $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ со стандартной аффинной картой $U_0 \subset \mathbb{P}_n$ и обозначим через $L_\infty = \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}_n \setminus U_0$ бесконечно удалённую гиперплоскость $x_0 = 0$. Проективное замыкание $\bar{Q} \subset \mathbb{P}_n$ имеет в базисе e_0, e_1, \dots, e_n матрицу Грама $B = (\beta_{ij})$ с $0 \leq i, j \leq n$, которая называется *расширенной* матрицей Грама аффинной квадрики Q . Пересечение $Q_\infty = \bar{Q} \cap L_\infty$ имеет в базисе e_1, \dots, e_n матрицу Грама $B_\infty = (\beta_{ij})$ с $1 \leq i, j \leq n$, которая называется *асимптотической* матрицей Грама аффинной квадрики Q . Аффинная квадрика Q называется *гладкой центральной*, если обе квадрики \bar{Q} , Q_∞ гладкие¹, *параболоидом* — если Q гладкая, а Q_∞ особая², (*простым*) *конусом* — если Q особая, а Q_∞ гладкая³, *цилиндром* — если обе квадрики \bar{Q} , Q_∞ особы⁴. Гладкая вещественная центральная аффинная квадрика Q называется *эллипсоидом*, если $Q_\infty = \emptyset$, и *гиперболоидом*, если $Q_\infty \neq \emptyset$.

Через $Q_{n,m} \subset \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ обозначается гладкая вещественная проективная квадрика размерности n и планарности⁵ $-1 \leq m \leq n/2$. Всякая гладкая вещественная проективная квадрика проективно конгруэнтна одной и только одной квадрике $Q_{n,m}$.

Невырожденная вещественная аффинная квадрика⁶ Q с точностью до аффинной конгруэнтности определяется классами проективной конгруэнтности квадрик \bar{Q} и Q_∞ , причём если $\bar{Q} = Q_{nm}$, то либо $Q_\infty = Q_{n-1,m}$, либо $Q_\infty = Q_{n-1,m-1}$, либо Q_∞ является простым конусом над $Q_{n-2,m-1}$. Последнее равносильно тому, что аффинная квадрика Q является параболоидом.

Вещественный аффинный конус Q с точностью до аффинной конгруэнтности определяется классом проективной конгруэнтности своей асимптотической квадрики Q_∞ .

Всякий цилиндр $Q \subset \mathbb{R}^n$ является прямым произведением аффинного подпространства $\mathbb{R}^s \subset \mathbb{R}^n$, проективизацией пространства направлений которого служит⁷ $L_\infty \cap \text{Sing } \bar{Q}$, и нецилиндрической аффинной квадрики Q_{red} в трансверсальном к \mathbb{R}^s аффинном подпространстве $\mathbb{R}^{n-s} \subset \mathbb{R}^n$.

ГС21♦1. Покажите, что у гладкой проективной квадрики $Q_{n,m} = V(q) \subset \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ планарность m , размерность n и абсолютная величина индекса⁸ ι квадратичной формы q связаны соотношением $2m + \iota = n$, и найдите ранг и планарность следующих вещественных

¹В этом случае полюс $z_* = (B_{0,0} : -B_{0,1} : \dots : (-1)^n B_{0,n})$ гиперплоскости L_∞ лежит в \mathbb{A}^n и является центром симметрии аффинной квадрики Q .

²В этом случае гиперплоскость L_∞ касается квадрики \bar{Q} в точке $x_* = (0 : -B_{0,1} : \dots : (-1)^{n+1} B_{0,n})$, которая одновременно является полюсом гиперплоскости $x_0 = 0$ и одномерным ядром формы B_∞ .

³В этом случае квадрика \bar{Q} имеет единственную особую точку $z_* \in \mathbb{A}^n$ и является простым конусом с вершиной в этой точке над гладкой асимптотической квадратикой $Q_\infty \subset L_\infty$.

⁴В этом случае $Q = \mathbb{A}^s \times Q'$, где аффинное пространство $\mathbb{A}^s \subset \mathbb{A}^n$ имеет направляющим пространством векторное подпространство $U = \ker B \cap V$, а Q' — нецилиндрическая квадрика, лежащая в произвольном трансверсальном к U аффинном подпространстве $\mathbb{A}^{n-s} \subset \mathbb{A}^n$.

⁵Напомним, что *планарностью* проективной квадрики называется максимум m размерностей лежащих на этой квадрике проективных подпространств. Значение $m = -1$ равносильно пустоте квадрики.

⁶Т. е. гладкая центральная квадрика или параболоид.

⁷В частности, $s = 1 + \dim L_\infty \cap \text{Sing } \bar{Q}$.

⁸Т. е. модуль разности между положительным и отрицательным индексами инерции.

двумерных проективных квадрик в \mathbb{P}_3 :

- а) $-5x_0^2 - 8x_0x_1 + 16x_0x_2 + 2x_0x_3 + x_1^2 + 18x_1x_2 - 8x_1x_3 - 11x_2^2 - 10x_2x_3 + 6x_3^2 = 0$
- б) $8x_0^2 - 14x_0x_1 + 6x_0x_2 - 22x_0x_3 + 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 22x_1x_3 - 10x_2^2 - 18x_2x_3 + 14x_3^2 = 0$
- в) $-3x_0^2 + 2x_0x_1 - 12x_0x_2 + 20x_0x_3 - 6x_1^2 - 4x_1x_2 + 22x_1x_3 - 15x_2^2 + 60x_2x_3 - 70x_3^2 = 0$
- г) $-2x_0^2 + 14x_0x_1 + 6x_0x_2 - 4x_0x_3 - 24x_1^2 - 20x_1x_2 + 12x_1x_3 - 4x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2 = 0$
- д) $-4x_0^2 - 12x_0x_1 + 24x_0x_2 + 4x_0x_3 - 8x_1^2 + 34x_1x_2 + 8x_1x_3 - 35x_2^2 - 14x_2x_3 = 0$.

