Кососимметричные формы и грассмановы многочлены

Терминология и обозначения. Базис $2n$-мерного пространства V с невырожденной кососимметричной формой ω называется *симплектическим*, если его матрица Грама имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, где E — единичная матрица размера $n\times n$. Изотропные подпространства размерности n в V называются *лагранжевыми*. Группа изометрий формы ω обозначается $\mathrm{Sp}_\omega(V)$ или просто $\mathrm{Sp}(V)$ и называется *симплектической группой*. Через $\mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk)$ обозначается симплектическая группа пространства $\Bbbk^{2n}$, в котором стандартный базис является симплектическим.

ГС15◇1. Постройте какой-нибудь симплектический базис для формы с матрицей Грама

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

ГС15◇2. Выясните, не вырождено ли ограничение билинейной формы с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

и на пространство U решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0\,. \end{cases}$$

в $\mathbb{Q}^4$, и если нет, найдите проекцию вектора $v = (-1, 0, 6, 5)$ на U вдоль $U^\perp$.

ГС15◇3. Покажите, что над любым полем каждый однородный грассманов многочлен второй степени линейной обратимой заменой координат приводится к виду

$$\xi_1 \wedge \xi_2 + \xi_3 \wedge \xi_4 + \xi_5 \wedge \xi_6 + \dots$$

ГС15◇4. Найдите над полем $\mathbb{Q}$ ранги грассмановых квадратичных форм и выясните, раскладываются ли они в произведение двух линейных множителей:

а) $\xi_2 \wedge \xi_5 - 2\xi_2 \wedge \xi_6 - 2\xi_3 \wedge \xi_5 + 3\xi_3 \wedge \xi_6 - 2\xi_4 \wedge \xi_5 + 3\xi_4 \wedge \xi_6 + 3\xi_5 \wedge \xi_6$.

б) $\xi_2 \wedge \xi_3 + \xi_2 \wedge \xi_4 + 3\xi_2 \wedge \xi_5 + \xi_2 \wedge \xi_6 - \xi_3 \wedge \xi_4 + 2\xi_3 \wedge \xi_5 - 5\xi_4 \wedge \xi_5 - 2\xi_4 \wedge \xi_6 + \xi_5 \wedge \xi_6$

ГС15◇5. Покажите, что однородный грассманов многочлен ω степени два тогда и только тогда является произведением двух линейных, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

ГС15◇6. Покажите, что шесть чисел A_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, тогда и только тогда являются 2×2-минорами 2×4-матрицы[1] A, когда $A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23} = 0$, и выясните, существует ли комплексная 2×4-матрица с 2×2-минорами[2] **а)** $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **б)** $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Если да, приведите явный пример такой матрицы.

ГС15◇7. Докажите, что любой симплектический оператор $f \in \mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk)$ имеет возвратный характеристический многочлен $\chi_f(t) = t^{2n}\chi_f\left(t^{-1}\right)$ и единичный определитель $\det f = 1$.

ГС15◇8. Покажите, что симплектическая группа состоит из операторов, матрицы которых в симплектическом базисе имеют вид $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где $n \times n$-блоки A, B, C, D удовлетворяют

[1] Так что минор A_{ij} образован i-м и j-м столбцами матрицы A.

[2] Написанными в случайном порядке.

соотношениям $C^tA = A^tC$, $D^tB = B^tD$, $E + C^tB = A^tD$.

ГС15⋄9. Для каждого лагранжева подпространства $U \subset V$ покажите, что **а)** $U = U^\perp$

б) существует такое лагранжево подпространство $U' \subset V$, что $V = U \oplus U'$

в) каждый базис в U однозначно дополняется базисом в U' до симплектического базиса в V

г) полная линейная группа $\mathrm{GL}(U)$ гомоморфно вкладывается в симплектическую группу $\mathrm{Sp}(V)$ по правилу $G \mapsto \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G^{t^{-1}} \end{pmatrix}$.

ГС15⋄10. Покажите, что симплектическая группа $\mathrm{Sp}(V)$ транзитивно действует на лагранжевых подпространствах $U \subset V$.

ГС15⋄11*. Пусть U и U' — дополнительные друг другу лагранжевы подпространства, как в зад. ГС15⋄9 (б). Покажите, что сопоставление антисамосопряжённому[3] линейному отображению $f : U \to U'$ его графика $\Gamma_f = \{(u, f(u)) \in V \mid u \in U\}$ устанавливает биекцию между такими отображениями и дополнительными к U' лагранжевыми подпространствами в V.

[3]Т. е. такому, что $\omega(fu_1, u_2) = -\omega(u_1, fu_2)$ для всех $u_1, u_2 \in U$, где ω — симплектическая форма на V.