Гомографии

Терминология. Биекции между проективными прямыми $\mathbb{P}(U)$ и $\mathbb{P}(W)$, задаваемые линейными изоморфизмами $U \simeq W$, называются *гомографиями*. Группа гомографий $\mathbb{P}(\Bbbk^2) \simeq \mathbb{P}(\Bbbk^2)$ обозначается $\mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$. Образ точки $d \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\Bbbk^2) = \Bbbk \sqcup \infty$ при (единственной) гомографии $\mathbb{P}_1 \simeq \mathbb{P}_1$, переводящей три различные точки $a, b, c \in \mathbb{P}_1$, соответственно, в $\infty, 0, 1$, обозначается $[a, b, c, d]$ и называется *двойным отношением* этих точек.

ГС17◇1. Убедитесь, что в любых однородных координатах на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\Bbbk^2)$, а также для любой аффинной координаты на любой аффинной карте, содержащей все четыре точки $p_1, \dots, p_4$, выполняется равенство

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = \frac{\det(p_1, p_3)\det(p_2, p_4)}{\det(p_1, p_4)\det(p_2, p_3)} = \frac{(p_1 - p_3)(p_2 - p_4)}{(p_1 - p_4)(p_2 - p_3)},$$

причём эта величина не зависит от выбора координат и карты. Покажите также, что две упорядоченные четвёрки точек на $\mathbb{P}_1$ тогда и только тогда переводятся одна в другую некоторой гомографией, когда их двойные отношения одинаковы.

ГС17◇2. Опишите все такие преобразования из PGL_2, что **а)** $\infty \mapsto \infty$ **б)** $(\infty, 0) \mapsto (\infty, 0)$ **в)** $(\infty, 0, 1) \mapsto (0, \infty, 1)$ **г)** $(\infty, 0, 1) \mapsto (1, 0, \infty)$ **д)** $(\infty, 0, 1) \mapsto (\infty, 1, 0)$ и без вычислений получите из этих описаний равенства $[p_2, p_1, p_3, p_4] = [p_1, p_2, p_3, p_4]^{-1}$, $[p_3, p_2, p_1, p_4] = [p_1, p_2, p_3, p_4]/\big([p_1, p_2, p_3, p_4] - 1\big)$, $[p_1, p_3, p_2, p_4] = 1 - [p_1, p_2, p_3, p_4]$.

ГС17◇3. Пусть $[p_1, p_2, p_3, p_4] = \vartheta$. Найдите $[p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}, p_{\sigma(3)}, p_{\sigma(4)}]$ для всех 24 перестановок $\sigma \in S_4$ и опишите все ϑ, орбита которых под действием S_4 короче, чем у общего ϑ. Подсказка: действие S_4 пропускается через эпиморфизм $S_4 \twoheadrightarrow S_3$, задаваемый действием группы перестановок вершин плоского четырёхвершинника на вершинах ассоциированного с ним треугольника.

ГС17◇4. Докажите следующие соотношения между двойными отношениями на $\mathbb{P}_1$:

а) $[p_1, p_2, p_3, p_4][p_1, p_2, p_4, p_5][p_1, p_2, p_5, p_3] = 1$ для любых пяти различных точек p_i

б) $[p_1, p_2, q_3, q_4][p_2, p_3, q_1, q_4][p_3, p_1, q_2, q_4][q_1, q_2, p_3, p_4][q_2, q_3, p_1, p_4][q_3, q_1, p_2, p_4] = 1$ для любых восьми различных точек $p_1, \dots, p_4, q_1, \dots, q_4$.

ГС17◇5. Нетождественная гомография $\sigma : \mathbb{P}_1 \simeq \mathbb{P}_1$ называется *инволюцией*, если $\sigma^2 = \mathrm{Id}$. Покажите, что над алгебраически замкнутым полем каждая инволюция на $\mathbb{P}_1$

а) имеет ровно две различные неподвижные точки и в подходящей аффинной карте выглядит как центральная симметрия

б) если $\sigma(p) = p$ и $\sigma(q) = q$, то $\sigma(x) = y \iff [x, y, p, q] = -1$

в) если $\sigma(\alpha) = \beta \neq \alpha$ и $\sigma(\gamma) = \delta \neq \gamma$, то $\sigma(x) = x \iff [\alpha, \beta, \gamma, x]^2 = [\alpha, \beta, \gamma, \delta]$.

ГС17◇6. Постройте инволюцию без неподвижных точек на вещественной проективной прямой. Может ли инволюция вещественной проективной прямой иметь ровно одну неподвижную точку?

ГС17◇7. Найдите образы точек ∞, 0, 1, -1, 3 комплексной проективной прямой при инволюции с неподвижными точками **а)** 2, 1/2 **б)** -3, 2.

ГС17◇8. Найдите неподвижные точки инволюции комплексной проективной прямой, при которой **а)** $1 \leftrightarrow -2$, $2 \leftrightarrow -1$ **б)** $1 \leftrightarrow 2$, $3 \leftrightarrow 4$.

ГС17◇9 (коника Веронезе). Пусть $U = \mathbb{C}^2$ и $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(U)$. Рассмотрим плоскость $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U) = \{ab \mid a, b \in \mathbb{P}_1\}$, образованную неупорядоченными парами точек на $\mathbb{P}_1$, и множество $C = \{a^2 \in \mathbb{P}_2 \mid a \in \mathbb{P}_1\}$ всех пар совпадающих точек. Убедитесь, что C — гладкая коника.