ГС21♦2. Перечислите все 7 непустых вещественных «кривых второй степени» в \mathbb{R}^2 и все 14 непустых вещественных «поверхностей второй степени» в \mathbb{R}^3 с точностью до аффинной конгруэнтности. Для каждого типа напишите по возможности самый простой пример аффинного уравнения, задающего квадрику этого типа.

ГС21♦3. Определите, к какому из четырнадцати типов относится аффинная поверхность, заданная в стандартных координатах на \mathbb{R}^3 уравнением:

- а) $3x^2 - 14xy + 8xz - 12x + 17y^2 - 18yz + 28y + 6z^2 - 16z + 11 = 0$
- б) $-x^2 + 2xy + 10xz + 4x + 4y^2 - 34yz - 10y + 4z^2 - 6z - 3 = 0$
- в) $-x^2 + 6xy - 8xz + 2x - 7y^2 + 18yz - 11z^2 - 2z + 5 = 0$
- г) $2x^2 - 8xy - 2xz + 2x + 8y^2 + 4yz - 2y + z^2 + 7 = 0$
- д) $x^2 - 4xy - 2xz - 4x + 6y + 4z + 7 = 0$
- е) $2x^2 - 2xz + 2x + 3y^2 - 10yz - 2y + 9z^2 + 9 = 0$
- ж) $x^2 + 4xy - 4x + 4y^2 - 2yz - 8y - 4z^2 + 2z + 4 = 0$
- з) $2y^2 - 6yz - 2y + 5z^2 + 6z + 4 = 0$
- и) $x^2 - 4xy - 2xz + 2x + 3y^2 + 6yz - 6z - 4 = 0$
- к) $-x^2 - 2xy - 2xz + 6x - y^2 - 2yz + 4y - z^2 + 6z = 0$
- л) $x^2 - 4xy - 2xz - 4x + 5y^2 + 6y + 5z^2 + 8z + 5 = 0$
- м) $2xz - 2yz - 3z^2 + 4z = 0$
- н) $x^2 - 2xy - 2x + y^2 + 2y = 0$
- о) $y^2 - 2yz + 2y + z^2 - 2z + 1 = 0$.

Для гладких центральных поверхностей найдите центр, для парабол — направление оси, для конусов — вершину, для цилиндров — образующее векторное пространство, а также тип и размерность квадрики, служащей основанием цилиндра.

ГС21♦4. Перечислите все а) компактные б) несвязные аффинные квадрики в \mathbb{R}^3 .

ГС21♦5. Покажите, что⁹: а) любой параболоид в \mathbb{R}^n гомеоморфен \mathbb{R}^{n-1}

б) любой эллипсоид $Q \subset \mathbb{R}^n$ 0-планарен и гомеоморфен сфере¹⁰ S^{n-1}

в) 0-планарная проективная квадрика $Q_{n,0} \subset \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ гомеоморфна сфере¹¹ S^n

г) 0-планарный гиперболоид $Q \subset \mathbb{R}^n$ гомеоморфен¹² $\mathbb{R}^{n-1} \times S^0 = \mathbb{R}^{n-1} \sqcup \mathbb{R}^{n-1}$

д) однополостный гиперболоид $1 + z^2 = x^2 + y^2$ в \mathbb{R}^3 гомеоморфен $\mathbb{R}^1 \times S^1$.

ГС21♦6. Покажите, что всякая непустая центральная гладкая аффинная вещественная квадрика гомеоморфна $\mathbb{R}^k \times S^\ell$, и объясните, как связаны числа k и ℓ с сигнатурами матриц Грама B и B_∞ .

ГС21♦7. Покажите, что гладкие 0-планарная и 1-планарная квадрики в \mathbb{P}_3 над полем \mathbb{F}_q состоят, соответственно, из $q^2 + 1$ и $(q+1)^2$ точек, и подсчитайте число решений уравнений из зад. ГС21♦1 над полями \mathbb{F}_5 , \mathbb{F}_7 , \mathbb{F}_{11} и \mathbb{F}_{13} .

ГС21♦8. Из скольких точек состоят над теми же полями аффинные квадрики из зад. ГС21♦3?

ГС21♦9. Две различные гладкие квадратичные поверхности планарности 1 в \mathbb{P}_3 имеют общую прямолинейную образующую. Покажите, что помимо неё они пересекаются ещё по двум (возможно, совпадающим) прямым из другого семейства образующих.

⁹Если общий случай вызывает затруднения, сделайте эту задачу для $n = 3$.

¹⁰В частности, компактен.

¹¹Подсказка: спроектируйте квадрику из лежащей на ней точки на проективную гиперплоскость и сравните результат со стереографической проекцией сферы на аффинную гиперплоскость.

¹²В частности, имеет две связные компоненты.