Евклидовы коники (продолжение)

ГС20◇18. Убедитесь, что для вещественных векторов $u, w \in \ell_\infty$ двойное отношение $[u, w, \iota_-, \iota_+]$ лежит на единичной окружности[1] в $\mathbb{C}$, и евклидов угол $\measuredangle(u, w) = \frac{1}{2}\operatorname{Arg}[u, w, \iota_-, \iota_+]$.

ГС20◇19. Покажите, что ГМТ с фиксированной суммой σ расстояний до двух данных точек f_1, f_2 является эллипсом, напишите его каноническое уравнение и найдите фокусы и директрисы.

ГС20◇20. Покажите, что ГМТ с фиксированной абсолютной величиной разности ϱ расстояний до двух данных точек f_1, f_2 является гиперболой, напишите её каноническое уравнение и найдите фокусы и директрисы.

ГС20◇21. Покажите, что ГМТ с фиксированным отношением $\varepsilon > 0$ расстояния до данной точки f к расстоянию до данной прямой $\ell \not\ni f$ является коникой[2], определите её тип в зависимости от ε и напишите её каноническое уравнение.

ГС20◇22. На сторонах заданного угла bac откладывают точки $s \in [a, b)$ и $t \in [a, c)$ с фиксированной суммой расстояний до вершины $|s-a|+|a-t| = \sigma$. Покажите, что все прямые (st) касаются некоторой параболы.

ГС20◇23. Для каждой из канонических коник:

а) $2ax = y^2$, где $a > 0$ **б)** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a^2 > b^2 \neq 0)$ **в)** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $ab \neq 0$

опишите ГМТ, из которых она видна под прямым углом.

ГС20◇24. Напишите уравнение прямой, на которой коника $ax^2 + by^2 = 1$ высекает отрезок с центром в точке (u, w). (ответ: $aux + bwy = au^2 + bw^2$.)

ГС20◇25. Гладкая проективная коника C касается сторон треугольника $\triangle abc$ в точках

$$a_1 \in (bc), \quad b_1 \in (ca), \quad c_1 \in (ab).$$

Покажите, что точки $(a_1b_1) \cap (ab)$, $(b_1c_1) \cap (bc)$, $(c_1a_1) \cap (ca)$ лежат на одной прямой ℓ, и каждая тройках прямых, соединяющих произвольную точку прямой ℓ с вершинами $\triangle abc$, пересекает стороны $\triangle a_1b_1c_1$ в вершинах автополярного относительно C треугольника.

ГС20◇26 (коника полюсов). Пусть прямая $\ell \subset \mathbb{P}_2$ не проходит через особые точки вырожденных коник и базисные точки невырожденного и не содержащего двойной прямой пучка коник L на $\mathbb{P}_2$. Покажите, что ГМТ полюсов прямой ℓ относительно коник из L является гладкой коникой, проходящей через неподвижные точки инволюции Дезарга $\sigma_L : \ell \rightleftarrows \ell$.

ГС20◇27 (коника 11 точек). Пусть в условиях предыдущей задачи пучок L является простым с базисными точками a, b, c, d. Покажите, что коника полюсов прямой ℓ, не проходящей через a, b, c, d и вершины ассоциированного с четырёхвершинником $abcd$ треугольника $\triangle\, xyz$, характеризуется как единственная коника, описанная около $\triangle\, xyz$ и проходящая через две неподвижные точки инволюции Дезарга $\sigma_L : \ell \rightleftarrows \ell$ и шесть таких точек p_{st}, где $\{s, t\} \subset \{a, b, c, d\}$ и $s \neq t$, что $[\ell \cap (st), p_{st}, s, t] = -1$.

ГС20◇28. Получите из предыдущей задачи школьную окружность девяти точек.

---

[1] Т. е. обратно своему комплексно сопряжённому. Напомню, что всякое число, лежащее на единичной окружности в $\mathbb{C}$, имеет вид $z = e^{i\vartheta}$ для некоторого $\vartheta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, и класс $\operatorname{Arg} z = -i \ln z \overset{\text{def}}{=} \vartheta + 2\pi\,\mathbb{Z}$ называется *аргументом* числа z.

[2] Число ε называется *эксцентриситетом* этой коники.