а) Из каких пар xy состоят касательные, опущенные на C из точки $ab \in \mathbb{P}_2 \smallsetminus C$?

б) Покажите, что отображение $\sigma_{ab} : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$, переводящее точку $x \in \mathbb{P}_1$ в такую точку

$y \in \mathbb{P}_1$, что три пары точек x^2, ab, y^2 коллинеарны на $\mathbb{P}_2$, является инволютивной гомографией, и найдите её неподвижные точки.

в) Докажите, что каждая инволюция на $\mathbb{P}_1$ представляется в таком виде, и выведите отсюда зад. ГС17⋄5, см. рис. 1⋄1.

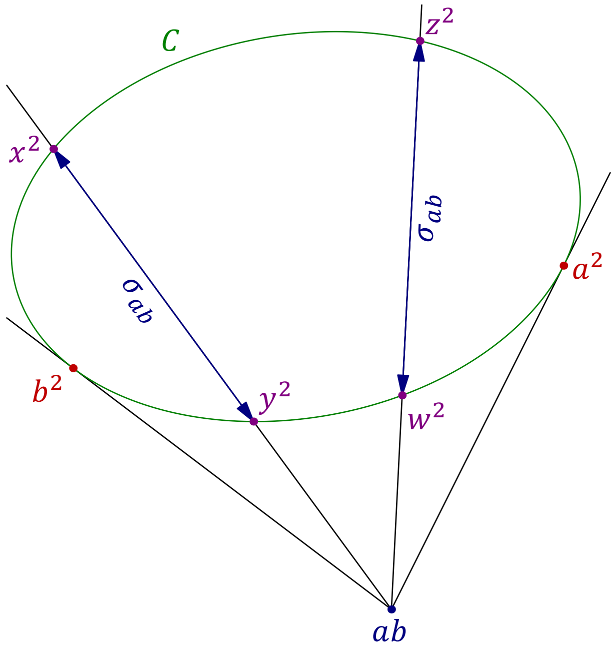

Рис. 1⋄1. Инволюция на конике.

ГС17⋄10. Покажите, что две разных инволюции комплексной проективной прямой всегда одинаково действуют ровно на одну пару точек этой прямой.

ГС17⋄11. В условиях зад. ГС17⋄9 рассмотрим для произвольной гомографии $\gamma : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ биекцию $\gamma_C : C \xrightarrow{\sim} C$, $a^2 \mapsto \gamma(a)^2$. Покажите, что она продолжается до единственного линейного проективного преобразования $\mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_2$, и найдутся такие точки $p_1, p_2 \in C$ и прямая ℓ, что $\gamma_C = (p_1 : \ell \xrightarrow{\sim} C) \circ (p_2 : C \xrightarrow{\sim} \ell)$, где $p_1 : \ell \xrightarrow{\sim} C$ и $p_2 : C \xrightarrow{\sim} \ell$ суть проекция прямой ℓ на конику C из точки p_1 и проекция коники C на прямую ℓ из точки p_2, т. е. проекция каждой точки $x \in C$ на прямую ℓ из точки p_2 совпадает с проекцией точки $\gamma_C(x)$ на ℓ из p_1, см. рис. 1⋄2.

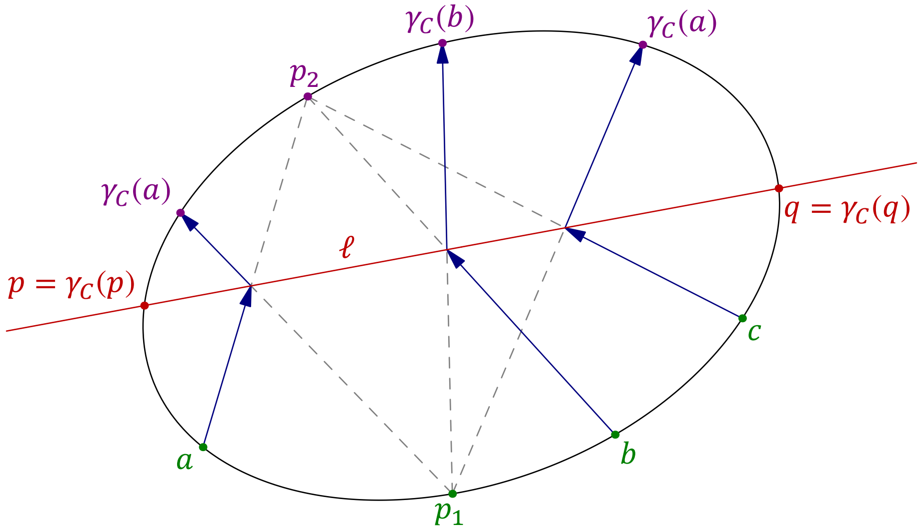

Рис. 1⋄2. Перекрёстная ось гомографии на конике.

ГС17⋄12. Пусть для заданных точек $a, b, c \in C$ известны их образы при преобразовании γ_C. Одной линейкой постройте удовлетворяющие условию предыдущей задачи прямую ℓ и точки $p_1, p_2 \in C$, а также неподвижные точки преобразования γ_C. Сколько их может быть?